

## ALGORITMUL DE OBTINERE A DEPLASĂRILOR SIMETRIZATE ÎN SISTEMELE SIMETRICE COMPLEXE PRIN REDUCEREA LA PROBLEMA VECTORILOR PROPRII

**Igor BOGUȘ, Victor CIOBU, Florentin PALADI**

*Universitatea de Stat din Moldova*

În articol este propus un algoritm modificat de obținere a oscilațiilor simetrizate în sistemele simetrice complexe. În teoria grupurilor anterior au fost dezvoltate metode de determinare a unor astfel de oscilații. Însă, aceste metode sunt dificil de algoritmat pentru sistemele simetrice complexe care dețin multe grade de libertate. Algoritmul modificat propus este elaborat pentru a fi capabil să găsească deplasările simetrizate în astfel de sisteme și, prin urmare, de a obține și clasifica oscilațiile normale și frecvențele acestora. Metoda respectivă reduce această problemă la problema determinării vectorilor proprii, pentru care deja există metode numerice răspândite pe larg.

**Cuvinte-cheie:** teoria grupurilor, algoritme, calcul numeric, simetrie, oscilații simetrizate.

### ALGORITHM OF SYMMETRIZED SHIFTS DETERMINATION IN COMPLEX SYMMETRIC SYSTEMS VIA REDUCING TO THE EIGENVECTORS PROBLEM

A modified algorithm of symmetrised oscillations determination of complex symmetric systems is developed in the article. Methods of determination of such oscillations in the group theory were developed earlier. These methods are difficult to be algorithmised for complex symmetric systems with a big amount of degrees of freedom. The modified algorithm was developed to be able to find symmetrised shifts of such systems and, consequently, to obtain and classify normal oscillations and their frequencies. This method reduces the problem to the problem of eigenvectors determination, to which it is applicable common numerical methods.

**Keywords:** group theory, algorithm, numerical calculation, symmetry, symmetrised oscillations.

#### Introducere

În procesul de cercetare a oscilațiilor și spectrelor moleculelor rolul principal îl au așa caracteristici ca frecvența oscilațiilor și degenerarea acestei frecvențe. Fiecărei frecvențe îi corespunde oscilația sa normală în mecanica clasică sau funcția proprie a fononului în mecanica cuantică. În cazul în care este important de a cerceta nu doar caracteristicile fenomenologice, dar și însuși procesul de oscilare, este util a revizui corespunderea oscilației normale cu oscilațiile normale ale unei anumite reprezentări ireductibile a grupului punctiform de simetrie. Aceasta, la rândul său, permite a revizui simetria oscilației sau paritatea oscilației la acționarea cu operatorul de reflecție vis-à-vis de o anumită suprafață. Pentru sistemele cu un grad înalt de libertate această problemă devine anevoioasă. La abordarea clasică a problemei, descrise în [2,3], algoritmul se supune greu automatizării pentru realizarea la calculator, deoarece calculele intermediare nu lucrează cu un vector concret, ci cu spații sau cu un șir de subspații, adică cu combinații liniare ale vectorilor. Dacă matricele operatorilor în spațiul unei anumite reprezentări ireductibile nu sunt cunoscute, trebuie de soluționat problema privind determinarea bazei reprezentării ireductibile. Această problemă poate fi ocolită prin metoda propusă.

Algoritmul determinării coordonatelor normale cu ajutorul aparatului teoriei grupurilor a fost revizuit pe baza moleculei de fulleren, ca o moleculă cu un număr mare de grade de libertate și cu o simetrie înaltă, atipică pentru fizica corpului solid.

#### Modelul teoretic

Să cercetăm molecula din  $N$  atomi. Vom plasa centrul sistemului cartezian de coordonate în centrul de masă al moleculei. Poziția atomului  $i$  se descrie prin raza-vectoare:

$$\vec{r}_i^0(t) = \vec{r}_i^0 + \vec{s}_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

unde  $\vec{r}_i^0$  – poziția atomului  $i$  în molecula neexcitată,  $\vec{s}_i$  – vectorul deplasării atomului  $i$  de la poziția inițială.

Atunci energia sistemului este egală cu:

$$H(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_N, \dot{\vec{s}}_1, \dot{\vec{s}}_2, \dots, \dot{\vec{s}}_N) = T(\dot{\vec{s}}_1, \dot{\vec{s}}_2, \dots, \dot{\vec{s}}_N) + U(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_N) \quad (2)$$

Energia cinetică depinde de pătratul vitezelor, iar funcția energiei potențiale este formă pătratică de la  $\vec{s}_t$ , deoarece oscilațiile normale ale moleculei sunt armonice. Fiecare atom va fi dotat cu o bază locală ortonormată  $\{\vec{e}_1^{(j)}, \vec{e}_2^{(j)}, \vec{e}_3^{(j)}\}$ , în care va fi descompus vectorul deplasării:

$$\vec{s}_t(t) = \sum_{\alpha=1}^3 x_{\alpha}^{(j)}(t) \vec{e}_{\alpha}^{(j)} \quad (3)$$

Amplitudinea oscilațiilor o vom nota astfel:

$$\vec{s}_t = \sum_{\alpha=1}^3 X_{\alpha}^{(j)} \vec{e}_{\alpha}^{(j)} \quad (4)$$

Starea sistemului se descrie totalmente prin  $3N$  coordonate  $x_{\alpha}^{(j)}$  în spațiul euclidian  $L = \mathbb{R}^{3N}$ . Vectorul în acest spațiu este egal cu următoarea expresie:

$$\vec{x} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \dots, x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, x_3^{(N)}). \quad (5)$$

Această reprezentare se numește *reprezentare mecanică*.

În total există  $s = 3N - s'$  oscilații normale, unde  $s' = 5$  pentru moleculele liniare și  $s' = 6$  pentru restul moleculelor. Dacă este excitată doar o oscilație normală  $j$ , atunci mulțimea de funcții  $x_{\alpha}^{(j)}(t)$  poate fi reprezentată sub forma:

$$x_{\alpha}^{(j)}(t) = X_{\alpha}^{(j)} \cdot \exp(i\omega_j t) \quad (6)$$

$$\vec{s}_t(t) = \sum_{\alpha=1}^3 X_{\alpha}^{(j)} \vec{e}_{\alpha}^{(j)} \cdot \exp(i\omega_j t) \quad (7)$$

$$\vec{x} = (X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, X_3^{(1)}, X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, X_3^{(2)}, \dots, X_1^{(N)}, X_2^{(N)}, X_3^{(N)}) \cdot \exp(i\omega_j t) = \vec{X} \cdot \exp(i\omega_j t), \quad (8)$$

unde  $\omega_j$  – frecvența ciclică a oscilației normale  $j = 1, 2, \dots, s$ , iar totalitatea amplitudinilor  $X_{\alpha}^{(j)}$  este determinată cu precizia până la un coeficient pentru oscilația normală  $j$ . Modulul coeficientului determină amplitudinea oscilației moleculei, iar partea complexă determină deplasarea de fază a oscilației în raport cu timpul momentului de referință. Acești vectori  $\vec{X}$ , care corespund oscilațiilor normale, vor fi notați prin  $\vec{Q}_j$ . Mulțimea tuturor vectorilor formează o bază în subspațiul  $M \subset L$ ,  $M = \mathbb{R}^s$ . Dacă frecvențele  $\omega_i \neq \omega_j, i \neq j$ , atunci vectorii sunt ortogonali:  $\vec{Q}_i \perp \vec{Q}_j$ . Dacă frecvențele coincid pentru diferiți  $i$  și  $j$ , este imposibil a determina vectorii din baza concretă, deoarece coordonatele normale cu aceleași frecvențe sunt determinate cu exactitatea combinației liniare. De aceea, întotdeauna putem cere îndeplinirea condiției de ortonormare a vectorilor  $\vec{Q}_j$ . Totalitatea vectorilor  $\vec{Q}_j$  formează baza de reprezentare oscilatorie a sistemului.

În acest articol este studiată problema stabilirii și clasificării după simetrie a vectorilor  $\vec{Q}_j$  cu ajutorul aparatului teoriei grupurilor. Fie este dat grupul punctiform de simetrie a moleculei  $G$ ,  $g \in G$ ,  $|G| = m$ . Prin  $\Gamma_g$  vom nota reprezentarea oscilatorie a grupului, prin  $\Gamma_x$  – reprezentarea mecanică a grupului, care este descompusă în reprezentări ireductibile, după cum urmează:

$$\Gamma_x = \sum_i \alpha_i \Gamma_i' \quad (9)$$

Așadar, reprezentarea ireductibilă  $\Gamma_i'$  se conține de  $\alpha_i$  ori în cea mecanică. Pentru molecule neliniare în spațiu tridimensional, reprezentarea ireductibilă, a cărei bază este translarea după axe, este reprezentarea tridimensională asimetrică  $T_u$ , iar reprezentarea ireductibilă cu bază de rotație este reprezentarea tridimensională simetrică  $T_g$ . Vom introduce conceptele de bază pentru elementul grupului  $g$  în reprezentarea ireductibilă  $i$ :  $\hat{T}(g)$  – operatorul elementului în reprezentarea mecanică;  $D_{\alpha\beta}^{(i)}(g)$  – matricea elementului în reprezentarea ireductibilă;  $Tr D_{\alpha\beta}^{(i)}(g) = \sum_{\alpha} D_{\alpha\alpha}^{(i)}(g) \equiv \chi_i(g)$  – caracterul elementului;  $L_i$  – ordinea de reprezentare.

Proiectorii de prezentare sunt determinați după următoarea formulă:

$$P_{\alpha\beta}^{(i)} = \sqrt{\frac{L_i}{m}} \sum_g D_{\alpha\beta}^{(i)}(g) \hat{T}(g), \quad (10)$$

unde  $D_{\alpha\beta}^{(i)*}(g)$  – element complex conjugat elementului  $D_{\alpha\beta}^{(i)}(g)$ .

#### Algoritmul clasic

Vom cerceta algoritmul clasic de determinare a coordonatelor normale descris în [2].

1. Se efectuează reprezentarea mecanică ireductibilă.
2. Se compun deplasările simetrice și asimetrice.
3. Acționând cu operatorii reprezentării mecanice asupra vectorilor deplasărilor se obține lanțul vectorilor.
4. Se alcătuesc operatorii proiectoarelor reprezentărilor ireductibile cu ajutorul elementelor matricei operatorilor în această reprezentare.
5. Acționând cu proiectorii asupra unuia dintre vectorii fiecărui lanț, se obține setul de vectori de bază.
6. Se găsește combinația liniară de vectori de bază, obținuți pentru proiectori de o anumită reprezentare ireductibilă, care va fi vectorul oscilației normale.

Cunoașterea numărului de intrări ale reprezentării ireductibile în cea mecanică permite excluderea din calcule a acelor acțiuni ale operatorilor pe diferite deplasări care nu aduc informație nouă despre subspațiul invariant. Fiecare vector alcătuit al deplasării simetrice și asimetrice este un vector, în raport cu care se abat concomitent doi atomi opoziți în raport cu centrul moleculei, în direcții opuse (simetrice) sau în aceeași direcție (asimetrice). Compunerea deplasărilor simetrice și asimetrice la fel nu este necesară, dar permite ca în locul întregului grup de simetrie să fie vizat doar grupul de rotații fără inversii (imagea în oglindă). Lanțurile de vectori de deplasare reprezintă următoarea totalitate de vectori  $A$ , care este bază a subspațiului  $\mathcal{L}$ , adică  $\mathcal{L}$  este învelișul liniar al vectorilor din  $A$ . Vom lua orice vector  $\bar{a} \in A$  din lanț, orice operator  $g \in G$  trece vectorul  $\bar{a}$  în vectorul  $\hat{T}(g)\bar{a} = \bar{b} \in \mathcal{L}$ , iar acționând cu toate elementele grupului asupra unuia dintre vectori putem construi întreaga bază a subspațiului  $\mathcal{L}$ , care nu neapărat să coincidă cu  $A$ . Deoarece operatorul oricărui proiector  $\hat{P}$  e format din suma operatorilor tuturor elementelor grupului, acțiunea proiectorelui asupra oricărui vector din lanț furnizează unul și același rezultat:  $\exists \bar{b} \in \mathcal{L}, \forall \bar{a} \in A, \hat{P}\bar{a} = \bar{b}$  [2]. De aceea, stabilirea lanțurilor nu este obligatorie, dar permite să nu fie efectuate calcule în plus. În continuare se stabilesc proiectorii în baza formulei (10) și se acționează asupra oricărui vector al fiecărui lanț. Aflarea tuturor proiectoarelor nu este necesară, deoarece numărul total de vectori independenți este egal cu produsul dintre dimensiunea reprezentării ireductibile și numărul de apariții ale lor în reprezentarea mecanică. Acționând cu setul de operatori pentru tipul concret de reprezentare ireductibilă se obține baza invariantă a spațiului ansamblului tuturor reprezentărilor ireductibile ale acestui tip. În continuare se găsește o altă bază a acestui subspațiu, în așa fel încât fiecare vector din această bază să corespundă oscilației normale a sistemului de atomi. Acest pas este efectuat fie intuitiv pentru cazuri triviale de dimensiuni mici, fie aducând energia potențială la suma pătratelor coordonatelor spațiului. Metoda prin care sunt excluși unii din pașii indicați este descrisă în [3].

Această metodă a fost elaborată pentru reducerea numărului de calcule anevoioase pentru om. Odată cu dezvoltarea tehnicii de calcul a devenit nerentabilă crearea vectorilor simetrici și asimetrici de deplasare cu scopul de a micșora numărul de elemente din grup, utilizate în calcule, la jumătate. Pentru crearea proiectorului se utilizează caractere în loc de matrice în reprezentări ireductibile, ceea ce permite utilizarea metodei în cazul lipsei matricelor de reprezentări.

### Metoda modificată

Algoritmul metodei modificate arată în felul următor:

1. Se construiește câte un proiector pentru fiecare tip de reprezentare ireductibilă după formula (11).
2. Se găsesc vectorii proprii cu valori proprii nenule, care vor fi bază a subspațiului invariant al proiectorului.
3. Se găsește combinația liniară a vectorilor din bază obținuți pentru proiectorul unei reprezentări ireductibile concrete, care va fi vectorul oscilației normale.

Să construim proiectorul sumând proiectorii  $P_{\alpha\alpha}^{(\lambda)}$  [1, p.79]:

$$P^{(\lambda)} = \sum_{\alpha} P_{\alpha\alpha}^{(\lambda)} = \sum_{\alpha} \sqrt{\frac{l_{\alpha}}{m}} \sum_g D_{\alpha\alpha}^{(\lambda)}(g) T(g) = \sqrt{\frac{l_{\alpha}}{m}} \sum_g T(g) \sum_{\alpha} D_{\alpha\alpha}^{(\lambda)}(g) = \sqrt{\frac{l_{\alpha}}{m}} \sum_g \bar{x}_{\alpha}(g) T(g) \quad (11)$$

Alegem baza spațiului  $L$  astfel încât o parte din vectorii din bază să fie vectori de bază ai subspațiului proiectorului  $P^{(\lambda)}$ . Atunci orice vector al spațiului poate fi descompus ca sumă vectorială:

$$\bar{x} = \sum_j x_j \bar{e}_j^{(\lambda)} + \sum_j y_j \bar{e}_j^{(\lambda')}, \quad (12)$$

unde  $\bar{e}_j^{(\lambda)}$  este vectorul din bază a subspațiului, iar  $\bar{e}_j^{(\lambda')}$  – vector de bază a complementării ortogonale. Vom acționa asupra vectorului cu proiectorul, luând în considerare că imaginea trebuie să aparțină subspațiului invariant:

$$P^{(\lambda)} \bar{x} = \sum_j x_j P^{(\lambda)} \bar{e}_j^{(\lambda)} + \sum_j y_j P^{(\lambda)} \bar{e}_j^{(\lambda')} = \sum_j y_j P^{(\lambda)} \bar{e}_j^{(\lambda')} = \sum_j y_j' \bar{e}_j^{(\lambda')} \quad (13)$$

Vom înlocui  $\bar{x}$  cu orice vector propriu al proiectorului cu valorile proprii  $\lambda_j$  și-l vom compara cu (13):

$$P^{(\lambda)} \bar{x} = \lambda_j \bar{x} = \sum_j y_j' \bar{e}_j^{(\lambda')} \quad (14)$$

Dacă vectorul propriu se află în afara subspațiului, este imposibilă prezentarea lui sub formă de combinație liniară a vectorilor din baza subspațiului, de aceea valoarea sa proprie este egală cu zero. Deoarece vectorii proprii trebuie să formeze o bază a spațiului, numărul de vectori proprii aflați în subspațiu trebuie să coincidă cu dimensiunea subspațiului. Din proprietățile proiectorului  $P^{(\lambda)} \bar{x} = \bar{x}$  pentru orice  $\bar{x}$  din subspațiu rezultă că valorile proprii ale vectorilor proprii, ce se află în subspațiu, trebuie să fie egale cu 1. De aceea, pentru a obține o bază cu reprezentare invariantă a tipului dat, este suficient a găsi vectorii proprii ai proiectorului, corespunzător tipului de reprezentare. Aducând energia potențială la suma pătratelor coordonatelor vectorului subspațiului invariant, vom obține oscilațiile normale ale sistemului ce aparține reprezentării date invariante. Oscilațiile cu o singură frecvență aparțin nu doar unui tip de reprezentare invariantă, dar și aceleiași reprezentări.

### Rezultate

Molecula de fullerene  $C_{60}$  posedă simetria icosaedrulei, iar însuși fullerenul reprezintă un icosaedru cu vârfurile trunchiate (Fig.1). Există 60 de operatori diferiți de rotație, a căror acțiune transformă icosaedrul în sine. Fiecărui operator de rotație  $i$  se poate pune în corespondență operator de reflexie, care păstrează simetria icosaedrulei. Așadar, grupa de simetrie conține în total 120 de elemente.

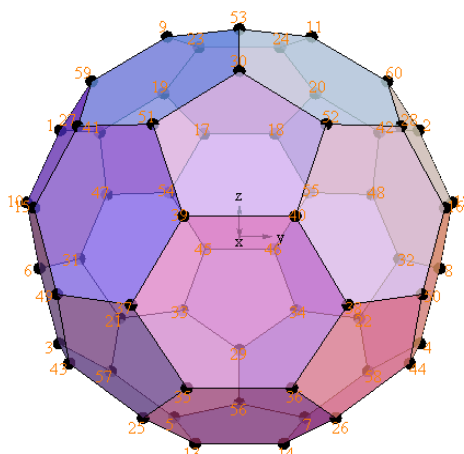


Fig.1. Molecula de fulleren are forma unui icosaedru trunchiat.

Cu ajutorul coordonatelor vârfurilor poate fi construită reprezentarea tridimensională a grupului de rotație, baza căruia coincide cu baza sistemului cartezian de coordonate  $(x, y, z)$ . Pentru stabilirea reprezentării mecanice a grupului, fiecărui atom de fulleren (adică vârful icosaedrului teșit) trebuie de oferit o bază locală, pe vectorii căreia va fi descompus vectorul de deplasare. Se poate alege orice bază ortonormată (de exemplu, care ar coincide cu axele  $x, y, z$ ).

Pentru a obține reprezentarea mecanică a grupului, operatorul elementului  $g_i$  este reprezentat ca o matrice  $A^{(g)}$  din  $60 \times 60 = 3600$  de blocuri  $B_{lm}^{(g)}$ , unde fiecare bloc este o matrice  $3 \times 3$ . Adică, dimensiunea matricei coincide cu numărul de grade de libertate ale moleculei de fulleren – 180 și conține 32400 de elemente. Dacă operatorul  $l$  transformă atomul  $m$  în  $l$ , atunci matricea  $B_{lm}^{(g)}$  este matrice unitară care transformă baza atomului  $m$  în baza atomului  $l$ . Reprezentarea mecanică a moleculei de fulleren poate fi descompusă după reprezentări ireductibile:

$$\Gamma_{180} = 2A_g + 4T_{1g} + 4T_{2g} + 6G_g + 8H_g + 1A_u + 5T_{1u} + 5T_{2u} + 6G_u + 7H_u \quad (15)$$

Cunoscând reprezentarea mecanică, nu este complicat a crea proiectorii după formula (11) și a găsi vectorii lor proprii, care reprezintă o bază a subspațiului său invariant. Formând funcția energiei potențiale de la coordonate în această bază a subspațiului, nu este greu de stabilit asemenea combinații liniare ale acestor vectori, care ar fi coordonate normale. Dacă energia potențială are forma  $U = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ , atunci, diagonalizând matricea  $|a_{ij}|$ , vom obține vectorii proprii care coincid cu vectorii oscilațiilor normale, fapt ce reiese din sensul procedurii de diagonalizare a matricei, deoarece matricea obținută va avea valori nenule doar pe diagonală, care corespund  $a_{ii} x_i^2$ . Substituind vectorii obținuți ai oscilațiilor normale în funcția energiei potențiale și în ecuația Lagrange, în formă adimensională vom avea:

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = 0, \quad (16)$$

unde  $\omega_i^2$  – pătratul frecvenței circulare a oscilațiilor normale. Fiecare frecvență nenulă este degenerată de  $m$  ori, unde  $m$  – dimensiunea reprezentării.

În Figura 2 sunt prezentate deformări obținute ale moleculei de fulleren la oscilații normale: (a) – oscilații ale reprezentării unidimensionale asimetrice  $A_u$ . Se poate observa că această oscilație este rotația pentagoanelor, pentru care legăturile din pentagoane nu se modifică, iar mișcarea atomilor în hexagoane este perpendiculară legăturilor; (b) – exemplu de oscilație a reprezentării asimetrice cuadrimensionale.

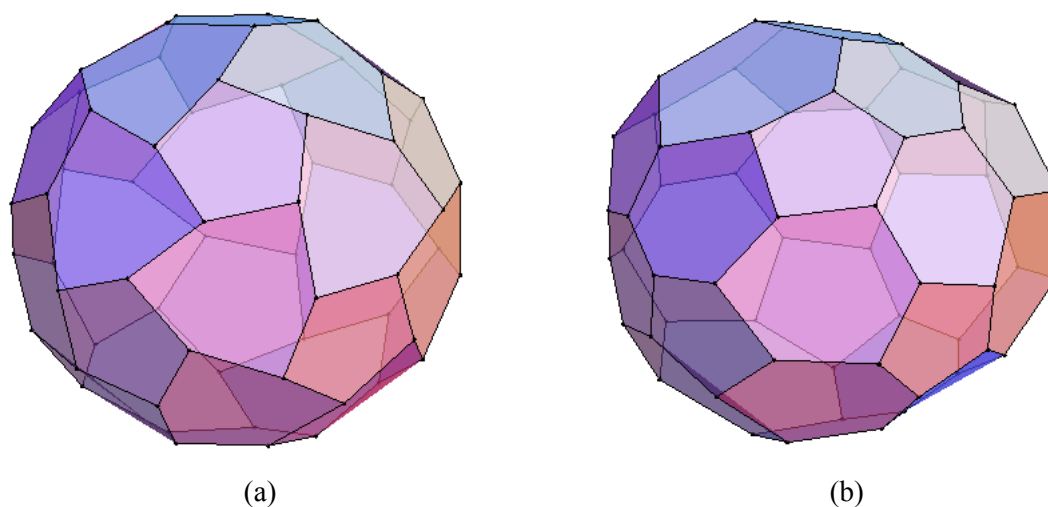


Fig.2. Exemple ale modurilor de oscilații pentru reprezentările:  $A_u$  (a),  $G_u$  (b)

### Concluzii

1. Algoritmul dezvoltat permite reducerea problemei de obținere a deplasărilor simetrizate la problema găsirii vectorilor proprii ai subspațiilor invariante ale proiectoarelor. Problema calculării vectorilor proprii este bine studiată și există numeroase metode de rezolvare a ei. Această abordare permite construirea unui proiector folosind tabele de caractere, fără a cunoaște toată matricea de elemente.
2. Metoda modificată permite automatizarea procesului de împărțire a reprezentării mecanice a sistemului în reprezentări ireductibile, ceea ce permite cercetarea sistemelor simetrice cu ajutorul teoriei grupurilor.
3. Aplicarea metodei prezentate pentru sistem cu potențial cunoscut permite cercetarea sistemului dintr-un număr mare de particule (sau puncte materiale/corpuri).

### Bibliografie:

1. БИР, Г.Л., ПИКУС, Г.Е. *Симметрия и деформационные эффекты в полупроводниках*. Москва: Наука, 1972.
2. ПЕТРАШЕНЬ, М.И., ТРИФАНОВ, Е.Д. *Применение теории групп в квантовой механике*. Издание четвертое, стереотипное. Москва, 2002.
3. ПОКЛОНСКИЙ, Н.А. *Точечные группы симметрии*. Минск: Изд-во БГУ, 2003.

Prezentat la 12.11.2015



## INFLUENȚA TRATĂRII TERMICE ÎN AZOT SAU ÎN VID ASUPRA PROPRIETĂȚILOR STRATURILOR DE GaN CRESCUTE PE Si(111) PRIN METODA HVPE

Vasile BOTNARIUC, Boris CINIC, Andrei COVAL,  
Petru GAȘIN, Leonid GORCEAC, Simion RAEVSCHI

Universitatea de Stat din Moldova

A fost studiată influența tratării termice la temperaturi ridicate în azot sau în vid asupra proprietăților straturilor de GaN depuse pe siliciu prin metoda reacțiilor chimice de transport în sistemul ( $H_2-NH_3-HCl-Ga-Al$ ), (HVPE). În spectrele de fotoluminescență (FL), la 300 K, ale straturilor netratate se evidențiază două fâșii de recombinare radiantă, cu maximele la 370 și 555 nm. La tratarea în azot intensitatea fâșiei 370 nm crește, iar la tratarea în vid – descrește. Intensitatea benzii galbene (555 nm), la tratare în ambele medii, scade neesențial. Se demonstrează că parametrii electrici ai straturilor pot fi, de asemenea, modificați prin metoda tratării termice în azot sau în vid, precum și prin durata de tratare.

**Cuvinte-cheie:** GaN, Si, HVPE, tratare termică, fotoluminescență.

### THE INFLUENCE OF HIGH TEMPERATURE ANNEALING IN NITROGEN OR VACUUM ON PROPERTIES OF GAN LAYERS DEPOSITED ON SI(111) BY HVPE MEHOD

The influence of high temperature annealing in nitrogen and vacuum of GaN layers deposited by chemical reactions transport (HVPE) in ( $H_2-NH_3-HCl-Ga-Al$ ) system on their properties was studied. In the photoluminescence (PL) spectra at 300 K of the untreated layers two recombination radiation bands with the plats at 370 nm and 555 nm were revealed. At the layers heat treatment the intensity of the radiation band at 370 nm increases when at the intensity of the yellow band (555 nm) decreases not significantly at the treatment in the both ambiances. It was shown that the electrical parameters could as well be controlled by using heat treatment in nitrogen and vacuum and this depends on the annealing duration.

**Keywords:** GaN, Si, HVPE, annealing, photoluminescence.

### Introducere

În ultimele decenii a avut loc un progres esențial în tehnologia dispozitivelor cu semiconductoarele GaN, InN, AlN. La început aceste materiale, cu banda interzisă largă și tranziții directe, au fost aplicate la elaborarea surselor eficiente de lumină (LED) pentru domeniul albastru al spectrului. Acest progres se datorează, în primul rând, oamenilor de știință din Japonia (Isamu Akasaki, Hiroshi Amano și Shuji Nacamura), care primii în lume au reușit să sintetizeze straturi perfecte de GaN pe safir, cu conductibilitatea electrică de tipurile  $-n$  și  $-p$ , să elaboreze joncțiuni p-n și diode electroluminescente pe baza lor. Pentru aceste lucrări, în 2014 li s-a conferit Premiul Nobel pentru fizică. Datorită proprietăților de excepție (termoconductibilitate ridicată, viteză înaltă de saturație a electronilor în câmp electric, stabilitate în medii agresive și la temperaturi înalte) nitrura de galiu poate fi utilizată și în alte domenii ale electronicii – pentru construirea detectoarelor de radiație ultravioletă, aparatelor electronice de putere și de funcționare la frecvențe și temperaturi ridicate [1-6].

Straturile de nitrura de galiu se sintetizează, de obicei, pe substraturi de safir sau de carbură de siliciu și la temperaturi cu mult mai joase decât temperatura de topire. În consecință, straturile sunt tensionate, conțin multe dislocații, defecte proprii de tipul  $V_N$ , care produc niveluri adânci [7], cu conductibilitatea de tipul  $-n$  și concentrația electronilor de ordinul  $10^{20} \text{ cm}^{-3}$ . Pentru micșorarea concentrației defectelor, deplasarea poziției Ga-N spre stehiometrie, a recombinării radiante în regiunea tranzițiilor excitonice, straturile GaN, după sinteză, necesită o tratare termică suplimentară, la temperaturi ridicate în atmosferă de azot. Această tratare are ca rezultat îmbunătățirea morfologiei suprafețelor, creșterea intensității fotoluminescenței, micșorarea concentrației electronilor și mobilității [7-10].

În această lucrare sunt prezentate rezultatele cercetării influenței tratării termice la temperaturi 800-950°C, în azot sau în vid, asupra distribuției spectrale a fotoluminescenței și asupra rezistivității straturilor GaN cu grosimi  $\sim 10 \mu\text{m}$ , depuse pe siliciu prin metoda HVPE.

## Experiment

Depunerea straturilor subțiri de GaN pe suporturi de Si cu straturi intermediare de AlN a fost realizată prin metoda reacțiilor chimice de transport în sistemul ( $H_2-NH_3-HCl-Ga-Al$ ), (HVPE), într-un reactor de cuarț instalat orizontal. Presiunea în reactor era cu 50 mm  $H_2O$  mai ridicată decât presiunea atmosferică. În calitate de gaz de transport s-a utilizat hidrogenul, purificat cu un filtru de paladiu. Ca precursori au fost folosiți amoniacul, clorura de hidrogen, Ga(99,999%) și Al(99,999%). Fluxurile de HCl în conductele aluminiului, galiului și celei de corodare erau dizolvate în flux de hidrogen. Consumul total de hidrogen constituia 4,8 slpm, iar de amoniac varia în intervalul 0,5÷2,4 slpm. Consumul de HCl, în dependență de procedeele efectuate, varia între 1 și 100 smlpm. În timpul depunerii, pentru obținerea straturilor omogene, substraturile de siliciu erau rotite cu un flux de hidrogen, cu o viteză de ~ 100 rot/min. Profilul termic în reactor era asigurat cu încălzitor rezistiv cu mai multe zone, în care temperaturile se mențineau constante cu o precizie de ~1 grad. Temperatura surselor de Al și Ga era de 850°C, iar a siliciului – de 950°C. Ca substraturi s-au folosit plachete poleite de Si de marca КДБ 0,1 cu orientarea cristalografică (111) și de marca КЭФ 4,5 cu orientarea cristalografică (001). Tratarea termică a straturilor de GaN a fost efectuată într-un flux de azot sau în vid, la presiunea de  $10^{-4}$  Torr, la temperaturile 800°C, 850°C și 900°C.

Distribuția spectrală a fotoluminescenței (FL) straturilor de GaN s-a cercetat la temperatura de 300 K, cu ajutorul monocromatorului MDR-23 cu rezoluția 2,6 nm/mm. Excitarea FL s-a efectuat cu raze laser de azot ( $\lambda=337$  nm), cu puterea impulsului de ~7 W/cm<sup>2</sup> și durata de 10 ns. Semnalul radiației s-a înregistrat cu multiplicatorul ФЭУ-51 într-un sistem de detectare sincronică.

## Rezultatele și analiza lor

Spectrele de FL ale straturilor de GaN, netratate, la 300 K constau din două fâșii cu maximele la 370 nm și la 555 nm caracteristice straturilor de nitrură de galiu [10], (Fig.1).

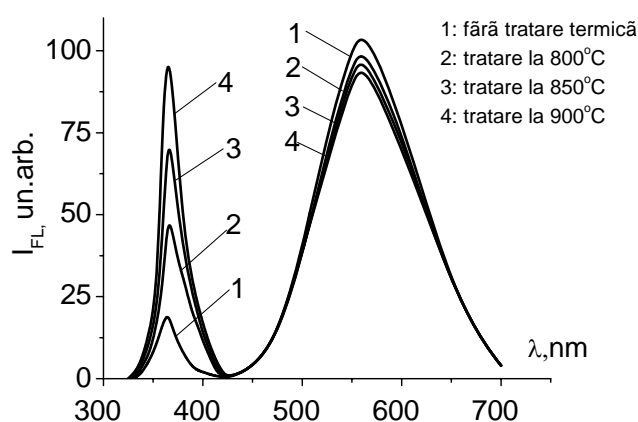
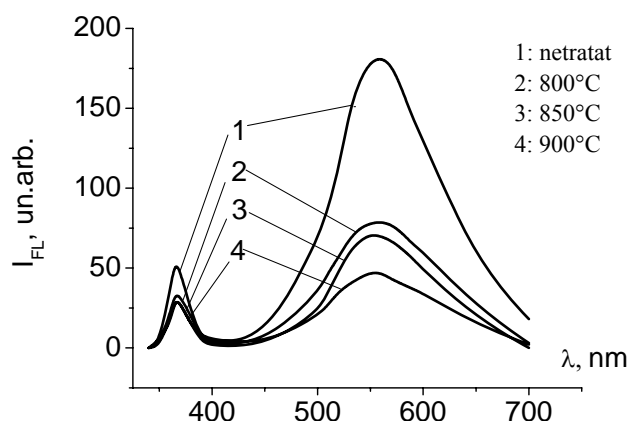


Fig.1. Spectrele de fotoluminescență, măsurate la 300 K, ale straturilor de GaN depuse pe Si(111) prin metoda HVPE, tratate termic în azot.

Spectrele de FL ale straturilor de GaN tratate în azot sau în vid au aceeași formă ca și cele netratate (Fig.1, 2), se schimbă numai intensitatea relativă a maximelor. În straturile tratate în azot timp de o oră, odată cu creșterea temperaturii de tratare crește și intensitatea fâșiei cu maximul la 370 nm (la 800°C – de 3 ori; la 850°C – de 5 ori; la 900°C – de 7 ori), iar pentru fâșiile cu maximul la 555 nm intensitatea se micșorează neesențial.

Creșterea intensității FL de recombinare impuritară din regiunea energiei benzii fundamentale (F) se datorează ameliorării structurii cristaline a straturilor, micșorării concentrației vacanțiilor de azot, deplasării concentrației Ga-N spre stehiometrie. Luminescența benzii galbene (cu maximul la 555 nm) este generată de tranzițiile spre nivelurile defectelor de diferită proveniență, care nu pot fi înlăturate din straturi doar prin tratare termică [10].

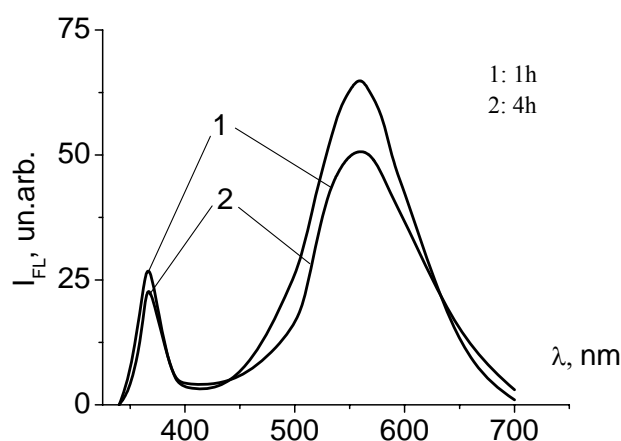




**Fig.2.** Spectrele de fotoluminescență, măsurate la 300 K, ale straturilor de GaN depuse pe Si(111) prin metoda HVPE, tratate termic în vid.

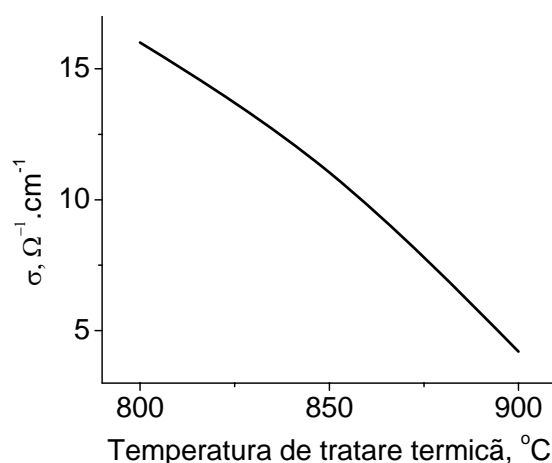
La tratarea termică a straturilor de GaN în vid, odată cu creșterea temperaturii de tratare, intensitatea ambelor fâșii se micșorează (Fig.2). La tratarea timp de o oră la 800°C, intensitatea fâșiei cu maximumul la 370 nm se micșorează de două ori, iar a celei cu maximumul la 555 nm – de 2,7 ori. Cu mărirea temperaturii de tratare până la 900°C intensitatea maximelor se micșorează mai puțin (Fig.2).

La tratarea termică în vid, la temperaturi ridicate, are loc descompunerea parțială a nitrurii de galiu; în consecință, azotul este evacuat, concentrația galiului în straturi se mărește, compoziția Ga-N se deplasează în direcția opusă stehiometriei. Se constată că la tratarea în vid are loc o micșorare mai semnificativă a intensității benzii galbene decât la tratarea în azot. Deci, vidarea la temperaturi ridicate contribuie și la înlăturarea anumitor defecte din straturile de GaN. Cu mărirea temperaturii de tratare în vid, de la o oră până la patru ore, intensitatea maximelor se micșorează neesențial (Fig.3). Intensitatea maximelor de FL depinde de orientarea suportului de Si. La tratarea termică în vid la 800°C, intensitatea fotoluminescenței este mai mare în straturile GaN depuse pe suporturi de Si cu orientarea cristalografică  $\sim(111)$ .



**Fig.3.** Spectrele de fotoluminescență, măsurate la 300 K, ale straturilor de GaN depuse pe Si(111) prin metoda HVPE, tratate termic la 900°C în vid.

Au fost cercetate proprietățile electrice ale straturilor GaN depuse pe Si și tratate termic în azot. Pentru straturile GaN cu conductibilitatea electrică inițială de  $34 \Omega^{-1}\text{cm}^{-1}$ , odată cu creșterea temperaturii de tratare termică de la 800 la 900°C, conductibilitatea electrică se micșorează de la  $\sim 16 \Omega^{-1}\text{cm}^{-1}$  până la  $\sim 4 \Omega^{-1}\text{cm}^{-1}$  (Fig.4).



**Fig.4.** Conductibilitatea electrică, măsurată la 300 K, a straturilor de GaN depuse pe Si(111) prin metoda HVPE, tratate termic în azot.

Pentru straturile GaN tratate termic în vid la temperatura de 900°C, odată cu mărirea duratei de tratare termică de la o oră până la patru ore, conductibilitatea electrică se mărește de la  $1,4 \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$  până la  $42 \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$ .

### Concluzii

A fost studiată influența tratării termice la temperaturi ridicate în azot sau în vid asupra proprietăților fizice ale straturilor de GaN depuse pe siliciu prin metoda reacțiilor chimice de transport, (HVPE). La depunere a fost utilizat un strat intermediar de AlN. S-a constatat că la tratarea în azot intensitatea de fotoluminescență a benzii de margine (F) se mărește de câteva ori, în timp ce intensitatea benzii galbene (Y) se micșorează nesemnificativ. La tratarea în vid, intensitatea ambelor benzi se micșorează. Se presupune că varierea intensității benzilor respective la tratare termică în azot sau în vid se datorează schimbării structurii cristaline, precum și compoziției Ga-N a straturilor în direcția stechiometriei (la tratarea în azot) sau în direcția opusă (la tratarea în vid). S-a demonstrat că prin metoda tratării termice în diferite medii și cu diferite durate de timp pot fi dirijați parametrii fizici ai straturilor de GaN depuse pe siliciu prin metoda HVPE.

### Bibliografie:

1. STIRE, S. and MORCOC, H. GaN, AlN, and InN. In: *J. Vac. Sci. Technol.*, 1992, B 10(4), p.1237-1266.
2. NAKAMURA, S. Laser diodes. In: *GaN and related Materials*, II / Ed. S.J. Peatron. Gordon and Breach Science Publishers, the Netherlands, 1999, p.1-46.
3. PEARTON, S.J., REN, F., ZHANG, A.P., LEE, K.P. Fabrication and performance of GaN electronic devices. In: *Materials Science and Engineering*, R30, 2000, no.3-6, p.55-212.
4. VESCAN, A., BROWN, J.D., JONSON, J.W., THERRIEN, R., GEHIKE, T., RAJAGOPAL, P., ROBERTS, J.S., SIMGHAL, S., NAGY, W., BORGES, R., PINER, E., LINTHICUM, K. In: *Phys. Status Solidi (c)* 0, 2002, p.52-56.
5. WANG, H.M., ZHANG, J.P., CHEM, C.Q., FAREED, Q., YANG, J.W., KHAN, M.A. In: *Appl. Phys. Lett.*, 2002, no.81, p.604-609.
6. YAMAGUCHI, S., IWAMURA, Y., WATANABLE, Y., KOZAKI, M., YUKAWA, Y., NITTA, S., KAMIYAMA, S., AMANO, H., AKASAKI, I. In: *Appl. Phys. Lett.*, 2002, no.79, p.802-808.
7. ZOLPER, J.C., HAGEROTT CRAWFORD, M., HOWARD, A.J., RAMER, J. and HERSEE, S.D. In: *Appl. Phys. Lett.*, 1996, no.68, p.200-205.
8. КАЦАБЕЦ, Н.И., HARRISON, I., LARKIS, E.C., BENSON, T.M., CHENG, T.S., FOXON, C.T. В: *ФТЛ*, 1998, т.32, №10, с.1175-1180.
9. ГЕОРГОБИАНИ, А.Н., ГРУЗИНЦЕВ, А.Н., ВОРОБЬОВ, М.О., КАЙЗЕР, У. В: *ФТЛ*, 2001, т.35, В.10, с.725-730.
10. ZHANG, J.X., QU, Y., CHEN, Y.Z., UDDIN, A., Shu.Yuan. In: *Journal of Crystal Growth*, 282, 2005, p.137-142.

**Notă:** Lucrarea a fost îndeplinită cu suportul Proiectului instituțional 15.817.02.34A  
18.01.2016RS

Prezentat la 06.07.2015

## STUDIAREA PROBABILITĂȚII $\pi$ ÎN METODA RĂSPUNSURILOR RANDOMIZATE

*Andrei POȘTARU, Nicolae PRODAN, Olga BENDERSCHI*

*Universitatea de Stat din Moldova*

Este examinată probabilitatea  $\pi$  de a obține răspunsuri sincere în sondaje. Sunt expuse câteva metode de estimare a lui  $\pi$ : metoda intervalelor de încredere, metoda verosimilității maxime, verificarea ipotezelor statistice simple etc.

**Cuvinte-cheie:** sondaje, probabilitate, statistică, estimație, ipoteze statistice, interval de încredere, răspunsuri randomizate.

### RANDOMIZED RESPONSE METHOD: ESTIMATIONS OF THE PROBABILITY $\pi$

The probability  $\pi$  to get honest answers in surveys is considered. There are presented several methods for  $\pi$  estimating: confidence interval method, maximum likelihood estimation, statistical hypotheses testing etc.

**Keywords:** surveys, probability, statistics, estimation, statistical hypotheses, confidence interval, randomized response.

### Introducere

Rezultatele cercetărilor sociologice, de regulă, conțin erori, uneori foarte grave, care pot reduce la zero veridicitatea lor. Oamenii nu sunt sinceri în răspunsurile lor la întrebări intime, la fel și la întrebări ce țin de consumul de droguri, violența în familie, eschivarea de la achitarea corectă a impozitelor etc. Astfel, problema sporirii sincerității răspunsurilor este actuală [1].

### 1. Modelul de sondaj al lui Stanley Warner

Stanley Warner [3] a propus un model de sondaj care sporește substanțial veridicitatea răspunsurilor. Una dintre variantele posibile constă în următoarele. Presupunem că se efectuează un sondaj pentru a determina amploarea în societate a unui fenomen  $C$  (negativ). Să notăm prin  $\pi$  probabilitatea ca un individ luat la întâmplare să fie afectat de fenomenul  $C$ . Pentru evaluarea acestei probabilități se poate lua un eșantion de  $N$  indivizi și dacă  $k$  dintre ei sunt afectați de fenomenul  $C$ , atunci putem spune  $\pi \approx \frac{k}{N}$ . Spre regret, numărul  $k$  este necunoscut. Prin întrebări directe este imposibil să aflăm valoarea adevărată a lui  $k$ . Se propune următorul procedeu.

Fiecărui dintre  $N$  respondenți  $i$  se înmânează o fișă cu două întrebări:

1. Este adevărat că sunteți afectat de fenomenul  $C$ ?
2. Este adevărat că nu sunteți afectat de fenomenul  $C$ ?

Fiecare respondent va răspunde doar cu „da” sau „nu” și doar la una dintre aceste întrebări, întrebare „aleasă” la întâmplare. Cum se poate organiza aceasta?

De exemplu, odată cu fișa fiecărui respondent  $i$  se înmânează și un zar pe care urmează să-l arunce în sus, o singură dată. Acei care obțin, de exemplu, cel mult două puncte, vor răspunde la prima întrebare, iar cei care obțin trei puncte și mai multe vor răspunde la întrebarea a doua. Totodată, nimeni nu trebuie să cunoască rezultatul aruncării și, în consecință, nici la care din întrebare se dă răspuns. Astfel, fiecare respondent răspunde doar la una din întrebări: la prima întrebare cu probabilitatea  $p = \frac{1}{3}$ , iar la a doua cu probabilitatea

$1 - p = \frac{2}{3}$ . Bineînțeles, putem alege și alte probabilități, în loc de zar utilizând alte mecanisme (tabele de numere aleatoare etc.). Cazurile  $p = 1$  și  $p = 0$  conduc la cazul de sondaj clasic.

În condițiile în care este pus respondentul acum, el ar trebui (cel puțin din punct de vedere psihologic) să se simtă în afara oricărui „pericol” venit din cauza unui răspuns sincer.

Într-adevăr, ambele răspunsuri posibile, și „da” și „nu”, pot avea o interpretare „pozitivă”: răspunsul „da” poate fi atribuit celei de a doua întrebări, iar „nu” primei întrebări.

Astfel, putem spera că în urma unui astfel de sondaj se vor obține rezultate mult mai veridice.

În [2] pentru probabilitatea  $\pi$ , de care suntem interesați, noi am stabilit formula

$$\pi = \frac{\frac{n}{N} - 1 + p}{2p - 1}; \left( p \neq \frac{1}{2} \right). \quad (1)$$

Aici  $N$  este numărul respondenților,  $n$  este numărul răspunsurilor de „da” date de ei, iar  $p$  reprezintă probabilitatea cu care un respondent răspunde la prima întrebare. Tot acolo, în [2], este examinată probabilitatea  $\pi$  ca funcție de  $n$ ,  $n$  fiind interpretat ca o variabilă aleatoare.

În prezenta lucrare este studiată în continuare probabilitatea  $\pi$ , sunt expuse câteva metode de estimare, este testată o ipoteză statistică privind valoarea lui  $\pi$ .

Numărul  $n$  de „da” poate fi privit ca o variabilă aleatoare. Se constată cu ușurință că  $n$  are repartiție binomială  $n \sim B(N, \psi)$ , unde  $\psi = 1 - p + (2p - 1)\pi$ , și, deci,  $Mn = N(1 - p + (2p - 1)\pi)$ ;  $M$  este simbolul valorii medii.

Astfel, pentru probabilitatea  $\pi$  obținem formula (exactă)

$$\pi = \frac{\frac{Mn}{N} - 1 + p}{2p - 1}, \quad (2)$$

formulă ce diferă de (1) prin aceea că  $n$  este înlocuit cu valoarea lui medie.

În continuare vom examina rolul lui  $\psi$  la stabilirea valorii probabilității  $\pi$ . Amintim că  $\psi$  reprezintă probabilitatea răspunsului „da” al unui respondent și este o funcție de  $\pi$ .

Mai întâi menționăm că: a) dacă  $p < \frac{1}{2}$ , atunci  $\psi = 1 - p + (2p - 1)\pi \in [p, 1 - p]$ ;

b) dacă  $p > \frac{1}{2}$ , atunci  $\psi = 1 - p + (2p - 1)\pi \in [1 - p, p]$ .

## 2. Unele metode de evaluare a probabilității $\pi$

Vom expune unele metode de evaluare a lui  $\pi$ , atunci când se cunoaște numărul răspunsurilor de „da” obținute.

**Metoda 1.** Presupunem că se efectuează un sondaj în care se obțin  $n^*$  de „da”. Dacă  $p < \frac{1}{2}$  și  $n^* \in [Np, N(1 - p)]$ , sau dacă  $p > \frac{1}{2}$  și  $n^* \in [N(1 - p), Np]$ , atunci (în ambele cazuri) drept estimatie a

funcției parametrice  $\psi(\pi) = 1 - p + (2p - 1)\pi$  putem lua statistica  $\hat{\psi} = \frac{n^*}{N}$ . Prin urmare, în acest caz

pentru probabilitatea  $\pi$  obținem estimatia  $\hat{\pi} = \frac{\hat{\psi} - 1 + p}{2p - 1}$ .

**Metoda 2.** Pentru parametrul  $\psi$ , ca probabilitate, putem construi un interval de încredere.

Se știe că frecvența relativă  $\frac{n^*}{N}$  este o estimatie eficientă a probabilității  $\psi$ . Alegând un prag de semnificație  $\alpha$ , construim intervalul de încredere

$$\left( \frac{n^*}{N} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\frac{n^*}{N} \left( 1 - \frac{n^*}{N} \right)}{N}}, \frac{n^*}{N} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\frac{n^*}{N} \left( 1 - \frac{n^*}{N} \right)}{N}} \right)$$

(aici  $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$  este „ $1 - \frac{\alpha}{2}$  - cuantila” repartiției normale  $N(0,1)$ ).

Acest interval acoperă valoarea parametrului  $\psi$  cu probabilitatea  $1 - \alpha$ . Mai important pentru noi este să construim un interval de încredere pentru probabilitatea  $\pi$ . Alegând un prag de semnificație  $\alpha$  și ținând cont de legătura dintre  $\pi$  și  $\psi$ , putem scrie:

$$\frac{n^*}{N} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\frac{n^*}{N} \left(1 - \frac{n^*}{N}\right)}{N}} < 1 - p + (2p-1)\pi < \frac{n^*}{N} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\frac{n^*}{N} \left(1 - \frac{n^*}{N}\right)}{N}},$$

adică

$$\frac{n^*}{N} + p - 1 - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\frac{n^*}{N} \left(1 - \frac{n^*}{N}\right)}{N}} < (2p-1)\pi < \frac{n^*}{N} + p - 1 + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\frac{n^*}{N} \left(1 - \frac{n^*}{N}\right)}{N}}.$$

În funcție de valoarea lui  $p$ , conchidem:

a) dacă  $p < \frac{1}{2}$ , atunci

$$\frac{1}{2p-1} \left[ \frac{n^*}{N} + p - 1 + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\frac{n^*}{N} \left(1 - \frac{n^*}{N}\right)}{N}} \right] < \pi < \frac{1}{2p-1} \left[ \frac{n^*}{N} + p - 1 - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\frac{n^*}{N} \left(1 - \frac{n^*}{N}\right)}{N}} \right];$$

b) dacă  $p > \frac{1}{2}$ , atunci

$$\frac{1}{2p-1} \left[ \frac{n^*}{N} + p - 1 - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\frac{n^*}{N} \left(1 - \frac{n^*}{N}\right)}{N}} \right] < \pi < \frac{1}{2p-1} \left[ \frac{n^*}{N} + p - 1 + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\frac{n^*}{N} \left(1 - \frac{n^*}{N}\right)}{N}} \right].$$

**Metoda 3.** Pentru  $\pi$  putem construi o estimatie de verosimilitate maximă.

Amintim că  $\psi$  este funcție de probabilitatea  $\pi$ :  $\psi = 1 - p + (2p-1)\pi$ . Evident,  $P(n = n^*) = C_N^{n^*} \psi^{n^*} (1-\psi)^{N-n^*}$ .

Conform teoremei Moivre-Laplace,

$$P(n = n^*) \approx \frac{1}{\sqrt{N\psi(1-\psi)}} \cdot \varphi\left(\frac{n^* - N\psi}{\sqrt{N\psi(1-\psi)}}\right),$$

astfel probabilitatea  $P(n = n^*)$  este o funcție  $g(\pi)$ .

Ca estimatie a lui  $\pi$  putem lua acea valoare  $\pi^*$  a lui  $\pi$ , pentru care probabilitatea  $P(n = n^*)$  este maximă. Deoarece funcția  $g(\pi)$ , ca funcție de  $\pi$ , este destul de complicată și greu de cercetat la maximum, se va proceda în felul următor: în intervalul (0,1) cu un pas oarecare  $h$  (de exemplu, cu  $h = 0,01$ ) examinăm pe rând valorile lui  $\pi$ , calculând pentru fiecare din ele valoarea funcției  $g(\pi)$ . Valoarea  $\pi^*$  va fi acea valoare a lui  $\pi$ , pentru care  $g(\pi)$  ia valoarea maximă.

**Metoda 4.** Amintim că  $\psi$  reprezintă probabilitatea ca un respondent să răspundă cu „da”;  $\psi = 1 - p + (2p-1)\pi$  și deci  $\pi = \frac{\psi - (1-p)}{2p-1}$ . Observăm că legătura dintre  $\psi$  și  $\pi$  este bijectivă.

În continuare, pentru a determina valoarea (aproximativă) a lui  $\psi$  și, prin urmare, și a lui  $\pi$ , problema respectivă este formulată ca o problemă de verificare a unei ipoteze statistice privind parametrul repartiției binomiale (am menționat deja că  $\psi$  este parametrul unei repartiții binomiale).

Într-adevăr, problema privind determinarea probabilității  $\psi$  poate fi privită ca o problemă de verificare a ipotezelor, anume:

Să se verifice ipoteza nulă

$$H_0: \psi = \psi_0$$

cu alternativa:

$$H_1: \psi > \psi_0, \psi_0 \in (0,1).$$

Pentru realizarea practică a acestei idei vom formula următoarea serie de probleme:

Să se verifice ipoteza nulă  $H_0: \psi = kh$  cu alternativa  $H_1: \psi > kh$  ( $k = 1, 2, \dots, \left[\frac{1}{h}\right]$ ) sau, pe scurt:

$$H_0: \psi = kh,$$

$$H_1: \psi > kh.$$

Aici  $h \in (0,1)$  este un număr mic (de exemplu,  $h = 0,01$ ). La rezolvarea acestei serii de probleme ne vom conduce de următorul algoritm:

Se ia  $k = 1$  și, aplicând un test statistic corespunzător (care urmează să fie descris), se rezolvă problema:

$$H_0: \psi = h,$$

$$H_1: \psi > h.$$

Dacă ipoteza  $H_0$  este acceptată, atunci problema privind valoarea probabilității  $\psi$  este rezolvată:  $\psi = h$ . Dacă ipoteza  $H_0$  este respinsă și, prin urmare, este acceptată alternativa  $H_1$  ( $\psi > h$ ), atunci se formulează problema:

$$H_0: \psi = 2h,$$

$$H_1: \psi > 2h.$$

Se aplică testul menționat și se rezolvă această problemă. Dacă ipoteza nulă  $H_0$  este acceptată, atunci problema despre valoarea probabilității  $\psi$  este rezolvată:  $\psi = 2h$ . În caz contrar este acceptată alternativa  $H_1$ , se ia  $k = 3$  și se testează ipoteza  $H_0: \psi = 3h$  cu alternativa  $H_1: \psi > 3h$  etc.

Sunt posibile două variante de încheiere a acestui algoritm:

a) pentru un  $k_0$  oarecare ipoteza  $H_0$  este acceptată și valoarea probabilității  $\psi$  este stabilită:  $\psi = k_0h$ ;

b) toate ipotezele  $H_0: \psi = kh, k = 1, 2, \dots, \left[\frac{1}{h}\right]$  sunt respinse și, prin urmare, seria noastră de probleme se

încheie cu acceptarea ipotezei  $H_1: \psi > \left[\frac{1}{h}\right] \cdot h$ .

În acest caz, problema privind valoarea probabilității  $\pi$  încă nu este rezolvată, doar se poate constata că  $\psi > \left[\frac{1}{h}\right] \cdot h$ , adică  $|1 - \psi| < h$ . Deci, putem considera că  $\psi \approx 1$ , dacă  $h$  este suficient de mic. Dar putem micșora „pasul”, luând, de exemplu, un nou „pas”  $h^* = 0,01h$  și trecând la rezolvarea unei serii noi de probleme:

$$H_0: \psi = kh^*,$$

$$H_1: \psi > kh^*, k = 1, 2, \dots, \left[\frac{1}{h^*}\right].$$

Și de data aceasta vom aplica algoritmul expus mai sus. Din nou putem avea cazurile a) și b), menționate deja. În cazul b) vom lua  $\psi \approx 1$  sau vom continua testarea cu un pas mai mic, rezolvând o serie nouă de probleme.

În continuare vom descrie testul statistic care, în algoritmul expus mai sus, se aplică la verificarea ipotezelor de tipul:

$$H_0: \psi = \psi_0$$

cu alternativa

$$H_1: \psi > \psi_0, \psi_0 \in (0,1).$$



Fie că  $n^*$  dintre cei  $N$  respondenți au răspuns „da”. Conform teoremei integrale Moivre-Laplace, dacă ipoteza  $H_0$  este adevărată, atunci pentru valori mari ale lui  $N$  ( $N > 50$ ) repartiția variabilei aleatoare

$$Z = \frac{n^* - N\psi_0}{\sqrt{N\psi_0(1-\psi_0)}}, \text{ sau, echivalent, a lui } Z = \frac{\frac{n^*}{N} - \psi_0}{\sqrt{\frac{\psi_0(1-\psi_0)}{N}}}$$

este aproximativ normală cu parametrii 0 și 1.

Această variabilă aleatoare este luată în calitate de statistică a testului; regiunea critică a testului statistic pentru pragul de semnificație  $\alpha$  este mulțimea valorilor lui  $Z$ , determinate de inegalitatea  $z > u_{1-\alpha}$ , unde

$u_{1-\alpha}$  este „ $1-\alpha$  – cuantila” funcției de repartiție  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}u^2} du$ ”:  $\Phi(u_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ .

**Metoda 5.** La efectuarea a  $N$  experimente Bernoulli cu probabilitatea succesului egală cu  $\psi = 1 - p + (2p - 1)\pi$  în fiecare experiment, cel mai probabil număr de succese  $n_0$  este partea întregă a numărului fracționar  $(N - 1)(1 - p + (2p - 1)\pi)$ ; în caz contrar  $n_0$  are două valori:

$$(N - 1)(1 - p + (2p - 1)\pi); (N - 1)(1 - p + (2p - 1)\pi) + 1.$$

Aceasta ne poate permite să estimăm probabilitatea  $\pi$ . Într-adevăr, fie că am efectuat un sondaj cu  $N$  respondenți și  $n^*$  dintre aceștia au răspuns „da”. Cunoscând numărul  $n^*$  vom calcula succesiv valorile numărului  $n_0$  pentru  $\pi = h, 2h, \dots$ , eventual până la  $\left[\frac{1}{h}\right] \cdot h$ , oprindu-ne la valoarea  $\pi = kh$ , pentru care  $n_0 = n^*$ . În consecință, considerăm  $\pi \approx kh$ .

### 3. Aplicații și concluzii

Metodele descrise mai sus au fost testate pe un eșantion de 80 de studenți de la USM. Au fost abordate trei fenomene: 1) mituirea profesorilor; 2) dezamăgirea în alegerea specialității (facultății); 3) copierea la examen. În toate cazurile s-a luat  $p = \frac{1}{3}$ , adică la prima din cele două întrebări formulate în fișe a răspuns, în medie, fiecare al treilea dintre cei chestionați. Numărul răspunsurilor de „da” în legătură cu cele trei fenomene este, respectiv: 1)  $n_1 = 45$ ; 2)  $n_2 = 37$ ; 3)  $n_3 = 85$ .

Se verifică cu ușurință că aceste rezultate satisfac condițiile care permit să aplicăm metodele de estimare a probabilității  $\pi$ , expuse mai sus. Astfel, 4 din aceste metode au condus la următoarele valori aproximative (sau intervale de încredere pentru  $\pi$ ):

Metoda 1.  $\pi_1 \approx 0,3125$ ;  $\pi_2 \approx 0,6125$ ;  $\pi_3 \approx 0,6875$ .

Metoda 2.  $\pi_1 \in (0,0039; 0,636)$ ;  $\pi_2 \in (0,2887; 0,9285)$ ;  $\pi_3 \in (0,3667; 0,9884)$ .

Metoda 3.  $\pi_1 \approx 0,30$ ;  $\pi_2 \approx 0,61$ ;  $\pi_3 \approx 0,70$ .

Metoda 5.  $\pi_1 \in (0,297; 0,353)$ ;  $\pi_2 \in (0,593; 0,629)$ ;  $\pi_3 \in (0,67; 0,70)$ .

Trebuie să recunoaștem că volumul eșantionului este destul de modest și sondajul nu s-a efectuat în toate grupele concomitent. Rolul sondajului este unul mai mult ilustrativ. Noi nu pretindem că rezultatele lui reflectă exact situația reală în problemele respective. Totodată, trebuie să menționăm faptul că referitor la mită în învățământ rezultate similare cu ale noastre am întâlnit în unele materiale oficiale.

### Bibliografie:

1. NATHAN, G. Bibliographie de la méthode des réponses randomisées (1965-1987). En: *Statistique Canada: Techniques d'enquête*, 1988, no.14, p.351-365.
2. POȘTARU, A., PRODAN, N., BENDERSCHI, O. Asupra metodei răspunsurilor randomizate. În: *Materialele Conferinței internaționale „Modelarea Matematică, Optimizare și Tehnologii Informaționale”*. Ediția a IV-a. Chișinău: Evrica, 2014. Vol.I, p.184-190. ISBN 978-9975-62-365-0
3. WARNER, S. Randomizes response: a survey technique for eliminating evasive answer bias. In: *J. Am. Statist. Assoc.*, 1965, no.60, p.63-69.

Prezentat la 01.10.2015

## ASUPRA FORMĂRII INTUIȚIEI PROBABILISTE

Andrei POȘTARU, Olga BENDERSCHI

Universitatea de Stat din Moldova

În lucrare este examinat rolul unor exerciții și probleme, special alese, care îndeosebi pot contribui la formarea și dezvoltarea intuiției și gândirii probabiliste. Sunt prezentate numeroase exemple clasice și paradoxuri cunoscute, dar și probleme originale. Este analizată și partea metodică a rezolvării problemelor propuse.

**Cuvinte-cheie:** probabilitate, intuiție probabilistă, formarea și dezvoltarea intuiției, experiment aleator, definiția clasică a probabilității, scheme probabiliste clasice, problema lui Monty Hall.

## ABOUT DEVELOPING THE PROBABILISTIC INTUITION

The paper examines the role of specially chosen, exercises and problems, which may contribute especially to the formation and development of probabilistic intuition and thinking. There are presented many classical examples, known paradoxes and original problems. It is examined the methodological part of solving proposed problems.

**Keywords:** probability, probabilistic intuition, formation and development of intuition, random experiment, classical definition of probability, classical probability scheme, Monty Hall problem.

## Introducere

Teoria probabilităților se distinge dintre celelalte matematici prin numeroase concluzii și soluții neașteptate din punct de vedere intuitiv. Avem parte de surprize chiar de la primii pași în această știință.

Unul dintre scopurile studierii teoriei probabilităților este formarea și dezvoltarea la studenți (elevi etc.) a intuiției și gândirii probabiliste. Există numeroase probleme care îndeosebi pot contribui la atingerea acestui scop. Se cere doar să selectăm cu atenție aceste probleme și să le folosim în cadrul lecțiilor practice (seminarelor). Rezolvând o astfel de problemă și stabilind răspunsul printr-o metodă analitică, în continuare va trebui să le propunem studenților să încerce să-l argumenteze doar cu ajutorul unor raționamente intuitive.

## 1. Despre intuiție

Capacitatea de a utiliza soluții, sugerate de intuiție, este una din componentele principale ale succesului unui individ și un indice al măsurii în care acesta și-a dezvoltat individualitatea intrinsecă.

Intuiția poate fi privită ca o formă de cunoaștere imediată a adevărului pe baza experienței și a cunoștințelor achiziționate anterior, fără raționamente logice preliminare.

De înțelegerea noțiunii „intuiție” au fost preocupați mari gânditori ai omenirii.

Descartes: „Intuiția este cunoașterea bruscă, directă a adevărului, opusă cunoașterii raționale, analitice. Cunoștințele obținute în mod intuitiv se înfățișează ca simple, clare, evidente”.

Bergson: „Intuiția este o formă de cunoaștere de natură, în esență, irațională, opusă și superioară cunoașterii discursive și analitice, care face o sesizare nemijlocită fără o elaborare logică prealabilă a esenței”.

Robert Graves: „Intuiția este supralogică ce elimină toate procesele de rutină ale gândirii și sare direct de la problemă la răspuns”.

Intuiția este numită al șaselea simț. Toată lumea știe că intuiția există. Intuiția are diferite aspecte. O persoană are intuiție în medicină în diagnosticul de boală, altul în finanțe, al treilea în artă etc. Intuiția poate și trebuie promovată. Aceasta ar facilita viața noastră și ne-ar ajuta să găsim soluții potrivite în multe situații [3].

## 2. Probleme de probabilitate pentru dezvoltarea intuiției probabiliste

Inițial putem propune exerciții simple:

- De câte ori în medie trebuie să aruncăm o monedă simetrică pentru a obține fața cu stema? (de 2 ori).
- De câte ori în medie trebuie să aruncăm zarul pentru a obține fața cu 6 puncte? (de 6 ori). Care este explicația? (Probabilitatea apariției acestei fețe este  $1/6$ ).
- De câte ori în medie trebuie să tragem într-o țintă pentru a o atinge dacă, spre exemplu, de fiecare dată probabilitatea de atingere este  $p$ ? (răspunsul este  $1/p$ ).
- Aruncăm moneda de 10 ori, ce este mai probabil – să cadă de 5 ori stema sau de 5 ori banul? (probabilitățile sunt egale).

După exerciții simple putem trece la examinarea unor probleme mai complicate [1,2,4].

**Problema 1.** Într-o urnă se conțin  $n$  bile. Toate ipotezele privind numărul de bile albe din urnă se consideră echiprobabile. Din urnă se extrage la întâmplare o bilă. Să se determine probabilitatea ca bila extrasă să fie albă (evenimentul  $A$ ).

Problema dată poate fi soluționată aplicând formula probabilității totale:

$$P(A) = \sum_{i=0}^n P(H_i)P(A/H_i), \text{ unde } H_i = \{\text{în urnă se află } i \text{ bile albe}\}, P(H_i) = \frac{1}{n+1}, P(A/H_i) = \frac{i}{n},$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

$$\text{Astfel, } P(A) = \frac{1}{n+1} \left( \frac{0}{n} + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n} \right) = \frac{1}{(n+1)n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}. \text{ Deci, } P(A) = \frac{1}{2}.$$

Pornind de la acest răspuns, le vom cere studenților să-l argumenteze sau să-l deducă cu raționamente intuitive.

De exemplu, putem raționa astfel: dacă toate ipotezele despre numărul bilelor albe din urnă sunt echiprobabile, atunci ipotezele despre numărul bilelor de altă culoare decât cea albă de asemenea sunt echiprobabile. Prin urmare, problema noastră este „simetrică” în raport cu culoarea albă și cealaltă culoare („non-albă”). Deci, este firesc ca probabilitatea să fie aceeași pentru extragerea unei bile de culoare albă și pentru extragerea unei bile „non-albă”.

**Problema 2.** Într-o urnă se conțin  $a$  bile albe și  $b$  bile negre. Se extrag  $k$  bile conform schemei fără întoarcere ( $k \leq a + b$ ). Să se determine probabilitatea ca bila de la ultima extragere să fie de culoare albă.

Răspunsul  $\frac{a}{a+b}$  poate fi argumentat cu raționamente intuitive: la ultima extragere poate fi scoasă oricare dintre cele  $a + b$  bile; cum  $a$  dintre acestea sunt albe, probabilitatea cerută este  $\frac{a}{a+b}$ .

Firește, cu aceleași raționamente argumentăm că bila albă este scoasă la fiecare extragere de asemenea cu probabilitatea  $\frac{a}{a+b}$ .

**Problema 3.** Într-o urnă se conțin  $a$  bile albe,  $b$  bile negre și  $c$  bile roșii. Una câte una se scot toate bilele. Să se determine probabilitatea de a scoate o bilă albă înainte de a scoate o bilă neagră (evenimentul aleator  $A$ ).

Aplicăm formula probabilității totale  $P(A) = \sum_{i=0}^n P(H_i)P(A/H_i)$ , unde  $H_i = \{\text{înainte de a extrage o bilă albă sau neagră, sunt scoase } i \text{ bile roșii}\}, i = 0, 1, 2, \dots, c$ .

$$\text{Cu ajutorul unor calcule netriviabile obținem răspunsul: } P(A) = \frac{a}{a+b}.$$

Cum putem explica acest rezultat prin raționamente de ordin intuitiv? Întâi de toate, vom observa că probabilitatea evenimentului  $A$  nu depinde de numărul bilelor roșii din urnă. Dacă am adăuga în urnă și bile de alte culori, să zicem,  $s$  bile verzi și  $k$  bile de culoare albastră, aceasta nu ar modifica probabilitatea evenimentului  $A$ : am putea considera că urna conține  $a$  bile albe,  $b$  bile negre și  $c' = c + s + k$  bile de altă culoare.

În al doilea rând, dacă schimbăm  $a$  și  $b$  cu rolurile, considerând că în urnă avem  $b$  bile albe și  $a$  bile negre, obținem probabilitatea  $P(B)$  de a scoate o bilă neagră înainte de a scoate o bilă albă. Este evident că  $P(A) :$

$$P(B) = a : b \text{ și, cum } P(A) + P(B) = 1, \text{ deducem că } P(A) = \frac{a}{a+b}.$$

### 3. Unele „capcane” ale intuiției

Definiția clasică a probabilității poate fi aplicată doar în cazul când rezultatele „elementare” ale experimentului sunt echiprobabile (amintim aici greșeala „celebră” a lui Lagrange: el considera că probabilitatea de a obține o stemă la aruncarea a două monede este egală cu  $\frac{1}{3}$ ).

În continuare sunt prezentate unele exemple când intuiția ne poate jucă festa.

**Problema 4.** Câți elevi trebuie să fie într-o clasă, astfel încât probabilitatea ca în această clasă să existe cel puțin doi elevi născuți în aceeași zi a anului să fie egală cu cel puțin  $\frac{1}{2}$ ; considerăm anul de 365 de zile.

Soluția acestei probleme, formulate în 1930 de Richard von Mises, este contraintuitivă pentru mulți dintre noi: este nevoie doar de 23 de elevi.

O variantă a acestei probleme este problema aniversărilor pentru băieți și fete. Dacă într-o clasă numărul fetelor este egal cu numărul băieților, care este numărul minim de elevi în clasă, astfel încât probabilitatea de a avea un băiat și o fată născuți în aceeași zi a anului să fie egală cu cel puțin  $\frac{1}{2}$ ? Răspunsul este, de asemenea, surprinzător de neașteptat: clasa trebuie să aibă un efectiv de 32 de elevi (16 fete și 16 băieți).

**Problema 5.** Să considerăm un sat cu  $5 \times 365 = 1825$  de locuitori. Care-i probabilitatea că fiecare zi a anului este ziua de naștere a cel puțin unui locuitor din sat? Este greu să avem un răspuns intuitiv asupra acestei probabilități. Dar, se pare că putem avea o încredere intuitivă că probabilitatea dată nu trebuie să se modifice mult dacă satul are  $6 \times 365 = 2190$  de locuitori. Și totuși, această impresie este total greșită: în cazul când satul are  $5 \times 365 = 1825$  de locuitori probabilitatea menționată este 0,08, iar pentru  $6 \times 365 = 2190$  de locuitori probabilitatea devine 0,41. Calculele acestor probabilități nu sunt simple.

Mulți consideră, pe drept, că la aruncarea de mai multe ori a unei monede simetrice frecvența relativă a stemei este un număr aproximativ egal cu  $\frac{1}{2}$ . De aici unii trag concluzia „logică” că după apariția a 10 steme succesive apariția feței cu banul devine mai probabilă. Această părere are la bază o confuzie cauzată de nepriceperea de a aplica „legea mediilor”. Moneda nu este înzestrată cu memorie, este lipsită de memorie și nu poate să-și influențeze comportamentul. Este îndoielnic ca ea însăși să poată modifica probabilitatea stemei sau a banului. Renumitul specialist în teoria probabilităților W.Feller [5] dă următoarea explicație pentru aplicarea legii menționate. El afirmă că în cazul nostru legea mediilor se manifestă prin absorbire și nu prin compensare. Deci, dacă o serie de aruncări a început cu 10 steme, aceste 10 steme vor fi absorbite de frecvența relativă a stemei într-o serie de o mie de aruncări ale monedei, iar după un milion de aruncări efectul lor va fi imperceptibil.

Una din cauzele fenomenului de încredere în creșterea probabilităților este faptul că în unele probleme această creștere într-adevăr are loc. De exemplu, fie că dintr-o urnă ce conține 20 de bile albe și una neagră se extrage câte o bilă conform schemei fără întoarcere până este extrasă bila neagră. Probabilitatea ca bila neagră să apară la prima extragere, conform definiției clasice, este egală cu  $\frac{1}{21}$ . Să admitem că primele 10 bile extrase sunt albe. Atunci, la următoarea extragere (a 11-a) bila neagră apare cu probabilitatea  $\frac{1}{11}$ . Dacă albe sunt toate bilele din primele 20 de extrageri, atunci această probabilitate devine egală cu 1.

**Problema 6.** Problema lui Monty Hall, cunoscută ca „Paradoxul lui Monty Hall”, își trage denumirea de la pseudonimul actorului american Monty Hall (pe numele lui adevărat Maurice Halprin), care timp de treisprezece ani a prezentat o emisiune de jocuri televizate cu câștiguri substanțiale.

Problema este simplă. Presupunem că participați la un joc și vă aflați în fața a trei uși. În spatele uneia dintre uși se află o mașină, iar în spatele celorlalte două câte o capră. Sunteți rugați să alegeți una dintre uși și câștigați ceea ce este ascuns după ea. Fie că ați ales o ușă. Înainte de a o deschide prezentatorul deschide una dintre celelalte două uși și demonstrează că dincolo de ea se află o capră. După aceasta prezentatorul jocului vă întreabă dacă nu cumva doriți să schimbați decizia inițială și să alegeți o altă ușă. Ce veți face?

Dacă veți proceda conform intuiției, atunci veți considera că șansele sunt 50:50, adică orice alegere (a unei uși) oferă aceleași șanse. În realitate aveți de două ori mai multe șanse de câștig dacă schimbați opțiunea inițială și alegeți altă ușă.

Acest răspuns corect poate fi obținut astfel. Notăm ușile cu 1, 2, 3 și introducem evenimentele aleatoare  $A_i = \{\text{mașina se află în spatele ușii } i\}$ ,  $B_i = \{\text{prezentatorul deschide ușa } i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Presupunem că inițial ați ales ușa 1 și considerăm evenimentele aleatoare  $M_0 = \{\text{mașina este câștigată menținând alegerea inițială}\}$ ,  $M_1 = \{\text{mașina este câștigată schimbând alegerea inițială}\}$ .

Evident,  $M_1 = B_2 \cap A_3 \cup B_3 \cap A_2$  și, deci,

$$P(M_1) = P(B_2 \cap A_3) + P(B_3 \cap A_2) = P(A_3)P(B_2/A_3) + P(A_2)P(B_3/A_2) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Astfel, } P(M_1) = \frac{2}{3} \text{ și } P(M_0) = 1 - P(M_1) = \frac{1}{3}.$$

**Problema 7.** Considerăm 3 fișe. Pe ambele părți ale unei fișe scriem litera  $A$ , pe ambele părți ale alteia scriem litera  $B$ . Pe a treia fișă scriem  $A$  pe o parte și  $B$  pe altă parte. Introducem fișele într-o urnă, după care extragem la întâmplare o fișă și o așezăm pe masă. Presupunem că pe partea vizibilă (cea de deasupra) este scrisă litera  $A$ . Care este probabilitatea că pe partea cealaltă a fișei de asemenea este scrisă litera  $A$ ? „O doime” – în mod greșit ne sugerează intuiția. „Logica” este simplă. Dacă deasupra se află  $A$ , atunci rezultă că noi am extras una din fișele  $AA$  sau  $AB$  și ambele au aceeași probabilitate de a fi extrase.

Cauza de a fi induși în eroare nici pe departe nu este evidentă. Noi nu doar că am extras fișa la întâmplare, noi și pe masă am așezat-o (pe una din fețele ei) de asemenea la întâmplare. Răspunsul corect poate fi obținut în felul următor.

Mulțimea de evenimente elementare ale experimentului (extragerea unei fișe) este:

$$\Omega = \{(A_1, A_2), (A_2, A_1), (B_1, B_2), (B_2, B_1), (A_3, B_3), (B_3, A_3)\};$$

aici pe primul loc al fiecărei perechi se află litera de pe partea văzută a fișei, iar pe locul al doilea se află litera de pe fața nevăzută; indicii sunt introduși pentru a simplifica explicațiile. Introducem evenimentele aleatoare:

$$E_1 = \{\text{pe partea nevăzută se află litera } A \text{ (cu indice)}\},$$

$$E_2 = \{\text{pe partea vizibilă se află litera } A \text{ (cu indice)}\}$$

Probabilitatea care ne interesează este  $P(E_1/E_2)$  și ea se calculează cu ușurință:

$$P(E_1 / E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}.$$

### Concluzii

Firește, nu pentru orice problemă răspunsul obținut pe căi analitice poate fi stabilit prin raționamente intuitive. Și totuși, în legătură cu orice problemă de probabilitate este loc de discuții la nivel intuitiv despre experimentul aleator corespunzător, evenimentele legate de acesta și relațiile posibile dintre evenimente.

### Bibliografie:

1. POȘTARU, A. *Teoria probabilităților*. Chișinău: CEP USM, 2008. 366 p. ISBN 978-9975-70-478-8
2. POȘTARU, A., BENDERSCHI, O. *Teoria probabilităților. Exemple și probleme*. Chișinău: CEP USM, 2015. 257 p. ISBN 978-9975-71-614-7
3. WINKLER, P. *Probability and Intuition*. Mathematics Awareness Week, 1996. Disponibil: [www.mathaware.org/mam/96/resources/winkler.html](http://www.mathaware.org/mam/96/resources/winkler.html)
4. МОСТЕЛЛИЕР, Ф. *Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями*. Москва: Наука, 1975. 112 с.
5. ФЕЛЛИЕР, В. *Введение в теорию вероятностей и её приложения* (в 2-х томах). Москва: Мир, 1984. 528 с.

Prezentat la 01.10.2015

## CRITERII DE CONTINUITATE ȘI CALCULAREA NORMELOR OPERATORILOR INTEGRALI SINGULARI

*Vasile NEAGU*

*Universitatea de Stat din Moldova*

În prezenta lucrare sunt stabilite criteriile de continuitate pentru operatorii integrali singulari în diferite spații cu ponderi, fiind sistematizate și generalizate anumite rezultate în cazul în care conturul de integrare  $\Gamma$  este nemărginit și cu puncte unghiulare. Se arată că normele esențiale ale operatorilor singulari depind nu doar de spațiu, ci și de măsurile unghiurilor formate de conturul de integrare în punctele sale unghiulare.

**Cuvinte-cheie:** operator integral singular, operator noetherian, simbol.

### CRITERIA OF CONTINUITY AND CALCULATION OF NORMS FOR SINGULAR INTEGRAL OPERATORS

In this paper criteria of continuity for singular integral operators in different spaces with weights are established, some results when the contour of integration is unbounded and has angular points are systematized and generalized. It is shown that essential norms of singular operators depend not only on the space but also on the measures of the angles, formed by the contour of integration in its angular points.

**Keywords:** singular integral operator, noetherian operator, symbol.

Fie  $\Gamma$  un contur orientat în planul complex  $\mathcal{C}$  și  $S$  operatorul integral singular cu nucleu Cauchy

$$(S_{\Gamma}\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (t \in \Gamma). \quad (1)$$

Notăm prin  $L_p(\Gamma, \rho)$  mulțimea tuturor funcțiilor  $\varphi$  definite și măsurabile pe  $\Gamma$  care satisfac condiția

$$\int_{\Gamma} |\varphi(t)|^p \rho(t) |dt| < \infty, \quad (1 < p < \infty), \quad (2)$$

unde  $\rho(t)$  este o funcție măsurabilă și nenegativă. Dacă în această mulțime se definește norma așa cum urmează,

$$\|\varphi\| = \left( \int_{\Gamma} |\varphi(t)|^p \rho(t) |dt| \right)^{1/p},$$

atunci  $L_p(\Gamma, \rho)$  devine un spațiu liniar normat și complet.

În teoria ecuațiilor integrale singulare este bine cunoscută următoarea teoremă.

**Teorema 1.** Fie  $\Gamma$  un contur simplu de tip Leapunov pe porțiuni și

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^n |t - t_k|^{\beta_k}, \quad t_k \in \Gamma, \quad t_k \neq t_j \text{ dacă } k \neq j, \quad -1 < \beta_k < p - 1, \quad (3)$$

atunci operatorul  $S_{\Gamma}$  este mărginit în spațiul  $L_p(\Gamma, \rho)$ .

Pentru  $\Gamma$  de tip Leapunov această teoremă a fost demonstrată de către B.Hvedelidze, pentru  $\Gamma$  de tip Leapunov pe porțiuni – de către E.Gordadze, iar pentru  $\Gamma = (-\infty, \infty)$  și  $\rho(t) = |t|^{\beta}$  – de către M.Riesz, G.Hardy, J.Littwoold și K.Babenko.

În prezenta lucrare sunt demonstrate necesitățile condițiilor (3). Rezultatele obținute au permis să stabilim criteriile de continuitate pentru operatorii de forma  $H = \prod (t - t_k)^{\alpha_k} S \prod (t - t_k)^{-\alpha_k} I$ , care apar în studiul ecuațiilor integrale singulare cu translații pe axa reală. S-a demonstrat că acești operatori prezintă perturbații admisibile pentru ecuațiile integrale singulare cu coeficienți continui pe porțiuni. Această concluzie a fost făcută în rezultatul determinării, studiului și comparării simbolurilor operatorilor singulari cu ale celor



perturbați. Tot cu ajutorul simbolului s-a reușit și calculul normelor esențiale ale operatorilor  $S_\Gamma$ ,  $S_\Gamma, P_\Gamma = 1/2(I + S_\Gamma)$  și  $Q_\Gamma = I - P_\Gamma$ . Se arată că aceste mărimi depind nu doar de spațiu, ci și de mărimile unghiurilor formate de conturul de integrare în punctele sale unghiulare.

### I. Criterii de continuitate a operatorului $S_\Gamma$

Vom demonstra necesitatea condițiilor din teorema 1 despre continuitatea operatorului  $S$  în spațiul  $L_p(\Gamma, \rho)$ . În plus, vom studia și cazul în care conturul de integrare  $\Gamma$  este o curbă nemărginită, în particular  $\Gamma$  este axa reală  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ .

#### 1.1. Cazul conturului de tip Leapunov

**Teorema 1.1.** Fie  $\Gamma$  un contur simplu de tip Leapunov și

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^n |t - t_k|^{\beta_k}, \quad t_k \in \Gamma, \beta_k \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Operatorul  $S_\Gamma$  este mărginit în spațiul  $L_p(\Gamma, \rho)$  dacă și numai dacă sunt îndeplinite condițiile

$$-1 < \beta_k < p-1 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (1.2)$$

**Demonstrație.** Suficiența condițiilor (1.2) este demonstrată în lucrarea lui B.Hvedelidze [9]. Vom demonstra necesitatea acestor condiții. În primul rând să observăm că un operator  $A$  este mărginit în  $L_p(\Gamma, \rho)$

dacă și numai dacă operatorul  $\rho^{\frac{1}{p}} A \rho^{-\frac{1}{p}} I$  este mărginit în spațiul  $L_p(\Gamma)$ . În plus, are loc egalitatea

$$\|A\|_{p,\rho} = \left\| \rho^{\frac{1}{p}} A \rho^{-\frac{1}{p}} I \right\|_p,$$

unde prin  $\| \cdot \|_{p,\rho}$  și  $\| \cdot \|_p$  este notată norma în spațiul  $L_p(\Gamma)$  și, respectiv, în  $L_p(\Gamma, \rho)$ . Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \|A\|_{p,\rho} &= \sup_{\|\varphi\|_{p,\rho}=1} \|A\varphi\|_{p,\rho} = \sup_{\|\varphi \cdot \rho^{1/p}\|_p=1} \|A(\rho^{-1/p} \cdot \varphi \cdot \rho^{1/p})\|_{p,\rho} = \\ &= \sup_{\|\varphi \cdot \rho^{1/p}\|_p=1} \|\rho^{1/p} A(\rho^{-1/p} \cdot \varphi \cdot \rho^{1/p})\|_p = \|\rho^{1/p} A \rho^{-1/p} I\|_p. \end{aligned}$$

Fie operatorul  $S_\Gamma$  mărginit în spațiul  $L_p(\Gamma, \rho)$  cu ponderea de forma (1.1). Vom demonstra că numerele  $\beta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) verifică condițiile (1.2). Notăm cu  $R$  operatorul  $(R\varphi)(t) = t\varphi(t)$  care, evident, este mărginit în spațiul  $L_p(\Gamma, \rho)$ . Atunci, în baza observației de mai sus, operatorul

$$K = \pi i \rho^{\frac{1}{p}} (S_\Gamma R - R S_\Gamma) \rho^{-\frac{1}{p}} I$$

este mărginit în  $L_p(\Gamma)$ . Însă,

$$(K\varphi)(t) = \rho^{\frac{1}{p}}(t) \int_\Gamma \rho^{-\frac{1}{p}}(\tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

Din ultima egalitate rezultă că  $\rho^{\frac{1}{p}} \in L_p(\Gamma)$ . Din această egalitate și din teorema lui Riesz despre forma generală a funcționalei în spațiul  $L_p(\Gamma)$  rezultă că  $\rho^{-\frac{1}{p}} \in L_q(\Gamma)$ . Adică,

$$\int_\Gamma |\rho^{1/p}(t)|^p |dt| = \int_\Gamma \prod_{k=1}^n |t - t_k|^{\beta_k} |dt| < \infty \quad \text{și} \quad \int_\Gamma |\rho^{-1/p}(t)|^q |dt| = \int_\Gamma \prod_{k=1}^n |t - t_k|^{-\frac{\beta_k q}{p}} |dt| < \infty. \quad (1.3)$$

Din prima inegalitate din (1.3) obținem că  $\beta_k > -1$ , iar din a doua rezultă că

$$-\frac{\beta_k q}{p} = -\frac{\beta_k}{p-1} > -1.$$

Așadar,  $-1 < \beta_k < p-1$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) și teorema este demonstrată.

### 1.2. Cazul axei reale

Vom considera cazul în care conturul  $\Gamma$  este nemărginit. Vom începe cu cazul particular, însă foarte important, în care  $\Gamma$  este axa reală  $\mathbf{R}$ . În calitate de pondere vom considera funcția

$$\rho_0(x) = |x-i|^\beta \prod_{k=1}^n |x-x_k|^{\beta_k}, \quad (1.4)$$

unde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sunt puncte diferite din  $\mathbf{R}$ , iar  $\beta, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  sunt niște numere reale.

**Teorema 1.2. Operatorul**

$$(S\varphi)(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy,$$

este mărginit în spațiul  $L_p(\mathbf{R}, \rho_0)$  ( $1 < p < \infty$ ) dacă și numai dacă numerele  $\beta, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  satisfac condițiile

$$-1 < \beta_k < p-1 \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad -1 < \beta + \sum_{k=1}^n \beta_k < p-1. \quad (1.5)$$

**Demonstrație.** Fie  $\Gamma_0$  cercul unitate,

$$t_k = (x_k + i)(x_k - i)^{-1} \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad t_0 = 1, \quad \beta_0 = p-2 - \beta - \sum_{k=1}^n \beta_k \quad \text{și}$$

$$\rho(t) = \prod_{k=0}^n |t-t_k|^{\beta_k}. \quad (1.6)$$

Vom arăta că operatorul  $B$ , definit de egalitatea

$$(B\varphi)(t) = \frac{1}{t-1} \varphi\left(i \frac{t+1}{t-1}\right),$$

este liniar și mărginit din  $L_p(\mathbf{R}, \rho_0)$  în  $L_p(\Gamma_0, \rho)$ . Într-adevăr, fie  $\varphi \in L_p(\mathbf{R}, \rho_0)$ , atunci

$$\|B\varphi\|_{L_p(\Gamma_0, \rho)}^p = \int_{\Gamma_0} \left| \varphi\left(i \frac{t+1}{t-1}\right) \right|^p \rho_0(t) |t-t_0|^{-p} |dt| =$$

$$c_1 \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^p \prod_{k=1}^n \left| \frac{x+i}{x-i} - \frac{x_k+i}{x_k-i} \right|^{\beta_k} \left| \frac{x+i}{x-i} - 1 \right|^{\beta_0} \frac{dx}{|x-i|^2} = c_2 \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^p \rho_0(x) dx = c_2 \|\varphi\|_{L_p(\mathbf{R}, \rho_0)}^p, \quad (1.7)$$

unde  $c_1$  și  $c_2$  sunt niște constante. Operatorul  $B$  este inversabil. Se verifică ușor că

$$(B^{-1}\psi)(t) = \frac{2i}{x-i} \psi\left(\frac{x+i}{x-i}\right). \quad (1.8)$$

Fie  $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  orice funcție finită și derivabilă. Atunci

$$(B^{-1}S_0B\varphi)(x) = \frac{2}{\pi(x-i)} \int_{\Gamma_0} \frac{\varphi\left(i \frac{\tau+1}{\tau-1}\right)}{(\tau-1)\left(\tau - \frac{x+i}{x-i}\right)} d\tau = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy = (S_R\varphi)(x). \quad (1.9)$$

Remarcăm că funcția  $\varphi\left(i \frac{\tau+1}{\tau-1}\right)$  se anulează într-o vecinătate a punctului  $\tau = 1$ . Așadar,  $S = B^{-1}S_0B$  pe mulțimea funcțiilor finite și derivabile. Așa cum această mulțime este densă în  $L_p(\mathbf{R}, \rho_0)$ , rezultă că

egalitatea  $S = B^{-1}S_0B$  are loc pe tot spațiul  $L_p(\mathbb{R}, \rho_0)$  și din ea rezultă că operatorul  $S$  este mărginit în spațiul  $L_p(\mathbb{R}, \rho_0)$  dacă și numai dacă operatorul  $S_0$  este mărginit în  $L_p(\Gamma_0, \rho)$ . În baza teoremei 1.1 aceasta se întâmplă dacă și numai dacă sunt verificate condițiile

$$-1 < \beta_k < p-1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (1.10)$$

Relațiile (1.5) sunt echivalente cu (1.10). Teorema este demonstrată.

Din teorema demonstrată mai rezultă că operatorul  $S$  este mărginit în spațiul  $L_p(\Gamma, \rho_0)$ , unde  $\Gamma$  este o parte (un interval) a axei reale.

### 1.3. Cazul conturului compus

**Definiție.** Un contur  $\Gamma$ , format dintr-un număr finit de arce orientate  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ , care au un număr finit de puncte de intersecție, se numește compus [1]. Punctele de intersecție se numesc puncte singulare.

Dacă arcele  $\Gamma_j$  și  $\Gamma_k$  au un punct comun, vom presupune că curba  $\Gamma_j \cup \Gamma_k$  este de tip Leapunov sau că în acest punct tangentele la arce nu coincid. Ultima condiție înseamnă că conturul  $\Gamma$  are puncte *unghiulare*, însă fără puncte de *întoarcere*.

Fie  $\Gamma$  un contur compus. Conturul  $\Gamma$  poate fi reprezentat sub forma de reuniune a unui număr finit de arce  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  care satisfac următoarele condiții. Orice pereche de arce  $\Gamma_j$  și  $\Gamma_k$  au nu mai mult de un singur punct comun și acest punct nu este interior nici pentru  $\Gamma_j$  și nici pentru  $\Gamma_k$ . Dacă  $\Gamma_j \cup \Gamma_k$  nu este de tip Leapunov, atunci vom presupune că tangentele în punctul comun  $t_{jk} = \Gamma_j \cup \Gamma_k$  la  $\Gamma_j$  și  $\Gamma_k$  nu coincid. Ultima condiție exclude conturul cu arce  $\Gamma_j$  și  $\Gamma_k$  indicate în Figura 1 (cu puncte de *întoarcere*).

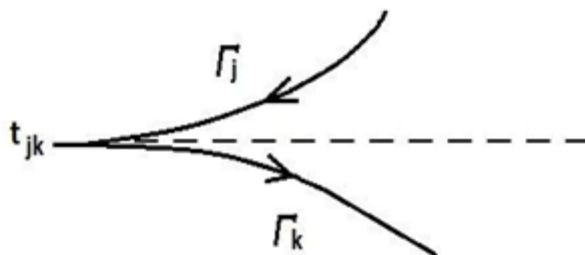


Fig.1.

De exemplu, pentru a reprezenta conturul  $\Gamma$  din Figura 2

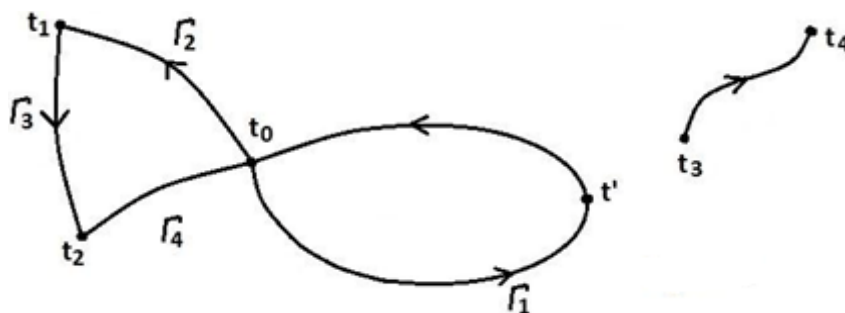


Fig.2.

în modul stabilit mai sus considerăm pe linia  $\Gamma_1$  un punct arbitrar  $t'$  și o reprezentăm în forma  $\Gamma_1 = \Gamma_1' \cup \Gamma_1''$ , unde  $\Gamma_1'$  este arcul care unește  $t_0$  cu  $t'$ , iar  $\Gamma_1''$  arcul care unește  $t'$  cu  $t_0$ . Atunci,

$$\Gamma = \Gamma_1' \cup \Gamma_1'' \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5.$$

Punctele singulare  $t', t_1, t_2$  le vom numi și puncte *unghiulare*,  $t_0$  – *nod*, iar  $t_3, t_4$  – *capetele* conturului  $\Gamma$ . Conturul compus poate avea mai multe noduri și capete.

**Teorema 1.3.** Fie  $\Gamma$  compus și

$$\rho(t) = \prod_{k=0}^n |t - t_k|^{\beta_k}.$$

Operatorul  $S_{\Gamma}$  este mărginit în spațiul  $L_p(\Gamma_0, \rho)$  dacă și numai dacă numerele  $\beta_k$  verifică condițiile

$$-1 < \beta_k < p-1 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

În prealabil vom demonstra următoarele leme.

**Lema 1.1.** Fie  $\Gamma$  o linie frântă, formată din două segmente  $\Gamma_1$  și  $\Gamma_2$  care au un punct comun  $z_0$ . Atunci operatorul

$$(S_{\Gamma_1 \Gamma_2} \varphi)(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (t \in \Gamma_2)$$

este liniar și mărginit din spațiul  $L_p(\Gamma_1, |t - z_0|^{\beta})$  în spațiul  $L_p(\Gamma_2, |t - z_0|^{\beta})$  dacă și numai dacă  $-1 < \beta < p-1$ .

**Demonstrație.** Fie  $-1 < \beta < p-1$ . Considerăm două funcții  $\varphi \in L_p(\Gamma_1, |t - z_0|^{\beta})$  și  $\psi \in L_q(\Gamma_2, |t - z_0|^{\beta(1-p)})$ , unde  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ . Vom nota prin  $\varphi$  și  $\psi$  prelungirea prin zero a acestor funcții pe razele ce ies din punctul  $z_0$  și conțin segmentele  $\Gamma_1$  și  $\Gamma_2$ . Fără a diminua generalitatea, putem considera că  $z_0 = 0$  și  $\Gamma_1 \subset [0, \infty]$  (Fig.3).

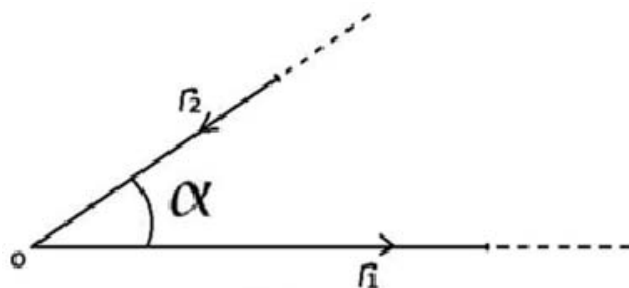


Fig.3.

Alegem un număr complex  $\sigma$ , astfel încât raza  $\{\sigma y\}$  ( $0 \leq y \leq \infty$ ) să conțină segmentul  $\Gamma_2$ . În cazul Figurii 3 avem  $\sigma = \omega e^{i\alpha}$  ( $\omega > 0$ ). Atunci

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_2} \overline{\psi}(t) dt \int_{\Gamma_1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \right| &\leq |\sigma| \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} \frac{|\psi(\sigma y)| |\varphi(x)|}{|x - \sigma y|} dx = |\sigma| \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} \frac{|\psi(\sigma y)| |\varphi(sy)|}{|s - \sigma|} ds = \\ &= |\sigma| \int_0^{\infty} \frac{ds}{|s - \sigma|} \int_0^{\infty} |\psi(\sigma y)| |\varphi(sy)| dy = |\sigma| \int_0^{\infty} \frac{ds}{|s - \sigma|} \int_0^{\infty} |\psi(\sigma y)| |y|^{\beta/p} |\varphi(sy)| |y|^{-\beta/p} dy \end{aligned}$$

Aplicăm inegalitatea lui Holder și obținem:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_2} \overline{\psi}(t) dt \int_{\Gamma_1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \right| &\leq |\sigma| \int_0^{\infty} \frac{ds}{|s - \sigma|} \left( \int_0^{\infty} |\psi(\sigma y)|^q |y|^{-\beta q/p} dy \right)^{1/q} \cdot \left( \int_0^{\infty} |\varphi(sy)|^p |y|^{\beta} dy \right)^{1/p} = \\ &= |\sigma|^{1+\beta/p} \int_0^{\infty} \frac{ds}{|s|^{1+\beta/p} |s - \sigma|} \left( \int_{\Gamma_2} |\psi(t)|^q |t|^{\beta(1-q)} |dt| \right)^{1/q} \cdot \left( \int_{\Gamma_1} |\varphi(t)|^p |t|^{\beta} |dt| \right)^{1/p} = c \cdot \|\psi\|_{L_q(\Gamma_2, |t|^{\beta(1-q)})} \|\varphi\|_{L_p(\Gamma_1, |t|^{\beta})}, \end{aligned}$$

unde

$$c = |\sigma|^{(1+\beta)/p} \int_0^{\infty} \frac{ds}{|s|^{(1+\beta)/p} |s - \sigma|}.$$

Din condițiile  $-1 < \beta < p-1$  rezultă că  $c < \infty$ .

Prin urmare,

$$\left| \int_{\Gamma_2} \overline{\psi}(t) \cdot (S_{\Gamma_1 \Gamma_2} \varphi)(t) dt \right| \leq c \cdot \|\psi\|_{L_q(\Gamma_2)} \cdot \|\varphi\|_{L_p(\Gamma_1)}.$$

Suficiența este demonstrată. Necesitatea se demonstrează ca și necesitatea teoremei 1.1. Lema este demonstrată.

**Lema 1.2.** Fie  $\Gamma_1$  și  $\Gamma_2$  au un singur punct comun  $z_0$  (care nu este punct interior nici pentru  $\Gamma_1$ , nici pentru  $\Gamma_2$ ) și tangentele la  $\Gamma_1$  și  $\Gamma_2$  în  $z_0$  nu coincid. Operatorul

$$(S_{\Gamma_1 \Gamma_2} \varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (t \in \Gamma_2)$$

ce acționează din  $L_p(\Gamma_1, |t - z_0|^\beta)$  în  $L_p(\Gamma_2, |t - z_0|^\beta)$  este mărginit dacă și numai dacă  $-1 < \beta < p-1$ .

**Demonstrație.** Fie  $\gamma_1$  și  $\gamma_2$  două segmente ale tangențelor la  $\Gamma_1$  și  $\Gamma_2$  în punctul  $z_0$  (Fig.4).

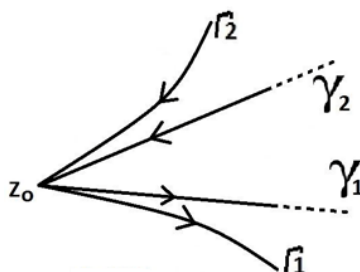


Fig.4.

Notăm cu  $t = \beta(z)$  funcția bijectivă a frânței  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$  pe conturul  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Așa cum  $\Gamma_1$  și  $\Gamma_2$  sunt de tip Leapunov, atunci funcția  $\beta$  poate fi aleasă astfel încât derivata ei  $\beta'$  să satisfacă condițiile lui Holder pe  $\gamma$ . Fie  $B_k : L_p(\Gamma_k, |t - z_0|^\beta) \rightarrow L_p(\gamma_k, |t - z_0|^\beta)$ , ( $k = 1, 2$ ), operatorul definit de relația  $(B_k \varphi)(z) = \varphi(\beta_k(z))$ . Nucleul operatorului integral  $K = B_2 S_{\Gamma_1 \Gamma_2} B_1^{-1} - S_{\gamma_1 \gamma_2}$  are forma

$$k(\xi, z) = \frac{1}{\pi i} \left( \frac{\beta'(\xi)}{\beta(\xi) - \beta(z)} - \frac{1}{\xi - z} \right) \quad (z \in \gamma_2, \xi \in \gamma_1)$$

și are singularitate slabă. Prin urmare, operatorul  $K$  este compact din  $L_p(\gamma_1, |t - z_0|^\beta)$  în  $L_p(\gamma_2, |t - z_0|^\beta)$  [1].

Atunci, aplicând lema 1.1, continuitatea operatorului  $S_{\Gamma_1 \Gamma_2}$  rezultă din egalitatea

$$S_{\Gamma_1 \Gamma_2} = B_2^{-1} (K + S_{\gamma_1 \gamma_2}) B_1, \quad (1.11)$$

Lema este demonstrată.

**Demonstrația teoremei.** Descompunem conturul compus  $\Gamma$  în reuniune de arce simple  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  care satisfac condițiile enumerate mai sus. Vom demonstra că operatorul

$$(S_{\Gamma_k \Gamma_j} \varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (t \in \Gamma_k)$$

este mărginit din  $L_p(\Gamma_j, \rho)$  în  $L_p(\Gamma_k, \rho)$ .

Dacă  $j = k$ , atunci continuitatea operatorului  $S_{\Gamma_k \Gamma_j}$  rezultă din teorema lui B.Hvedelidze. Dacă  $\Gamma_j$  și  $\Gamma_k$  au un punct comun și arcul  $\Gamma_{jk} = \Gamma_j \cup \Gamma_k$  nu este de tip Leapunov, adică tangentele la  $\Gamma_j$  și  $\Gamma_k$  în punctul lor comun nu coincid, atunci în baza lemei 1.2 operatorul  $S_{\Gamma_k \Gamma_j}$  este mărginit. Fie  $\Gamma_{jk}$  de tip Leapunov,

atunci continuitatea lui  $S_{\Gamma_k \Gamma_j}$  în spațiul  $L_p(\Gamma_{jk}, \rho)$  de asemenea rezultă din teorema lui B.Hvedelidze. Fie  $\varphi \in L_p(\Gamma_j, \rho)$ . Notăm prin  $\tilde{\varphi} \in L_p(\Gamma_{jk}, \rho)$  funcția

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in \Gamma_j \\ 0, & t \in \Gamma_k \end{cases}.$$

Evident  $\|\tilde{\varphi}\|_{L_p(\Gamma, \rho)} = \|\tilde{\varphi}\|_{L_p(\Gamma_j, \rho)}$ . Atunci

$$\|S_{\Gamma_j \Gamma_k} \varphi\|_{L_p(\Gamma_k, \rho)} \leq \|S_{\Gamma_j \Gamma_k} \tilde{\varphi}\|_{L_p(\Gamma_{jk}, \rho)} \leq \|S_{\Gamma_j \Gamma_k}\| \|\varphi\|_{L_p(\Gamma_j, \rho)}.$$

Așadar, și în acest caz  $S_{\Gamma_j \Gamma_k}$  este mărginit din  $L_p(\Gamma_j, \rho)$  în spațiul  $L_p(\Gamma_k, \rho)$ . În sfârșit, dacă  $\Gamma_j \cap \Gamma_k = \emptyset$ , atunci nucleul operatorului  $S_{\Gamma_j \Gamma_k}$  este o funcție continuă și, prin urmare, el este mărginit. Fie  $\chi_j$  funcția caracteristică a arcului  $\Gamma_j$ , atunci din cele demonstrate mai sus avem:

$$\|\chi_j S_{\Gamma} \chi_k \varphi\|_{L_p(\Gamma, \rho)} \leq \|S_{\Gamma_j \Gamma_k}\| \|\varphi\|_{L_p(\Gamma_j, \rho)}.$$

Deci, operatorii  $\chi_j S_{\Gamma} \chi_k I$  ( $j, k = 1, 2, \dots, n$ ) sunt mărginiți în  $L_p(\Gamma, \rho)$ . Așa cum

$$S_{\Gamma} = \sum_{j,k=1}^n \chi_j S_{\Gamma} \chi_k I,$$

atunci  $S_{\Gamma}$  este mărginit în spațiul  $L_p(\Gamma, \rho)$ . Teorema este demonstrată.

#### 1.4. Cazul conturului admisibil

Considerăm cazul mai general, în care  $\Gamma$  este un contur format dintr-un număr finit de linii  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ , mărginite și nemărginite. Aplicația  $t = (z - z_0)^{-1}$  ( $z_0 \notin \Gamma$ ) transformă fiecare linie  $\Gamma_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) într-o linie mărginită  $\gamma_j$ . Notăm  $\gamma = \bigcup_{j=1}^n \gamma_j$ . Vom numi conturul  $\Gamma$  **admisibil** dacă  $\gamma$  este un contur **compus**.

Fără a restrânge generalitatea, presupunem că  $0 \notin \Gamma$  și  $z_0 = 0$ .

**Teorema 1.4.** Fie  $\Gamma$  un contur admisibil,  $z_1, z_2, \dots, z_n$  puncte diferite pe  $\Gamma$  și

$$\rho_0(z) = |z|^\beta \prod_{k=1}^n |z - z_k|^{\beta_k}.$$

Operatorul  $S_{\Gamma}$  este mărginit în spațiul  $L_p(\Gamma, \rho_0)$  dacă și numai dacă numerele  $\beta_k$  verifică condițiile

$$-1 < \beta_k < p-1 \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad -1 < \beta + \sum_{k=1}^n \beta_k < p-1. \quad (1.11)$$

**Demonstrație.** Fie  $\gamma$  imaginea lui  $\Gamma$  în rezultatul aplicației  $t = z^{-1}$ . Notăm cu

$$t_k = z_k^{-1} \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad t_0 = 0, \quad \beta_0 = p-2 - \beta - \sum_{k=1}^n \beta_k, \quad \rho(t) = \prod_{k=0}^n |t - t_k|^{\beta_k}.$$

Se arată fără dificultăți că operatorul

$$(B\varphi)(t) = \frac{1}{t} \varphi\left(\frac{1}{t}\right) \quad (t \in \gamma)$$

este liniar, mărginit și inversabil din  $L_p(\Gamma, \rho_0)$  în  $L_p(\gamma, \rho)$ . Calcule simple arată că  $S_{\Gamma} = B^{-1} S_{\gamma} B$ , apoi raționamentele continuă ca în teorema 1.2. Teorema este demonstrată.



## II. Continuitatea și simbolul operatorilor de forma $(t-t_k)^{\delta_k} S_\Gamma (t-t_k)^{-\delta_k} I$

Fie  $t_1, t_2, \dots, t_n$  puncte fixe și distincte pe conturul închis  $\Gamma$  și  $L_p(\Gamma, \rho)$  spațiul cu ponderea (1.1) și cu condițiile (1.2). Notăm cu  $\Omega$  mulțimea funcțiilor de forma  $h(t) = \prod_{k=1}^n (t-t_k)^{\delta_k}$ , unde  $\delta_k$  sunt numere reale, iar cu  $CP(\Gamma)$  – mulțimea tuturor funcțiilor definite pe  $\Gamma$  și continue pe porțiuni.

**Teorema 2.1.** Operatorul  $h(t)S_\Gamma h^{-1}(t)I$  este mărginit în  $L_p(\Gamma, \rho)$  dacă și numai dacă numerele  $\delta_k$  verifică condițiile

$$-\frac{1+\beta_k}{p} < \delta_k < 1 - \frac{1+\beta_k}{p} \quad (k=1,2,\dots,n). \quad (2.1)$$

**Demonstrație.** Din observația la teorema 1.1 rezultă că operatorul  $h(t)S_\Gamma h^{-1}(t)I$  este mărginit în spațiul  $L_p(\Gamma, \rho)$  dacă și numai dacă este mărginit operatorul  $S_\Gamma$  în spațiul  $L_p(\Gamma, \rho_1)$ , unde

$$\rho_1(t) = |h(t)|^p \cdot \rho(t) = \prod_{k=1}^n |t-t_k|^{\beta_k + p\delta_k}.$$

Astfel, condițiile (2.1) decurg din condițiile (1.2). Teorema este demonstrată.

Vom presupune în continuare că numerele  $\delta_k$  din definiția funcțiilor din mulțimea  $\Omega$  verifică condițiile (2.1). Prin urmare, operatorul  $H = h(t)S_\Gamma h^{-1}(t)I$  este liniar și mărginit în spațiul  $L_p(\Gamma, \rho)$ . Asociem operatorului  $H$  matricea de funcții  $H(t, \mu)$  ( $t \in \Gamma, 0 \leq \mu \leq 1$ ) (a se vedea [2]), definită după cum urmează:

$$H(t, \mu) = \begin{vmatrix} 1 & u(t, \mu) \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad (2.2)$$

unde

$$u(t, \mu) = \begin{cases} \frac{4v(t_k, \mu) \cos(\pi\delta_k) \exp(\pi i \delta_k)}{2l(t_k, \mu) \cos(\pi\delta_k) \exp(\pi i \delta_k) + 1}, & \text{dacă } t = t_k \quad (k=1,2,\dots,n), \\ 0, & \text{dacă } t \in \Gamma \setminus t_k \quad (k=1,2,\dots,n) \end{cases}$$

$$\theta(t) = \begin{cases} \pi - 2\pi(1 + \beta_k)/p, & \text{dacă } t = t_k \quad (k=1,2,\dots,n) \\ \pi - 2\pi/p, & \text{dacă } t \in \Gamma \setminus t_k \quad (k=1,2,\dots,n) \end{cases}$$

$$l(t, \mu) = \begin{cases} \frac{\sin \theta \mu \cdot \exp(i\theta \mu)}{\sin \theta \cdot \exp(i\theta)}, & \text{dacă } \theta \neq 0, \\ \mu, & \text{dacă } \theta = 0 \end{cases}$$

și  $v(t, \mu) = \sqrt{l(t, \mu)(1-l(t, \mu))}$ .

**Teorema 2.2.** Fie

$$A = a_0(t) + \sum_{j=1}^m a_j(t) h_j(t) S_\Gamma h_j^{-1}(t) b_j(t) I, \quad (2.3)$$

unde  $a_j, b_j \in CP(\Gamma)$ ,  $h_j \in \Omega$ . Atunci, operatorul  $A$  aparține algebrei  $\Sigma(\Gamma, \rho)$  generate de operatorii integrali singulari cu coeficienți din  $CP(\Gamma)$  și simbolul său are forma

$$A(t, \mu) = a_0(t, \mu) + \sum_{j=1}^m a_j(t, \mu) H_j(t, \mu) b_j(t, \mu), \quad (2.4)$$

unde  $a_j(t, \mu)$  și  $b_j(t, \mu)$  sunt simbolurile operatorilor  $a_j(t)I$  și  $b_j(t)I$ , iar  $H_j(t, \mu)$  sunt matrice de funcții de forma (2.2), care corespund operatorilor  $H_j = h_j(t)S_\Gamma h_j^{-1}(t)I$ .

Amintim că simbolul  $A_0(t, \mu)$  al operatorului  $A_0 = aP + bQ$ , unde  $a, b \in CP(\Gamma)$ ,  $P = 1/2(I + S)$  și  $Q = I - P$ , se definește (a se vedea [2]) în felul următor:

$$A_0(t, \mu) = \begin{vmatrix} l(t, \mu)a(t+0) + (1-l(t, \mu))a(t) & v(t, \mu)(b(t+0) - b(t)) \\ v(t, \mu)(a(t+0) - a(t)) & l(t, \mu)b(t) + (1-l(t, \mu))b(t+0) \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

**Demonstrația teoremei 2.2.** Este evident că teorema va fi demonstrată dacă o vom demonstra pentru operatorul  $H = h(t)S_\Gamma h^{-1}(t)I$ , unde  $h(t) \in \Omega$ . Fie  $h(t) = \prod_{k=1}^n (t - t_k)^{\delta_k}$ , unde numerele  $\delta_k$  verifică condițiile (2.1). Notăm prin  $f_k(t)$  funcția  $f_k(t) = t^{-\delta_k}$ , continuă (se presupune că  $0 \in F^+$ ) în orice punct de pe conturul  $\Gamma$  cu excepția, posibil, în punctul  $t_k$ , iar prin  $f(t)$  notăm funcția  $f(t) = \prod_{k=1}^n f_k(t)$ . Prin calcule directe se verifică următoarea egalitate:

$[h(t)P(h(t)f(t))^{-1}I + Q](PfP + Q)\varphi = (PfP + Q)[h(t)P(h(t)f(t))^{-1}I + Q]\varphi = \varphi$  valabilă pentru orice funcție  $\varphi$ , care verifică condițiile lui Holder pe conturul  $\Gamma$ . Așa cum operatorul  $h(t)Ph^{-1}(t)I$  este mărginit în spațiul  $L_p(\Gamma, \rho)$ , atunci  $hP(hf)^{-1}I + Q = (PfP + Q)^{-1}$ . De aici rezultă că  $PhPh^{-1}I = P(PfP + Q)^{-1}fI$ . Este adevărată și egalitatea  $PhPh^{-1}I = hPh^{-1}I$  și, prin urmare,  $hPh^{-1}I = P(PfP + Q)^{-1}fI$ . Astfel,

$$H = 2P(PfP + Q)^{-1}fI - I. \quad (2.6)$$

Din această egalitate rezultă că operatorul  $H = h(t)S_\Gamma h^{-1}(t)I$  aparține algebrei  $\sum(\Gamma, \rho)$ . Din (2.6), prin calcule directe (la detalii nu ne oprim), ne convingem că simbolul operatorului  $H$  reprezintă matricea de funcții

$$H(t, \mu) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{2v(t, \mu)(f(t+0) - f(t))}{l(t, \mu)(f(t+0) - f(t)) + 1} \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Ținând cont de faptul că  $(f(t_k+0)/f(t_k) = \exp(2\pi i \delta_k))$ , ușor se arată că simbolul operatorului  $H$  coincide cu relația (2.2). Teorema este demonstrată.

Din teorema demonstrată (2.2) rezultă mai multe concluzii, în particular din ea urmează

**Teorema 2.3.** Operatorul  $A$ , definit de egalitatea (2.3), este noetherian în spațiul  $L_p(\Gamma, \rho)$  dacă și numai dacă simbolul său  $A(t, \mu)$ , definit de egalitatea (2.4), îndeplinește condiția

$$\det A(t, \mu) \neq 0 \quad (t \in \Gamma, 0 \leq \mu \leq 1). \quad (2.6)$$

Dacă condiția (2.6) este verificată și  $A(t, \mu) = \|\delta_{ij}(t, \mu)\|_{i,j=1}^2$ , atunci

$$\text{Ind} A = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{\det A(t, \mu)}{\delta_{22}(t, 0) \delta_{22}(t, 1)} \right\}_{(t, \mu) \in \Gamma \times [0, 1]}.$$

### III. Inversarea operatorului $S^+$

În spațiul  $L_p(\mathbb{R}, |t|^\beta)$ ,  $(-1 < \beta < p-1)$ , considerăm operatorul integral singular  $A = cI + dS$ , unde

$$(S\varphi)(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy, \quad c(t) = \begin{cases} c_1 & \text{pentru } -\infty < t < 0, \\ c_2 & \text{pentru } 0 < t < \infty, \end{cases}$$

$$d(t) = \begin{cases} d_1 & \text{pentru } -\infty < t < 0, \\ d_2 & \text{pentru } 0 < t < \infty, \end{cases} \quad (c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{C}).$$

Utilizând rezultatele din [1], deducem că operatorul  $A$  este inversabil în  $L_p(\mathbb{R}, |t|^\beta)$  dacă și numai dacă arcul (sau segmentul)

$$l((c_2 + d_2)(c_1 - d_1), (c_2 - d_2)(c_1 + d_1); 2\pi(1 + \beta) / p)$$

nu trece prin punctul  $z = 0$ . În acest paragraf se expune o metodă [1] de determinare a inversului operatorului  $A$  și, implicit, a operatorului  $S^+$ ,

$$(S^+\varphi)(x) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy \quad (y \in \mathbb{R}^+),$$

bazată pe un șir de transformări funcționale.

Fie  $v: L_p(\mathbb{R}, |t|^\beta) \rightarrow L_p(\mathbb{R}^+, t^\beta) \dot{+} L_p(\mathbb{R}^+, t^\beta)$  aplicația definită de egalitatea  $(v\varphi)(t) = (\varphi(t), \varphi(-t))$  ( $t > 0$ ). Operatorul  $vAv^{-1}$ , care acționează în spațiul  $L_p^2(\mathbb{R}^+, t^\beta)$ , poate fi exprimat sub formă de matrice de ordinul doi:

$$vAv^{-1} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix},$$

unde  $A_{jk} \in L(L_p(\mathbb{R}^+, t^\beta))$ . Să determinăm operatorii  $A_{jk}$ . Fie  $\varphi \in L_p(\mathbb{R}, |t|^\beta)$  și  $A\varphi = \psi$ . Ultima egalitate poate fi scrisă sub forma

$$\begin{aligned} c_2\varphi(t) + \frac{d_2}{\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{d_2}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau &= \psi(t) \quad (t > 0), \\ c_1\varphi(-t) + \frac{d_1}{\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{\varphi(\tau)}{\tau+t} d\tau + \frac{d_1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau+t} d\tau &= \psi(-t) \quad (t > 0), \end{aligned}$$

sau

$$\begin{cases} c_2\varphi_1 + d_2S^+\varphi_1 - d_2N\varphi_2 = \psi_1 & (t > 0), \\ c_1N\varphi_1 + d_1\varphi_2 - d_1S^+\varphi_2 = \psi_2 & (t > 0), \end{cases}$$

unde  $\varphi_1 = \varphi(t)$ ,  $\varphi_2 = \varphi(-t)$  ( $t > 0$ ),

$$(S^+f)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x-t} dx \quad (0 \leq t \leq \infty), \quad (Nf)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x+t} dx \quad (0 < t < \infty).$$

Astfel,

$$vAv^{-1} = \begin{vmatrix} c_2I + d_2S^+ & -d_2N \\ d_1N & c_1I - d_1S^+ \end{vmatrix}. \quad (3.1)$$

Notăm prin  $W_\gamma$  operatorul ce acționează izometric din spațiul  $L_p(\mathbb{R}^+, t^\beta)$  în spațiul  $L_p(\mathbb{R}^+, t^{-1})$  și definit prin egalitatea

$$(W_\gamma h)(t) = t^\gamma h(t) \quad (\gamma = (1 + \beta) / p).$$

Atunci

$$(W_\lambda S^+ W_\gamma^{-1} \varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)t^\gamma}{(x-t)x^\gamma} dx = \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \varphi(x) \frac{(tx^{-1})^\gamma}{1-tx^{-1}} \frac{dx}{x} \quad (3.2)$$

și

$$(W_\lambda N W_\gamma^{-1} \varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \varphi(x) \frac{(tx^{-1})^\gamma}{1+tx^{-1}} \frac{dx}{x}. \quad (3.3)$$

Semiaxa pozitivă  $\mathbb{R}^+$  o vom considera ca un grup abelian (în raport cu înmulțirea) cu măsura lui Haar  $dx/x$ . Atunci integralele din partea dreaptă a egalităților (3.2) și (3.3) reprezintă convoluții:

$$(W_\lambda S W_\gamma^{-1} \varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \frac{t^\gamma}{1-t} * \varphi(t), \quad (W_\lambda N W_\gamma^{-1} \varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \frac{t^\gamma}{1+t} * \varphi(t).$$

Fie  $F$  transformata lui Fourier pe grupul  $\mathbf{R}^+$ ,

$$(F\varphi)(\xi) = \int_0^{\infty} \varphi(t) t^{-i\xi} \frac{dt}{t} \quad (-\infty < \xi < \infty).$$

Notăm cu  $s^+(\xi)$  și  $n(\xi)$  transformatele Fourier ale funcțiilor  $\frac{1}{\pi i} \frac{t^\gamma}{1-t}$  și, respectiv,  $\frac{1}{\pi i} \frac{t^\gamma}{1+t}$ , iar

$M = FW_\gamma \nu$ . Atunci operatorul  $MAM^{-1}$  reprezintă un operator de multiplicare la matricea de funcții

$$\begin{vmatrix} c_2 + d_2 s^+(\xi) & -d_2 n(\xi) \\ d_1 n(\xi) & c_1 - d_1 s^+(\xi) \end{vmatrix}.$$

Determinăm funcțiile  $n(\xi)$  și  $s^+(\xi)$ :

$$n(\xi) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{t^{\gamma-i\xi-1}}{1+t} dt = \frac{2e^{\pi(\xi+i\gamma)}}{e^{2\pi(\xi+i\gamma)} - 1},$$

Un calcul direct ne dă

$$s^+(\xi) = \frac{e^{2\pi(\xi+i\gamma)} + 1}{e^{2\pi(\xi+i\gamma)} - 1}. \quad (3.4)$$

Această formulă poate fi obținută și în felul următor. Deoarece  $S^2 = I$  și

$$MSM^{-1} = \begin{vmatrix} s^+(\xi) & -n(\xi) \\ n(\xi) & -s^+(\xi) \end{vmatrix},$$

atunci

$$\begin{vmatrix} s^2 - n^2 & 0 \\ 0 & s^2 - n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \text{ prin urmare } s^2(\xi) = 1 + n^2(\xi). \quad (3.5)$$

În plus, cunoaștem că spectrul operatorului  $S^+$  în spațiul  $L_p(\mathbf{R}^+, t^\beta)$  (a se vedea [1]) coincide cu arcul  $l(-1, 1; 2\pi\gamma)$ . Așa cum mulțimea valorilor funcției  $S^+(\xi)$  se conține în spectrul operatorului  $S^+$ , urmează

$$Im s^+(\xi) > 0 \text{ pentru } \gamma > 1/2; \quad Im s^+(\xi) < 0 \text{ pentru } \gamma < 1/2. \quad (3.6)$$

Condițiile (3.5) și (3.6) determină în mod univoc funcția  $S^+(\xi)$ . Notăm  $s^+(\xi)$  prin  $\zeta$ , atunci  $n(\xi) = \sqrt{\zeta^2 - 1}$ , unde prin  $\sqrt{\zeta^2 - 1}$  este notată ramura univocă, care capătă valoarea  $1/i \sin \pi\gamma$  în punctul  $\zeta = -ictg(\pi\gamma/2)$ . Astfel, operatorul  $MAM^{-1}$  reprezintă un operator de multiplicare la matricea de funcții

$$A(\zeta) = \begin{vmatrix} c_2 + d_2 \zeta & -d_2 \sqrt{\zeta^2 - 1} \\ d_1 \sqrt{\zeta^2 - 1} & c_1 - d_1 \zeta \end{vmatrix},$$

unde variabila  $\zeta = S^+(\xi)$  parcurge arcul  $l(-1, 1; 2\pi\gamma)$ .

Vom analiza următorul exemplu. În [1] a fost arătat că operatorul  $S^+$  este inversabil în spațiul  $L_p(\mathbf{R}^+)$  ( $1 < p < \infty$ ) dacă și numai dacă  $p \neq 2$ . Să determinăm inversul operatorului  $S^+$ . Fie  $M_0 = FW_{1/p}$ , unde  $F$  și  $W_{1/p}$  sunt operatorii definiți mai sus,  $\varphi \in L_p(\mathbf{R}^+)$ ,  $\psi = S^+ \varphi$  și  $\hat{\varphi} = M_0 \varphi$ . Atunci  $M_0 S^+ M_0^{-1} \varphi = \hat{\psi}$  și, în baza celor demonstrate mai sus, avem  $s^+(\xi) \hat{\varphi}(\xi) = \hat{\psi}(\xi)$ . Așadar,

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{e^{2\pi(\xi+i\gamma)} + 1}{e^{2\pi(\xi+i\gamma)} - 1} \hat{\varphi}(\xi),$$

unde  $\gamma = 1/p$ . Egalitatea (2.4) a fost obținută pentru  $0 < \gamma < 1$ . Ținând cont de această condiție, transcriem funcția  $\hat{\psi}(\xi)$  în felul următor:

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{e^{2\pi(\xi+i\gamma-i/2)} + 1}{e^{2\pi(\xi+i\gamma-i/2)} - 1} \hat{\phi}(\xi), \text{ pentru } p > 2$$

și

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{e^{2\pi(\xi+i\gamma+i/2)} + 1}{e^{2\pi(\xi+i\gamma+i/2)} - 1} \hat{\phi}(\xi), \text{ pentru } p < 2.$$

Efectuăm transformarea inversă a lui Fourier, ținând cont de faptul că  $(W_{1/p}f)(t) = f(t)t^{1/p}$ . Fie  $2 < p < \infty$ , atunci

$$t^{1/p}\psi(t) = \int_0^{\infty} \varphi(\tau) \tau^{1/p} \frac{(t\tau^{-1})^{1/p-1/2}}{1-t\tau^{-1}} \frac{d\tau}{\tau},$$

prin urmare,

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{\tau}{t}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau.$$

De aici rezultă că pentru  $p > 2$  avem

$$((S^+)^{-1}\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{\tau}{t}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau. \quad (3.7)$$

Pentru  $1 < p < 2$ , în mod similar, obținem:

$$((S^+)^{-1}\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{t}{\tau}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau. \quad (3.8)$$

**Observație.** Operatorul definit de partea dreaptă a egalității (3.7) este inversul operatorului  $S^+$  și în spațiul  $L_\rho(\mathbb{R}^+, t^\beta)$  pentru  $2(1+\beta) < p$ , iar operatorul definit de partea dreaptă a relației (3.8) este inversul lui  $S^+$  pentru  $2(1+\beta) > p$ . Pentru  $2(1+\beta) = p$  operatorul  $S^+$  nu este inversabil. Aceasta rezultă din teorema 1.4, deoarece pentru  $2(1+\beta) = p$ ,  $\beta = \frac{p}{2} - 1$ , operatorii  $t^{\pm 1/2} S t^{\mp 1/2} I$  nu sunt mărginiți în  $L_\rho(\mathbb{R}^+, t^\beta)$ .

#### IV. Calcularea normelor operatorilor singulari $P$ , $Q$ și $S$ în cazul conturului de tip Leapunov

În [1] a fost demonstrat că norma  $\|S\|$  a operatorului integral singular

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau \quad (\Gamma_0 = \{t : |t|=1\}, t \in \Gamma_0)$$

este egală cu  $\nu(p)$ , unde

$$\nu(p) = \begin{cases} \operatorname{ctg} \pi / 2p, & \text{pentru } p = 2^n, \\ \operatorname{tg} \pi / 2p, & \text{pentru } p = \frac{2^n}{2^n - 1}. \end{cases}$$

După publicarea acestor rezultate au apărut un șir de lucrări (a se vedea bibliografia din [1]), în care au fost evaluate și calculate normele operatorilor singulari în diferite spații. În [4] a fost calculată norma operatorului

$$(C\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(y) \operatorname{ctg} \frac{y-t}{2} dy.$$

S-a arătat că și norma (în spațiul  $L_p(0,2\pi)$ ) acestui operator verifică egalitatea  $\|C\| = \nu(p)$ . Acest rezultat, la rândul său, a permis să fie demonstrat că egalitatea  $\|S\| = \nu(p)$  are loc pentru orice  $p \in (1, \infty)$ . Cazul în care conturul de integrare are puncte unghiulare a fost considerat în [6], iar cazul conturului cu puncte de autointersecție – în [7]. S-a stabilit că în aceste cazuri are loc inegalitatea  $\|S\| > \nu(p)$  și că norma  $\|S\|$  mai depinde și de mărimea unghiurilor formate de contur în punctele sale unghiulare.

În acest paragraf sunt calculate normele operatorilor de proiecție  $P = \frac{1}{2}(I + S)$  și  $Q = I - P$  în spațiile  $L_p(\Gamma_0)$  ( $1 < p < \infty$ ), precum și normele esențiale ale acestor operatori pentru orice contur de tip Leapunov. Menționăm că evaluările inferioare pentru aceste norme au fost stabilite în [1,2] și tot acolo a fost formulată ipoteza că aceste evaluări sunt exacte.

Pentru început vom demonstra următoarea teoremă.

**Teorema 4.1.** Fie  $f(t) = \sum_{k=-n}^n f_k t^k$  un polinom trigonometric cu coeficienții  $f_k \in \mathbb{C}$  care verifică condițiile  $f_{-k} = \overline{f_k}$ . Atunci norma funcției

$$h(t) = 2 \sum_{k=-n}^n f_k t^k - f_0 \quad (4.1)$$

în spațiul  $L_p(\Gamma_0)$  ( $1 < p < 2$ ) admite evaluarea

$$\|h\| \leq \frac{2}{\sin \pi/p} \|f\|.$$

Pentru a demonstra această teoremă vom avea nevoie de următoarele două leme:

**Lema 4.1.** Pentru  $|x| < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < y < \pi$  și  $1 < p \leq 2$  are loc relația

$$\frac{2^p \cos^p x}{\sin^p \pi/p} - \alpha(p) \sin py - \beta(p) \cos px \geq 1, \quad (4.2)$$

$$\text{unde } \alpha(p) = \frac{1}{\sin \pi/2p} - 1 \quad \text{și} \quad \beta(p) = \frac{1}{\sin^{p-1} \pi/2p \cos \pi/2p}.$$

**Demonstrație.** În dreptunghiul  $D = \left\{ (x, y) : |x| \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \pi \right\}$  vom cerceta la extremum funcția

$$F(x, y) = \frac{2^p \cos^p x}{\sin^p \pi/p} - \alpha(p) \sin py - \beta(p) \cos px, \quad 0 \leq y \leq \pi,$$

Obținem că în punctul  $x = y = \frac{\pi}{2p}$  funcția  $F(x, y)$  are un minim. Așa cum  $F\left(\frac{\pi}{2p}, \frac{\pi}{2p}\right) = 1$ , rezultă că  $F(x, y) \geq 1$  pentru orice  $x$  și  $y$  din dreptunghiul  $D$ . Astfel, inegalitatea (4.2) este demonstrată.

Amintim că o funcție reală  $u$  continuă într-un domeniu  $G$  se numește subarmonică (a se vedea [8]) dacă pentru orice cerc închis  $C \subset G$  cu centrul în punctul  $z_0$  și cu raza  $r$  are loc relația

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \quad (4.3)$$

Se știe (a se vedea [8]) că  $u$  este funcție subarmonică dacă și numai dacă pentru orice punct  $z \in G$  relația (4.3) este îndeplinită pentru  $r$  destul de mici.



**Lema 4.2.** Funcțiile  $g_1, g_2: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , definite de relațiile  $g_1(z) = |z|^p \cos(p\alpha_1(z))$ ,  $g_2(z) = |z|^p \sin(p\alpha_2(z))$ , unde

$$\alpha_1(x+iy) = \arctg y/|x|, \alpha_2(x+iy) = \arctg x/|y|, p \in (1,2),$$

sunt funcții subarmonice în  $\mathbb{C}$ .

**Demonstrație.** Proprietatea că funcția  $g_1$  este subarmonică poate fi obținută din [4]. Vom demonstra că funcția  $g_2$  este subarmonică în  $\mathbb{C}$ ; vom verifica că în orice punct  $z \in \mathbb{C}$  funcția  $g_2$  îndeplinește condiția (4.3). Observăm că funcția  $g_2$  coincide în semiplanul de sus  $\text{Im } z \geq 0$  cu funcția armonică  $\text{Im } z^p$  ( $0 < \arg z < \pi$ ), iar în semiplanul de jos cu funcția armonică  $\text{Im}(-z)^p$  ( $-\pi < \arg z < 0$ ). Prin urmare, pentru orice  $z$ ,  $\text{Im } z \neq 0$ , și pentru  $r$  destul de mici relația (4.3) este verificată. Fie  $z = 0$ , atunci pentru orice număr pozitiv  $r$  vom avea

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_2(re^{i\varphi}) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} r^p \sin(p\varphi) d\varphi = \frac{r^p}{p\pi} (1 - \cos p\pi) \geq 0 = g_2(0).$$

Deci, relația (4.3) este verificată și pentru  $z = 0$ .

A mai rămas să considerăm punctele  $z = x$ , unde  $x$  este orice număr real diferit de zero. Fie  $h_2(z) = \text{Im } z^p$  ( $z \neq 0, 0 \leq \arg z \leq \pi, -\pi \leq \arg z < -\pi/2, -\pi/2 < \arg z \leq 0$ ). Funcțiile  $h_2$  și  $g_2$  coincid în semiplanul de sus. Vom arăta că în punctele semiplanului de jos, pentru care  $\text{Im } z \leq 0$ , diferența  $g_2 - h_2$  este nenegativă. Fie  $z = re^{i\theta}$  ( $r > 0, -\pi \leq \theta < -\pi/2$ ), atunci

$$g_2(z) - h_2(z) = r^p (\sin p(\theta + \pi) - \sin p\theta) = 2r^p \sin p(\theta + \pi/2) \cos p\theta/2 \geq 0.$$

Dacă însă  $z = re^{i\theta}$  ( $r > 0, -\pi/2 \leq \theta \leq 0$ ), atunci

$$g_2(z) - h_2(z) = r^p (\sin(-p\theta) - \sin p\theta) = -2r^p \sin p\theta \geq 0.$$

Prin urmare,  $g_2 - h_2 \geq 0$ . Așa cum, în plus, funcția  $h_2$  este armonică în planul complex cu tăietura de-a lungul dreptei  $\text{Im } z = 0$ , atunci pentru orice număr  $r$  ( $0 < r < |x|$ ) obținem următoarea relație:

$$g_2(x) = h_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_2(x + re^{i\varphi}) d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_2(x + re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Așadar, relația (4.3) este verificată. Lema este demonstrată.

**Demonstrația teoremei.** Punem

$$g(z) = i \left( \sum_{k=-n}^{-1} f_k t^k - \sum_{k=1}^n f_k t^k \right).$$

Ușor se observă că pe cercul  $\Gamma_0$  avem  $f = \text{Re } h$  și  $g = \text{Im } h$ , adică  $f + ig = h$ . Notăm cu  $f_1$  și  $f_2$  funcțiile  $f_1(z) = g_1(h(z))$ , respectiv,  $f_2(z) = g_2(h(z))$ , unde  $g_1$  și  $g_2$  sunt funcțiile subarmonice din lema 4.2. Așa cum funcția  $h$  este olomorfă în  $\mathbb{C}$ , iar  $g_1$  și  $g_2$  sunt subarmonice, rezultă că  $f_1$  și  $f_2$  sunt, de asemenea, subarmonice. Fie  $\psi_1(z) = \alpha_1(h(z))$  și  $\psi_2(z) = \alpha_2(h(z))$ , unde

$$\alpha_1(x+iy) = \arctg y/|x|, \alpha_2(x+iy) = \arctg |y|/x.$$

Funcțiile  $\psi_1$  și  $\psi_2$  sunt definite în punctele  $z$ , în care  $h(z) \neq 0$ . Prelungim aceste funcții în mod arbitrar în punctele  $z$ , în care  $h(z) = 0$ ; atunci, funcțiile  $f_1$  și  $f_2$  pot fi reprezentate sub forma

$$f_1 = |h|^p \cos(p\psi_1(z)), f_2 = |h|^p \sin(p\psi_2(z)).$$

Se verifică că pentru  $|z| = 1$  au loc egalitățile

$$|f(z)| = |h(z)| \cos \psi_1(z), |g(z)| = |h(z)| \sin \psi_2(z). \quad (4.4)$$

Din lema 4.1 rezultă că

$$\int_{\Gamma_0} |h(z)|^p |dz| \leq \frac{2^p}{\sin^p \pi/p} \int_{\Gamma_0} |h(z)|^p \cos^p \psi_1(z) |dz| + \alpha(p) \int_{\Gamma_0} |h(z)|^p \sin p \psi_2(z) |dz| - \beta(p) \int_{\Gamma_0} |h(z)|^p \cos p \psi_1(z) |dz|. \quad (4.5)$$

Vom arăta că ultimele două integrale din partea dreaptă a relației (4.5) sunt nenegative. Așa cum  $f$  este funcție reală, atunci  $Im h(0) = 0$ , adică  $g(0) = 0$ . De aici rezultă că în cazul în care  $h(0) \neq 0$ , avem  $\psi_2(0) = 0$  și, prin urmare,  $f_1(0) = |h(0)|^p$ , iar  $f_2(0) = 0$ . Din faptul că  $f_1$  și  $f_2$  sunt funcții subarmonice deducem că

$$0 \leq f_1(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(e^{i\varphi}) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} |h(z)|^p \cos(p \psi_1(z)) |dz|, \quad (4.6)$$

$$0 \leq f_2(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(e^{i\varphi}) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} |h(z)|^p \sin(p \psi_2(z)) |dz|.$$

Din (4.4–4.6) rezultă că

$$\int_{\Gamma_0} |h(t)|^p |dt| \leq \frac{2^p}{\sin^p \pi/p} \int_{\Gamma_0} |f(t)|^p |dt|.$$

Teorema este demonstrată.

Teorema 4.1 are o semnificație importantă. Fie  $L_p^R(\Gamma_0)$  spațiul real  $L_p$  pe conturul  $\Gamma_0$  și  $A$  operatorul

$$A\left(\sum_{k=-n}^n f_k t^k\right) = 2 \sum_{k=0}^n f_k t^k - f_0 \quad (|t|=1)$$

definit pe mulțimea polinoamelor trigonometrice reale. Observăm că operatorul  $A$  diferă de operatorul  $2P = I - S$  numai cu un termen compact.

**Teorema 4.2.** Pentru norma esențială a operatorului  $P$  are loc egalitatea

$$|P| = \inf_{T \in \mathfrak{L}} \|P + T\| = \frac{1}{\sin \pi/p} \quad (1 < p < \infty),$$

unde  $T$  înseamnă mulțimea tuturor operatorilor compacți în spațiul  $L_p^R(\Gamma_0)$ .

**Demonstrație.** Relația

$$|P| \leq \frac{1}{\sin \pi/p}$$

pentru  $1 < p < 2$  rezultă din teorema 1, iar pentru  $2 \leq p < \infty$  poate fi obținută trecând la operatorul adjunct. Semnul egalității se realizează în baza rezultatelor din [1]. Teorema este demonstrată.

**Consecința 4.1.** Din relația  $\left\|P - \frac{K}{2}\right\| = \left\|Q + \frac{K}{2}\right\|$ , unde  $Q = I - P$  și  $(Kf)(t) = f_0$ , obținem

$$|Q| = \frac{1}{\sin \pi/p}.$$

**Consecința 4.2.** Fie  $\Gamma$  orice contur închis de tip Leapunov,  $S_\Gamma$ ,  $P_\Gamma$  și  $Q_\Gamma$  operatorii respectivi în spațiul  $L_p(\Gamma)$ . Atunci  $|P_\Gamma| = |Q_\Gamma| = \frac{1}{\sin \pi/p}$  și  $\|S_\Gamma\| = \nu(p)$ .

### V. Calcularea normelor esențiale ale operatorilor singulari $P$ , $Q$ și $S$ în cazul conturului cu puncte unghiulare

În acest paragraf este abordată problema determinării normelor esențiale ale operatorilor integrali singulari în cazul conturului Leapunov pe porțiuni, folosind simbolul acestor operatori, precum și unele rezultate clasice din analiza funcțională referitoare la norma operatorului în spații Hilbert. Formulele obținute pentru normele esențiale demonstrează că ele depind de prezența punctelor unghiulare pe conturul de integrare.

Fie  $\Gamma$  un contur închis Leapunov pe porțiuni. Notăm prin  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  toate punctele unghiulare pe  $\Gamma$  cu unghiurile  $\pi\alpha_k$  ( $0 < \alpha_k < 1$ ) ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) și

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^m |t - t_k|^{\beta_k}, \quad (-1 < \beta_k < p-1, \quad m \geq n),$$

unde  $t_k = \tau_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Fie  $CP(\Gamma)$  mulțimea funcțiilor definite pe  $\Gamma$  și continue pe porțiuni, iar  $\Sigma(\Gamma, \rho) (\subset L(L_p(\Gamma, \rho)))$  – algebra generată de operatorii  $(H\varphi)(t) = h(t)\varphi(t)$  ( $h \in CP(\Gamma)$ ) și operatorul  $S_\Gamma$ . Menționăm că  $\mathbf{T} \subset \Sigma(\Gamma, \rho)$ . Amintim definiția simbolului operatorilor din  $\Sigma(\Gamma, \rho)$  (a se vedea [3,5]). Pentru aceasta este suficientă cunoașterea simbolurilor operatorilor  $H$  și  $S_\Gamma$ . Simbolul  $H(t, \xi)$  al operatorului  $H$  este definit în felul următor:

$$H(t, \xi) = \begin{vmatrix} h(t+0) & 0 \\ 0 & h(t-0) \end{vmatrix} (t \in \Gamma). \quad (5.1)$$

Simbolul  $S(t, \xi)$  ( $t \in \Gamma, \xi \in \mathbb{R}$ ) al operatorului  $S_\Gamma$  este definit de egalitatea

$$S(t, \xi) = \begin{vmatrix} cth\pi(\xi + i\gamma(t)) & -\frac{\exp(\alpha(t)-1)\pi(\xi + i\gamma(t))}{sh\pi(\xi + i\gamma(t))} \\ \frac{\exp(1-\alpha(t))\pi(\xi + i\gamma(t))}{sh\pi(\xi + i\gamma(t))} & -cth\pi(\xi + i\gamma(t)) \end{vmatrix}, \quad (5.2)$$

unde  $\alpha(t) = \alpha_k$  ( $t = \tau_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )),  $\alpha(t) = 1$  pentru  $t \in \Gamma \setminus \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$ ,  $\gamma(t) = \frac{1 + \beta_k}{p}$

pentru  $t = t_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) și  $\gamma(t) = \frac{1}{p}$  pentru  $t \in \Gamma \setminus \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ .

**Teorema 5.1.** Fie  $A \in \Sigma(\Gamma, \rho)$  și  $A(t, \xi)$  simbolul lui. Operatorul  $A$  este noetherian în spațiul  $L_p(\Gamma, \rho)$  dacă și numai dacă

$$\det A(t, \xi) \neq 0 \quad (t \in \Gamma, \xi \in \bar{\mathbb{R}}). \quad (5.3)$$

Fie  $A \in L(\mathbf{B})$  și  $\mathbf{T}(\mathbf{B})$  idealul bilateral, format de operatorii compacți în  $\mathbf{B}$ . Amintim că norma esențială a operatorului  $A$  este definită de relația

$$|A| = \inf_{T \in \mathbf{T}(\mathbf{B})} \|A + T\|. \quad (5.4)$$

Acest paragraf este consacrat calculului normelor esențiale ale operatorilor  $S, P, Q$ .

Vom începe cu cazuri particulare. Fie  $\Gamma_\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) un contur format din două semidrepte ce pornesc din punctul  $z = 0$ . Presupunem că  $\mathbb{R}^+ \subset \Gamma_\alpha$ . Notăm prin  $K_{\alpha\beta} (\subset L(L_2(\Gamma_\alpha, |t|^\beta)))$ ,  $-1 < \beta < 1$ ) algebra generată de operatorii  $S_\alpha (= S_{\Gamma_\alpha})$  și  $S_\alpha^*$ , iar prin  $|S_\alpha|_\beta$  notăm norma esențială a operatorului  $S_\alpha$  în spațiul  $L_2(\Gamma_\alpha, |t|^\beta)$ . Dacă  $\beta = 0$ , atunci punem  $|S_\alpha|_0 = |S_\alpha|$ .

Este cunoscut faptul (a se vedea [2]) că în cazul în care conturul  $\Gamma$  satisface condițiile lui Leapunov ( $\alpha = 1$ )  $|S_\Gamma|_\beta$  depinde de numărul  $\beta$  și nu depinde de conturul  $\Gamma$ . În particular, pentru  $\beta = 0$  avem  $|S_\Gamma| = 1$  pentru orice contur închis de tip Leapunov. Vom vedea că această proprietate devine falsă în cazul în care conturul  $\Gamma$  are puncte unghiulare.

Amintim că pentru orice operator  $A$  dintr-o algebră  $\Sigma$  cu simbol simetric are loc egalitatea

$$\inf_{T \in \mathcal{T}(\Sigma)} \|A + T\| = \max_x s_1(A(x)), \quad (5.5)$$

unde  $A(x)$  este simbolul operatorului  $A$ , iar  $s_1^2(A(x))$  înseamnă cea mai mare valoare proprie a matricei  $A(x)(A(x))^*$ . Notăm prin  $\hat{\sigma}(AA^*)$  spectrul clasei adiacente  $\{AA^* + T\}$  în algebra cât  $\Sigma/\mathcal{T}(\Sigma)$ . Atunci relația (5.5) poate fi scrisă sub forma

$$\inf_{T \in \mathcal{T}(\Sigma)} \|A + T\|^2 = \max_{\lambda \in \hat{\sigma}(AA^*)} \lambda.$$

Remarcăm că mulțimea  $\hat{\sigma}(AA^*)$  coincide cu mulțimea valorilor  $\lambda$  pentru care operatorul  $AA^* - \lambda I$  nu este noetherian. Notăm cu  $M(\lambda, t, \xi)$  simbolul operatorului  $M = AA^* - \lambda I$ . Atunci, spectrul esențial  $\hat{\sigma}(AA^*)$  al operatorului  $AA^*$  coincide cu valorile  $\lambda \in \mathbb{C}$ , pentru care  $\det M(\lambda, t, \xi)$  se anulează într-un punct  $(t, \xi) \in \Gamma \times \overline{\mathbb{R}}$ . Prin urmare,  $|A|^2$  coincide cu valoarea maximală a rădăcinilor ecuației  $\det M(\lambda, t, \xi) = 0$ .

În formula (5.2), pentru simbolul operatorului  $S_\Gamma$ , definit de formula (5.2), înlocuim  $\xi$  prin  $\xi/2\pi$ . Atunci, aplicând cele menționate anterior pentru operatorul  $S_\alpha$ , obținem:

$$|S_\alpha|_\beta^2 = \max_{-\infty \leq \xi \leq \infty} \left( f_{\alpha, \beta}(\xi) + \sqrt{f_{\alpha, \beta}^2(\xi) - 1} \right), \quad (5.6)$$

unde

$$f_{\alpha, \beta}(\xi) = \frac{1 - \cos \pi \beta \cdot e^\xi + e^{2\xi} + 2e^{(2-\alpha)\xi} + 2e^{\alpha\xi}}{1 + 2 \cos \pi \beta \cdot e^\xi + e^{2\xi}}.$$

În particular, dacă  $\alpha = \pi$ , adică  $\Gamma_\alpha = \mathbb{R}$ , atunci din egalitatea (5.6) obținem:

$$|S_\mathbb{R}|_{L_2(\mathbb{R}, |x|^\beta)} = \operatorname{ctg} \frac{\pi(1-|\beta|)}{4}. \quad (5.7)$$

Fie  $\beta = 0$  și notăm prin  $z = (1 - e^\xi)/(1 + e^\xi)$ . Atunci

$$|S_\alpha| = \operatorname{ctg} \frac{\theta(\alpha)}{2}, \quad (5.8)$$

unde

$$\operatorname{ctg} \theta(\alpha) = \frac{1}{2} \max_{-1 \leq z \leq 1} \left| (1+z) \left( \frac{1-z}{1+z} \right)^{\alpha/2} - (1-z) \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^{\alpha/2} \right|. \quad (5.9)$$

În particular,

$$\left| S_{1/3} \right| = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ și } \left| S_{1/2} \right| = \sqrt{2}.$$

În mod similar pentru operatorii  $P_\alpha = \frac{1}{2}(I + S_\alpha)$  și  $Q_\alpha = I - P_\alpha$ , se obține

$$|P_\alpha| = |Q_\alpha| = (\sin \theta(\alpha))^{-1}.$$

Aceste relații sunt în concordanță cu rezultatele din [2].

**Teorema 5.2.** Norma esențială a operatorului  $S_\alpha$  în  $L_2(\Gamma_\alpha)$  este o funcție continuă și monoton descrescătoare pe intervalul  $(0,1]$  și

$$1 \leq |S_\alpha|_{L_2(\Gamma_\alpha)} \leq 1 + \sqrt{2}.$$

Afirmația teoremei rezultă fără dificultate din relația (5.8), de aceea demonstrația va fi neglijată.

În cele ce urmează considerăm cazul general. Fie  $\Gamma$  un contur închis Leapunov pe porțiuni. Notăm prin  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  toate punctele unghiulare cu unghiurile  $\alpha_k (k=1, \dots, n)$ . În spațiul  $L_2(\Gamma, \rho)$  considerăm operatorul

$$A = S_\Gamma \cdot S_\Gamma^* - \lambda I.$$

Simbolul operatorului  $A$  are forma

$$A(t, \xi) = S(t, \xi)(S(t, \xi))^* - \lambda E_2,$$

unde  $E_2$  este matricea unitate de ordinul doi. În punctele  $t \in \Gamma \setminus \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$  avem  $A(t, \xi) = (1 - \lambda)E_2$ . Conform teoremei 5.1, operatorul  $A$  este noetherian dacă și numai dacă  $\det A(t, \xi) \neq 0$ .

**Teorema 5.3.** Pentru normele esențiale ale operatorilor  $S_\Gamma$ ,  $P_\Gamma$  și  $Q_\Gamma$  sunt adevărate următoarele relații

$$|S_\Gamma|_{L_2(\Gamma, \rho)} = \max_{1 \leq k \leq n} |S_{\alpha_k}|_{L_2(\Gamma_{\alpha_k}, |\beta_k|)}. \quad (5.10)$$

Fie  $\min(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_{k_0} (1 \leq k_0 \leq n)$ . Dacă  $\alpha_{k_0} = 1$  (conturul este de tip Leapunov), atunci

$$|S_\Gamma|_{L_2(\Gamma, \rho)} = \max_{1 \leq k \leq n} \text{ctg} \frac{\pi(1 - |\beta_k|)}{4}. \quad (5.11)$$

Dacă  $\rho(t) \equiv 1$ , atunci

$$|S_\Gamma|_{L_2(\Gamma)} = \text{ctg} \frac{\theta(\alpha_{k_0})}{2}, \quad (5.12)$$

unde  $\theta(\alpha)$  este definită de (5.9). Pentru operatorii  $P_\Gamma$  și  $Q_\Gamma$  are loc egalitatea

$$|P_\Gamma| = |Q_\Gamma| = \frac{|S_\Gamma|_{L_2(\Gamma, \rho)}^2 + 1}{2|S_\Gamma|_{L_2(\Gamma, \rho)}}. \quad (5.13)$$

**Demonstrație.** Într-adevăr,

$$|S_\Gamma|_{L_2(\Gamma, \rho)}^2 = \max_{\lambda} \det(S(t, \xi)(S(t, \xi))^* - \lambda E_2) = 0.$$

Pentru  $t \in \Gamma \setminus \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$  avem

$$\det(S(t, \xi)(S(t, \xi))^* - \lambda E_2) = (1 - \lambda)^2$$

Pentru  $t = \tau_k$  din teorema 5.1 rezultă

$$\max_{\lambda} \det(S(t, \xi)(S(t, \xi))^* - \lambda E_2) = \max_{1 \leq k \leq n} |S_{\alpha_k}|_{\beta_k}^2.$$

Prin urmare,  $|S_\Gamma| = \max_k (1, \max_k |S_{\alpha_k}|_{\beta_k}) = \max_k |S_{\alpha_k}|_{\beta_k}$  și (5.10) este demonstrată.

Relațiile (5.11), (5.12) și (5.13) rezultă din (5.7), respectiv, din (5.8), dacă se repetă raționamentele făcute la demonstrarea relației (5.11).

Teorema este demonstrată.

**Corolarul 5.1.**  $|S_\Gamma| = 1$  dacă și numai dacă conturul  $\Gamma$  este de tip Leapunov.

**Teorema 5.4.** Dacă  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \neq n$ , atunci operatorul  $S_\Gamma^*$  nu aparține algebrei  $\Sigma_0$  generate de operatorul  $S_\Gamma$  și de operatorii de multiplicare la toate funcțiile din  $C(\Gamma)$ .

**Demonstrație.** Așa cum  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \neq n$ , rezultă că există un  $\alpha_{k_0} \neq 1$ . Să admitem că  $S_\Gamma^* \in \Sigma_0$ . Deoarece algebra cât  $\hat{\Sigma}_0 = \Sigma_0 / \Gamma(\Sigma_0)$  este comutativă, atunci din teorema lui I.Ghelfand rezultă că pe algebra  $\Sigma_0$  există un simbol scalar  $\{\gamma_M\}$ . Notăm prin  $R_\lambda$  operatorul

$$R_\lambda = \lambda I - (S_\Gamma S_\Gamma^* - S_\Gamma^* S_\Gamma).$$

Din relația  $\gamma_M(R_\lambda) = \lambda$ , valabilă pentru orice ideal maximal  $M$ , rezultă că operatorul  $R_\lambda$  este noetherian pentru orice  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Prin urmare, din teorema 5.1 deducem că

$$\det[\lambda E_2 - S(t, \zeta)(S(t, \zeta))^* + (S(t, \zeta))^* S(t, \zeta)] \neq 0$$

pentru orice  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  și orice  $(t, \xi) \in \Gamma \times \mathbb{R}$ . Însă, aceasta este cu neputință, deoarece

$$\det[\lambda E_2 - S(\tau_{k_0}, \xi)(S(\tau_{k_0}, \xi))^* + (S(\tau_{k_0}, \xi))^* S(\tau_{k_0}, \xi)]$$

se anulează pentru o mulțime de valori  $\lambda = \lambda(\xi)$  de puterea continuumului.

Teorema este demonstrată.

**Corolarul 5.2.** Operatorul  $S_\Gamma - S_\Gamma^*$  este compact dacă și numai dacă conturul  $\Gamma$  este de tip Leapunov.

Într-adevăr, suficiența a fost demonstrată în [1]. Reciproc, fie  $S_\Gamma - S_\Gamma^*$  compact în spațiul  $L_2(\Gamma)$ . Atunci  $SS^* = I + T$ , unde  $T$  este compact. Așadar,  $|SS^*| = 1$ ; prin urmare,  $|S| = 1$  și din (5.10) deducem că conturul  $\Gamma$  nu are puncte unghiulare, adică este de tip Leapunov.

Fie  $F_\Gamma^+$  ( $F_{\Gamma_0}^+$ ) domeniul mărginit de conturul  $\Gamma$  ( $\Gamma_0$ ), unde  $\Gamma_0$  este cercul unitate. Notăm prin  $\omega: F_\Gamma^+ \rightarrow F_{\Gamma_0}^+$  funcția lui Riemann care transformă conform domeniul  $F_\Gamma^+$  în  $F_{\Gamma_0}^+$ .

**Teorema 5.5.** Operatorul

$$(T_\omega \varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \left( \left| \frac{\omega'(t)}{\omega'(\tau)} \right|^{1/2} \frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau) - \omega(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right) \varphi(\tau) d\tau$$

este compact dacă și numai dacă conturul  $\Gamma$  este de tip Leapunov.

Operatorul  $A = aI + bS_\Gamma + bT_\omega$  ( $a, b \in L_\infty(\Gamma)$ ) este noetherian în  $L_2(\Gamma)$  dacă și numai dacă operatorul  $A_0 = aI + bS_\Gamma$  este noetherian. În plus,

$$\text{Ind}(aI + bS_\Gamma + bT_\omega) = \text{Ind}(aI + bS_\Gamma).$$

**Demonstrație.** Operatorul

$$(B\varphi)(t) = |\omega'(t)|^{1/2} \varphi(\omega(t))$$

aplică izometric spațiul  $L_2(\Gamma_0)$  pe  $L_2(\Gamma)$ . Prin verificare directă se obține că

$$BS_{\Gamma_0} B^{-1} \varphi - S_\Gamma \varphi = T_\omega \varphi \quad (5.14)$$

pentru orice funcție  $\varphi$  holderiană pe  $\Gamma$ . Așa cum operatorii  $BS_{\Gamma_0} B^{-1} - S_\Gamma$  și  $T_\omega$  sunt mărginiți în spațiul  $L_2(\Gamma)$ , din (5.14) deducem că

$$BS_{\Gamma_0} B^{-1} - S_\Gamma = T_\omega. \quad (5.15)$$

Fie  $\Gamma$  de tip Leapunov, atunci funcția  $\omega'(t)$  verifică condițiile Holder și în orice punct  $t \in \Gamma$  operatorul  $T_\omega$  este echivalent cu operatorul integral  $K$  cu nucleul

$$k(\tau, t) = \frac{1}{\pi i} \left( \frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau) - \omega(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right), \quad (K\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma k(\tau, t) \varphi(\tau) d\tau,$$

care are singularitate slabă pe  $\Gamma \times \Gamma$  și, prin urmare, este compact. Din faptul că  $T_\omega$  este echivalent cu operatorul  $K$  și în baza principiului local al lui I.Simonenko rezultă că operatorul  $T_\omega$  de asemenea este compact în  $L_2(\Gamma)$ . Reciproc. Fie  $T_\omega$  compact și presupunem, prin reducere la absurd, că conturul  $\Gamma$  nu este de tip Leapunov. Atunci din relația (5.10) rezultă că  $|S_\Gamma| > 1$ . Pe de altă parte, din (5.15) obținem

$$|S_\Gamma| = |BS_{\Gamma_0} B^{-1} + T_\omega| = |BS_{\Gamma_0} B^{-1}| \leq |S_{\Gamma_0}| = 1.$$

Contrazicerea obținută demonstrează că conturul  $\Gamma$  este de tip Leapunov.

Demonstrăm partea a doua a teoremei. Considerăm operatorul  $\tilde{A} = \tilde{a}I + \tilde{b}S_{\Gamma_0}$ , unde  $\tilde{f}(z) = f(\omega^{-1}(z))$  ( $f(t) \in L_\infty(\Gamma)$ ). Atunci are loc egalitatea

$$A = B\tilde{A}B^{-1} = aI + bS_\Gamma + bT_\omega. \quad (5.16)$$

Mulțimea valorilor funcțiilor  $\tilde{a}$  și  $\tilde{b}$  coincide respectiv cu valorile funcțiilor  $a$  și  $b$ ; prin urmare, operatorul  $\tilde{A}$  este noetherian în  $L_2(\Gamma_0)$  dacă și numai dacă operatorul  $A_0 = aI + bS_\Gamma$  este noetherian în  $L_2(\Gamma)$ . Pe de altă parte, din (5.15) rezultă că operatorul  $\tilde{A}$  este noetherian în  $L_2(\Gamma_0)$  dacă și numai dacă  $A = A_0 + bT_\omega$  este noetherian în  $L_2(\Gamma)$ . Mai avem  $Ind \tilde{A} = Ind A = Ind A_0$ . Teorema este demonstrată.

**Corolarul 5.3.**  $T_\omega$  este operator cu singularitate punctuală și reprezintă perturbație admisibilă pentru operatorii de forma  $aI + bS_\Gamma$ .

**Teorema 5.6.** Fie  $\Gamma$  un contur Leapunov pe porțiuni. Norma esențială a operatorului  $S_\Gamma$  în spațiul  $L_p(\Gamma)$  verifică relațiile

$$|S_\Gamma| \leq \begin{cases} ctg \frac{\theta(\alpha_{k_0})}{p}, & \text{pentru } p = 2^n, \\ tg^t \frac{\theta(\alpha_{k_0})}{2^n} \cdot ctg^{1-t} \frac{\theta(\alpha_{k_0})}{2^{n+1}}, & \text{pentru } 2^n \leq p \leq 2^{n+1}, \end{cases} \quad (5.17)$$

unde funcția  $\theta(\alpha_{k_0})$  este definită de (5.9) și  $t = (2^{n+1} - p) / p$ .

**Demonstrație.** Fie  $\varphi$  orice funcție rațională definită și continuă pe  $\Gamma$ . Notăm prin  $\varphi_+ = P_\Gamma \varphi$  și  $\varphi_- = Q_\Gamma \varphi$ . Atunci  $\varphi = (P_\Gamma + Q_\Gamma)\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$ ,  $S_\Gamma \varphi = P_\Gamma \varphi - Q_\Gamma \varphi = \varphi_+ - \varphi_-$  și

$$\varphi^2 + (S_\Gamma \varphi)^2 = 2(\varphi_+^2 - \varphi_-^2) = 2S_\Gamma(\varphi S_\Gamma \varphi).$$

Din această relație se deduce cu ușurință inegalitatea

$$\|S_\Gamma\|_{2p} \leq \|S_\Gamma\|_p + \sqrt{1 + \|S_\Gamma\|_p^2}. \quad (5.18)$$

Prima relație din (5.17) rezultă din (5.12) și (5.18), iar a doua relație din (5.17) se obține cu ajutorul teoremei de interpolare a lui M.Riesz. Teorema este demonstrată.

#### Bibliografie:

1. GOHBERG, I., KRUPNIK, N. One-dimensional linear singular integral equations. In: *Operator Theory*, vol.I, II. Basel-Boston – Stuttgart, 1992.
2. KRUPNIK, N. Banach algebras with symbol and singular integral operators. In: *Operator Theory: Advances and Applications* (Birkhäuser Verlag, Basel) 1987, no.26, 138 p.
3. NEAGU, V. *Algebre Banach generate de operatori integrali singulari*. Chișinău: USM, 2005. 252 p.
4. PICHORIDES, S. On the best values of the constants in the theorems M.Riesz, Zygmund and Kolmogorov. In: *Studia Mathematica*, 1972, vol.19, no.2, p.165-179.
5. КРУПНИК, Н., НЯГУ, В. Сингулярные интегральные операторы со сдвигом вдоль кусочно-ляпуновского контура. В: *Известия Вузов (математика)*, 1975, №6, с.60-72.
6. НЯГУ, В. О символе сингулярных интегральных операторов в случае кусочно-ляпуновского контура. В: *Математические исследования*, вып.9, №2. Кишинёв: Штиинца, 1974, с.109-125.
7. НЯГУ, В. О фактор-норме сингулярных операторов в случае сложного контура. В: *Известия Вузов (математика)*, 1978, №8, с.74-79.
8. ТИМАН, А., ТРОФИМОВ, В. *Введение в теорию гармонических функций*. Москва: Наука, 1968.
9. ХВЕДЕЛИДЗЕ, Б. *Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной*. Москва: Наука, 1975. 262 с.

Prezentat la 09.09.2015



## ON PSEUDOAUTOMORPHISMS OF MIDDLE BOL LOOPS

Ion GRECU

Moldova State University

A loop  $(Q, \cdot)$  is called a middle Bol loop if every loop isotope of  $(Q, \cdot)$  satisfies the identity  $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$  (i.e. if the anti-automorphic inverse property is universal in  $(Q, \cdot)$ ) [1]. Middle Bol loops are isotrophes of left (right) Bol loops [2, 4]. The left (right, middle) pseudoautomorphisms of middle Bol loops are considered in the present article. The general form of middle Bol loop's autotopisms is given using right pseudoautomorphisms of the corresponding right Bol loops. Necessary and sufficient conditions when a LP-isotope of a middle Bol loop  $(Q, \cdot)$  is isomorphic to  $(Q, \cdot)$  are proved. It is shown that in the left (right) Bol loops every middle pseudoautomorphism is a left (right) pseudoautomorphism. Connections between the groups of pseudoautomorphisms (left, right, middle) of a middle Bol loop and of the corresponding left Bol loop are found.

**Keywords:** middle Bol loop, middle (left, right) pseudoautomorphism, autotopy, isotrophy.

## ASUPRA PSEUDOAUTOMORFISMELOR BUCLELOR MEDII BOL

O buclă  $(Q, \cdot)$  se numește buclă medie Bol, dacă orice buclă izotopă cu  $(Q, \cdot)$  verifică identitatea  $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$  (dacă proprietatea antiautomorfică de inversabilitate este universală în  $(Q, \cdot)$ ) [1]. Buclele medii Bol sunt izotrofi ai buclelor Bol la stânga (la dreapta) [2]. În prezentul articol sunt studiate pseudoautomorfismele la stânga (la dreapta, medii). Este dedusă forma generală a autotopiilor buclelor medii Bol cu ajutorul pseudoautomorfismelor la dreapta ale buclelor Bol la dreapta corespunzătoare. Sunt date condiții necesare și suficiente ca un LP-izotop al unei bucle medii Bol  $(Q, \cdot)$  să fie izomorf cu  $(Q, \cdot)$ . Se demonstrează că în buclele Bol la stânga (la dreapta) orice pseudoautomorfism mediu este un pseudoautomorfism la stânga (la dreapta). Sunt stabilite conexiuni între grupurile de pseudoautomorfisme (la stânga, la dreapta, medii) ale unei bucle medii Bol și cele ale buclei Bol la stânga corespunzătoare.

**Cuvinte-chee:** buclă medie Bol, pseudoautomorfism mediu (la dreapta, la stânga), autotopie, izotrofi.

A loop  $(Q, \cdot)$  is called a right (left) Bol loop if it satisfies the identity  $(zx \cdot y)x = z(xy \cdot x)$  ( $x(y \cdot xz) = (x \cdot yx)z$ ). Right (left) Bol loops are studied, for example, in [3, 7]. A loop  $(Q, \cdot)$  is called a middle Bol loop if the identity  $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$  (the anti-automorphic inverse property) is universal in  $(Q, \cdot)$ , i.e. is invariant under loop isotopy. It is shown in [1] that a loop  $(Q, \cdot)$  is middle Bol if and only if the corresponding primitive loop  $(Q, \cdot, \backslash)$  satisfies the middle Bol identity:  $x(yz \backslash x) = (x/z)(y \backslash x)$ . Middle Bol loops are studied in [1, 2, 4, 5]. A.Gwaramija proved in [2] that middle Bol loops are isotrophes of right (left) Bol loops: a loop  $(Q, \cdot)$  is middle Bol if and only if there exists a right Bol loop  $(Q, \cdot)$  such that

$$x \circ y = y^{-1} \backslash x, \quad (1)$$

where  $\backslash$  is the right division in  $(Q, \cdot)$ . From (1) follows

$$y \cdot x = x // y^{-1}, \quad (2)$$

for every  $x, y \in Q$ , where  $//$  is the left division in  $(Q, \cdot)$ . If  $(Q, \cdot)$  is the corresponding left Bol loop of  $(Q, \cdot)$ , then

$$x \circ y = x / y^{-1}, \quad (3)$$

$$x \cdot y = x // y^{-1}, \quad (4)$$

for every  $x, y \in Q$ , where  $//$  ( $/$ ) is the left division in  $(Q, \cdot)$  (resp.  $(Q, \cdot)$ ).

The left (right, middle) pseudoautomorphisms of middle Bol loops are considered in the present article. The general form of middle Bol loop's autotopisms is given using right pseudoautomorphisms of the corresponding right Bol loops. Necessary and sufficient conditions when a LP-isotope of a middle Bol loop  $(Q, \cdot)$  is isomorphic to  $(Q, \cdot)$  are proved. It is shown that in the left (right) Bol loops every middle pseudoautomorphism

is a left (resp. right) pseudoautomorphism. Connections between the groups of pseudoautomorphisms (left, right, middle) of a middle Bol loop and of the corresponding left Bol loop are found.

Let  $(Q, \cdot)$  be a middle Bol loop and  $a \in Q$ . Consider the bijection:  $I_a: Q \rightarrow Q$ ,  $I_a(x) = x \setminus a$ , then  $I_a^{-1}: Q \rightarrow Q$ ,  $I_a^{-1}(x) = a/x$ ,  $\forall a, x \in Q$ . In particular, if  $(Q, \cdot)$  is a commutative middle Bol loop then  $I_a = I_a^{-1}$ ,  $\forall a \in Q$ . Hence, using the middle Bol identity, we get that a loop  $(Q, \cdot)$  is a middle Bol loop if and only if the triple  $(I_a^{-1}I, I_aI, L_xI_xI)$  is an autotopism of  $(Q, \cdot)$ , where  $I: Q \rightarrow Q$ ,  $I(x) = x^{-1}$ , i.e. is the inversion in  $(Q, \cdot)$ .

Let  $(Q, \cdot)$  be an arbitrary loop,  $\varphi \in S_Q$  and  $c \in Q$ . Remind that: a)  $\varphi$  is called a *left (resp. right) pseudoautomorphism* of  $(Q, \cdot)$ , with the companion  $c$ , if the equality

$$c \cdot \varphi(x \cdot y) = [c \cdot \varphi(x)] \cdot \varphi(y) \quad (\text{resp.}, \quad \varphi(x \cdot y) \cdot c = \varphi(x) \cdot [\varphi(y) \cdot c])$$

holds, for every  $x, y \in Q$ ; b)  $\varphi$  is called a *middle pseudoautomorphism*, with the companion  $c$ , if the equality

$$\varphi(x \cdot y) = [\varphi(x) / c^{-1}] \cdot [c \setminus \varphi(y)], \quad (5)$$

holds, for every  $x, y \in Q$ , where  $c^{-1}$  is the right inverse of  $c$ . The notion of pseudoautomorphism was introduced by Bruck in [12] for IP-loops. The pseudoautomorphisms of LIP-loops has been studied by Florea ([8], [9]). In particular, Florea found the general form of autotopisms of LIP-loops and proved that a principal isotope of a LIP-loop  $(Q, \cdot)$  is isomorphic to  $(Q, \cdot)$  if and only if  $(Q, \cdot)$  has a left pseudoautomorphism with the companion  $k = a \cdot ba$ , where  $a$  is a Bol element and  $b \in Q$ . The notion of *middle pseudoautomorphism* was introduced by A. Drisco in [11] and also considered in [10]. Middle pseudoautomorphisms of (right) Bruck loops are studied in [6]. Below we will denote by  $PS_r^{(\cdot)}$  (resp.,  $PS_l^{(\cdot)}$ ,  $PS_m^{(\cdot)}$ ) the group of all right (resp. left, middle) pseudoautomorphisms of the loop  $(Q, \cdot)$ .

**Remark 1.** Let  $(Q, \cdot)$  be an arbitrary loop. It is easy to see that any automorphism  $\varphi \in \text{Aut}(Q, \cdot)$  is a middle pseudoautomorphism with the companion  $e$ , where  $e$  is the unit of  $(Q, \cdot)$ .

**Lemma 1.** Let  $(Q, \cdot)$  be an arbitrary loop,  $\varphi \in S_Q$  and  $c \in Q$ . Then  $\varphi$  is a middle pseudoautomorphism with the companion  $c$  if and only if  $\varphi^{-1}(x \cdot y) = \varphi^{-1}(x \cdot c^{-1}) \cdot \varphi^{-1}(c \cdot y)$ ,  $\forall x, y \in Q$ .

*Proof.* Let  $\varphi$  be a middle pseudoautomorphism with the companion  $c$ , then (5) holds for every  $x, y \in Q$ . Denoting  $c \setminus \varphi(y) = u$ ,  $\varphi(x) / c^{-1} = v$ , we have  $c \cdot u = \varphi(y)$ ,  $v \cdot c^{-1} = \varphi(x)$ , so

$$y = \varphi^{-1}(c \cdot u), \quad x = \varphi^{-1}(v \cdot c^{-1}). \quad (6)$$

From (5) and (6) we get:

$$\varphi(\varphi^{-1}(v \cdot c^{-1}) \cdot \varphi^{-1}(c \cdot u)) = v \cdot u \Leftrightarrow \varphi^{-1}(v \cdot u) = \varphi^{-1}(v \cdot c^{-1}) \cdot \varphi^{-1}(c \cdot u),$$

$\forall u, v \in Q$ .  $\square$

**Corollary.** Let  $(Q, \cdot)$  be an arbitrary loop,  $\varphi \in S_Q$  and  $c \in Q$ . Then  $\varphi$  is a middle pseudoautomorphism with the companion  $c$  if and only if the triple  $(\varphi^{-1}R_{c^{-1}}, \varphi^{-1}L_c, \varphi^{-1})$  is an autotopism of  $(Q, \cdot)$ .

**Proposition 1.** Let  $(Q, \cdot)$  be a middle Bol loop with the unit  $e$ . If  $x^2 = e$ , for all  $x \in Q$ , then every  $a \in Q$  is a companion for some middle pseudoautomorphism of  $(Q, \cdot)$ .

*Proof.* Let  $(Q, \cdot)$  be a middle Bol loop with  $x^2 = e$ , for all  $x \in Q$ , then  $x = x^{-1}$  and  $x \cdot y = (x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1} = y \cdot x$ , for all  $x, y \in Q$ , so  $(Q, \cdot)$  is a commutative middle Bol loop. Let  $a \in Q$ , then the triple  $(I_a^{-1}L, I_aI, L_aI_aI)$  is an autotopism of  $(Q, \cdot)$ , for all  $a \in Q$ . Denoting  $L_aI_aI$  by  $\varphi$ , we get that the triple  $(I_a^{-1}L, I_aI, \varphi)$  is an autotopism of  $(Q, \cdot)$ , so

$$\varphi(x \cdot y) = I_a^{-1}I(x) \cdot I_aI(y), \quad (7)$$

for all  $x, y \in Q$ . Taking  $y = e$  in (7), we obtain  $\varphi(x) = I_\alpha^{-1}I(x) \cdot I_\alpha I(e) = I_\alpha^{-1}I(x) \cdot a = R_\alpha I_\alpha^{-1}I(x)$ , for all  $x \in Q$ , so

$$I_\alpha^{-1}I = R_\alpha^{-1}\varphi = R_\alpha^{-1}\varphi, \quad (8)$$

for all  $a \in Q$ . Now, taking  $x = e$  in (7), we have  $\varphi(y) = I_\alpha^{-1}I(e) \cdot I_\alpha I(y) = a \cdot I_\alpha I(y) = L_\alpha I_\alpha I(y)$ , for all  $x \in Q$ , hence

$$I_\alpha I = L_\alpha^{-1}\varphi, \quad (9)$$

for all  $a \in Q$ . Using (9) and (8), from (7) we get that the triple  $(R_\alpha^{-1}\varphi, L_\alpha^{-1}\varphi, \varphi)$  is an autotopism of  $(Q, \cdot)$ , so  $\varphi$  is a middle pseudoautomorphism of  $(Q, \cdot)$  with the companion  $a$ .  $\square$

Let  $(Q, \cdot)$  be an arbitrary loop, we will denote by  $N_r^{(\cdot)}$  (resp.  $N_l^{(\cdot)}, N_m^{(\cdot)}$ ) the right (resp. left, middle) nucleus of the loop  $(Q, \cdot)$ .

**Proposition 2.** *If  $(Q, \cdot)$  is a middle Bol loop and  $a \in N_m^{(\cdot)}$  then  $R_\alpha^{-1}I_\alpha^{-1}I$  is a right pseudoautomorphism with the companion  $a^2$ .*

*Proof.* Let  $(Q, \cdot)$  be a middle Bol loop and  $a \in N_m^{(\cdot)}$ . Then the triples  $(I_\alpha^{-1}I, I_\alpha I, L_\alpha I_\alpha I)$  and  $(R_\alpha^{-1}, L_\alpha, a)$  are autotopisms of  $(Q, \cdot)$ , hence

$$(R_\alpha^{-1}, L_\alpha, a) \cdot (I_\alpha^{-1}I, I_\alpha I, L_\alpha I_\alpha I) = (R_\alpha^{-1}I_\alpha^{-1}I, L_\alpha I_\alpha I, L_\alpha I_\alpha I)$$

is an autotopism of  $(Q, \cdot)$ . Denoting  $R_\alpha^{-1}I_\alpha^{-1}I$  by  $\tau$  in the triple  $(R_\alpha^{-1}I_\alpha^{-1}I, L_\alpha I_\alpha I, L_\alpha I_\alpha I)$ , we obtain:

$$L_\alpha I_\alpha I(x \cdot y) = \tau(x) \cdot L_\alpha I_\alpha I(y), \quad (10)$$

for all  $x, y \in Q$ , so taking  $y = e$  in (10), where  $e$  is the unit of  $(Q, \cdot)$ , we get  $L_\alpha I_\alpha I(x) = R_\alpha \tau(x)$ , for all  $x \in Q$ , and for all  $a \in N_m^{(\cdot)}$ , so the triple  $(\tau, R_\alpha \tau, R_\alpha \tau)$  is an autotopism of  $(Q, \cdot)$ , i.e.  $\tau$  is a pseudoautomorphism of  $(Q, \cdot)$  with the companion  $a^2$ .  $\square$

**Proposition 3.** *Let  $(Q, \cdot)$  be a middle Bol loop with the unit  $e$  and let  $T = (\alpha, \beta, \gamma)$  be an autotopism of  $(Q, \cdot)$ . Then there exists a right pseudoautomorphism  $\tau$  with the companion  $k = b^{-1}a^{-1}$ , where  $a = \alpha(e)$ ,  $b = \beta(e)$ , such that*

$$T = (II_\alpha^{-1}, II_\alpha^{-1}, II_\alpha^{-1}L_\alpha^{-1}) \cdot (\tau, R_k \tau, R_k \tau).$$

*Proof.* Let  $(Q, \cdot)$  be a middle Bol loop, then the triple  $(I_\alpha^{-1}I, I_\alpha^{-1}I, L_\alpha^{-1}I_\alpha^{-1}I)$  is an autotopism of  $(Q, \cdot)$ , for all  $c \in Q$ . If  $T = (\alpha, \beta, \gamma)$  is an autotopism of  $(Q, \cdot)$ , then the triple  $T_1 = (I_\alpha^{-1}I, I_\alpha^{-1}I, L_\alpha^{-1}I_\alpha^{-1}I) \cdot (\alpha, \beta, \gamma) = (I_\alpha^{-1}I\alpha, I_\alpha^{-1}I\beta, L_\alpha^{-1}I_\alpha^{-1}I\gamma)$  is an autotopism of  $(Q, \cdot)$ . Denoting  $I_\alpha^{-1}I\alpha = \tau$ , we obtain  $\tau(e) = I_\alpha^{-1}I\alpha(e) = I_\alpha^{-1}(a^{-1}) = a^{-1}/a^{-1} = e$ , so

$$L_\alpha^{-1}I_\alpha^{-1}I\gamma(x \cdot y) = \tau(x) \cdot I_\alpha^{-1}I\beta(y) \quad (11)$$

for all  $x, y \in Q$ . Taking  $x = e$  in (11), we get  $L_\alpha^{-1}I_\alpha^{-1}I\gamma(y) = I_\alpha^{-1}I\beta(y)$ , for all  $y \in Q$ , and using the equality  $L_\alpha^{-1}I_\alpha^{-1}I\gamma = I_\alpha^{-1}I\beta$ , where  $a \in Q$ , we obtain that the triple  $(\tau, I_\alpha^{-1}I\beta, I_\alpha^{-1}I\beta)$  is an autotopism of  $(Q, \cdot)$ , for all  $a \in Q$ . So, for  $\forall x, y \in Q$ , the equality  $I_\alpha^{-1}I\beta(x \cdot y) = \tau(x) \cdot I_\alpha^{-1}I\beta(y)$  holds and, taking  $y = e$  in the last equality, we obtain:  $I_\alpha^{-1}I\beta(x) = \tau(x) \cdot I_\alpha^{-1}I\beta(e) \Rightarrow I_\alpha^{-1}I\beta(x) = R_k \tau(x)$ , for all  $x \in Q$ , where  $k = I_\alpha^{-1}I\beta(e) = b^{-1}a^{-1}$ , hence  $I_\alpha^{-1}I\beta = R_k \tau$ , i.e.

$T_1 = (\tau, I_\alpha^{-1}I\beta, I_\alpha^{-1}I\beta) = (\tau, R_k \tau, R_k \tau)$  is an autotopism of  $(Q, \cdot)$  which implies that  $\tau$  is a right pseudoautomorphism with the companion  $k$ . So  $T_1 = (I_\alpha^{-1}I, I_\alpha^{-1}I, L_\alpha^{-1}I_\alpha^{-1}I) \cdot (\alpha, \beta, \gamma) = (\tau, R_k \tau, R_k \tau)$ , i.e.

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (II_\alpha^{-1}, II_\alpha^{-1}, II_\alpha^{-1}L_\alpha^{-1}) \cdot (\tau, R_k \tau, R_k \tau),$$

where  $k = b^{-1}a^{-1}$ ,  $a = \alpha(e)$ ,  $b = \beta(e)$ .  $\square$

An analogous result was obtained by A. Gwaramija for middle Bol loops and their corresponding left Bol loops.

**Proposition 4 [2].** Let  $(Q_i)$  be a middle Bol loop with the unit  $\mathfrak{e}$  and let  $T = (\alpha, \beta, \gamma)$  be an autotopism of  $(Q_i)$ . Then there exists a left pseudoautomorphism  $\tau$  with the companion  $k_1 = b^{-1}/a^{-1}$ , where  $a = \alpha(\mathfrak{e}), b = \beta(\mathfrak{e})$ , such that

$$T = (H_b^{-1}, H_b^{-1}, H_b^{-1}L_b^{-1}) \cdot (L_{k_1}\tau, \tau, L_{k_1}\tau). \quad (12)$$

**Theorem 1.** Let  $(Q_i)$  be a middle Bol loop,  $a, b \in Q$ , and let  $x \circ y = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y, \forall x, y \in Q$ . Then  $(Q_\circ) \cong (Q_i)$  if and only if there exists a right pseudoautomorphism of  $(Q_i)$  with the companion  $k = a^{-1} \setminus b^{-1}$ .

*Proof.* Let  $(Q_\circ) \cong (Q_i)$ , and let  $\gamma$  be an isomorphism between them. Then  $\gamma(x \cdot y) = \gamma(x) \circ \gamma(y) = R_a^{-1}\gamma(x) \cdot L_b^{-1}\gamma(y) = \beta(x) \cdot \alpha(y)$ , for all  $x, y \in Q$ , where  $\beta = R_a^{-1}\gamma$ ,  $\alpha = L_b^{-1}\gamma$ , so the triple  $(\beta, \alpha, \gamma)$  is an autotopism of  $(Q_i)$  as well. Let  $\mathbf{1}$  and  $\mathfrak{e}$  be the units of  $(Q_i)$  and  $(Q_\circ)$ , respectively. So as  $\gamma$  is an isomorphism we have  $\gamma(\mathbf{1}) = \mathfrak{e}$ , where  $\mathfrak{e} = b \cdot a$ , and:

$$\beta(\mathbf{1}) = R_a^{-1}\gamma(\mathbf{1}) = R_a^{-1}(\mathfrak{e}) = R_a^{-1}(b \cdot a) = b, \quad (13)$$

$$\alpha(\mathbf{1}) = L_b^{-1}\gamma(\mathbf{1}) = L_b^{-1}(\mathfrak{e}) = L_b^{-1}(b \cdot a) = a. \quad (14)$$

From Proposition 3, (13) and (14) we obtain the equality

$$(\beta, \alpha, \gamma) = (H_b^{-1}, H_b^{-1}, H_b^{-1}L_b^{-1}) \cdot (\tau, R_k\tau, R_k\tau),$$

where  $\tau$  is a right pseudoautomorphism with the companion  $k = a^{-1} \setminus b^{-1}$ .

Conversely, if  $\tau$  is a right pseudoautomorphism of  $(Q_i)$  with the companion  $k = a^{-1} \setminus b^{-1}$ , then the triple  $(\tau, R_k\tau, R_k\tau)$  is an autotopism of  $(Q_i)$ . On the other hand, so as  $(Q_i)$  is a middle Bol loop we get that  $(L_b^{-1}L, L_b^{-1}L, L_b^{-1}L_b^{-1})^{-1} = (H_b^{-1}, H_b^{-1}, H_b^{-1}L_b^{-1})$  is an autotopism of  $(Q_i)$ . So,

$$(\beta, \alpha, \gamma) = (H_b^{-1}, H_b^{-1}, H_b^{-1}L_b^{-1}) \cdot (\tau, R_k\tau, R_k\tau) = (H_b^{-1}\tau, H_b^{-1}R_k\tau, H_b^{-1}L_b^{-1}R_k\tau),$$

is an autotopism of  $(Q_i)$ , which implies

$$H_b^{-1}L_b^{-1}R_k\tau(x \cdot y) = H_b^{-1}\tau(x) \cdot H_b^{-1}R_k\tau(y) \Leftrightarrow \gamma(x \cdot y) = \beta(x) \cdot \alpha(y) \quad (15)$$

for all  $x, y \in Q$ , where  $\gamma = H_b^{-1}L_b^{-1}R_k\tau$ ,  $\beta = H_b^{-1}\tau$ ,  $\alpha = H_b^{-1}R_k\tau$ . Also,

$$\beta(\mathbf{1}) = H_b^{-1}\tau(\mathbf{1}) = H_b^{-1}(\mathbf{1}) = (b^{-1})^{-1} = b,$$

$$\alpha(\mathbf{1}) = H_b^{-1}R_k\tau(\mathbf{1}) = H_b^{-1}R_k(\mathbf{1}) = (b^{-1}/(a^{-1} \setminus b^{-1}))^{-1} = (a^{-1})^{-1} = a$$

hence, denoting  $b^{-1}/(a^{-1} \setminus b^{-1}) = z$ , we get  $z \cdot (a^{-1} \setminus b^{-1}) = b^{-1}$ , and denoting  $a^{-1} \setminus b^{-1} = c$ , we obtain  $z \cdot c = b^{-1}$ , so  $z \cdot c = a^{-1} \cdot c \Rightarrow z = a^{-1}$ . Now, taking  $y = \mathbf{1}$  in (15) we obtain  $(x) = \beta(x) \cdot a \Rightarrow \gamma(x) = R_a\beta(x)$ , for all  $x \in Q$ , i.e.

$$\beta = R_a^{-1}\gamma. \quad (16)$$

Taking  $x = \mathbf{1}$  in (15), we have:  $\gamma(y) = b \cdot \alpha(y) \Rightarrow \gamma(y) = L_b\alpha(y)$ , for all  $y \in Q$ , so

$$\alpha = L_b^{-1}\gamma. \quad (17)$$

From (15), (16) and (17) follows:  $\gamma(x \cdot y) = \beta(x) \cdot \alpha(y) = R_a^{-1}\gamma(x) \cdot L_b^{-1}\gamma(y) = \gamma(x) \circ \gamma(y)$ , for all  $x, y \in Q$ , i.e.  $(Q_\circ) \cong (Q_i)$ .  $\square$

**Theorem 2.** Let  $(Q_i)$  be a middle Bol loop,  $a, b \in Q$ , and let  $x \circ y = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y, \forall x, y \in Q$ . Then  $(Q_\circ) \cong (Q_i)$  if and only if there exists a left pseudoautomorphism of  $(Q_i)$  with the companion  $k_1 = a^{-1}/b^{-1}$ .

*Proof.* Let  $(Q_\circ) \cong (Q_i)$ , and let  $\gamma$  be an isomorphism between them, then  $\gamma(x \cdot y) = \gamma(x) \circ \gamma(y) = R_a^{-1}\gamma(x) \cdot L_b^{-1}\gamma(y) = \beta(x) \cdot \alpha(y)$ , for all  $x, y \in Q$ , where  $\beta = R_a^{-1}\gamma$ ,



$\alpha = L_b^{-1}\gamma$ . So,  $(\beta, \alpha, \gamma)$  is an autotopism of  $(Q, \cdot)$ . Let  $\mathbf{1}$  and  $\mathbf{e}$  be the units of  $(Q, \cdot)$  and  $(Q, \circ)$ , respectively. So as  $\gamma$  is an isomorphism,  $\gamma(\mathbf{1}) = \mathbf{e}$ , where  $\mathbf{e} = b \cdot \alpha$ , and the following equalities hold:

$$\beta(\mathbf{1}) = R_a^{-1}\gamma(\mathbf{1}) = R_a^{-1}(\mathbf{e}) = R_a^{-1}(b \cdot \alpha) = b, \quad (18)$$

$$\alpha(\mathbf{1}) = L_b^{-1}\gamma(\mathbf{1}) = L_b^{-1}(\mathbf{e}) = L_b^{-1}(b \cdot \alpha) = \alpha. \quad (19)$$

From Proposition 4, (18) and (19) we obtain that

$$(\beta, \alpha, \gamma) = (H_{a^{-1}}, H_{a^{-1}}, H_{a^{-1}}L_{a^{-1}}^{-1}) \cdot (L_{k_1}\tau, \tau, L_{k_1}\tau),$$

where  $\tau$  is a left pseudoautomorphism of  $(Q, \cdot)$ , with the companion  $k_1 = a^{-1}/b^{-1}$ . Conversely, let  $\tau$  be a left pseudoautomorphism of  $(Q, \cdot)$ , with the companion  $k = a^{-1}/b^{-1}$ . Then  $(L_{k_1}\tau, \tau, L_{k_1}\tau)$  is an autotopism of  $(Q, \cdot)$ . So as  $(Q, \cdot)$  is a middle Bol loop,

$$(L_{a^{-1}}^{-1}L, L_{a^{-1}}^{-1}L, L_{a^{-1}}^{-1}L_{a^{-1}}^{-1}L)^{-1} = (H_{a^{-1}}, H_{a^{-1}}, H_{a^{-1}}L_{a^{-1}}^{-1})$$

is an autotopism of  $(Q, \cdot)$ . So we get that

$$(\beta, \alpha, \gamma) = (H_{a^{-1}}, H_{a^{-1}}, H_{a^{-1}}L_{a^{-1}}^{-1}) \cdot (L_{k_1}\tau, \tau, L_{k_1}\tau) = (H_{a^{-1}}L_{k_1}\tau, H_{a^{-1}}L_{k_1}\tau, H_{a^{-1}}L_{a^{-1}}^{-1}L_{k_1}\tau),$$

is an autotopism of  $(Q, \cdot)$ , and

$$H_{a^{-1}}L_{a^{-1}}^{-1}L_{k_1}\tau(x \cdot y) = H_{a^{-1}}L_{k_1}\tau(x) \cdot H_{a^{-1}}L_{a^{-1}}^{-1}\tau(y) \Leftrightarrow \gamma(x \cdot y) = \beta(x) \cdot \alpha(y) \quad (20)$$

for all  $x, y \in Q$ , where  $\gamma = H_{a^{-1}}L_{a^{-1}}^{-1}L_{k_1}\tau$ ,  $\beta = H_{a^{-1}}L_{k_1}\tau$ ,  $\alpha = H_{a^{-1}}L_{a^{-1}}^{-1}\tau$ . Also

$$\begin{aligned} \beta(\mathbf{1}) &= H_{a^{-1}}L_{k_1}\tau(\mathbf{1}) = H_{a^{-1}}L_{k_1}(\mathbf{1}) = H_{a^{-1}}(a^{-1}/b^{-1}) = \\ &= ((a^{-1}/b^{-1}) \setminus a^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1} = b. \end{aligned}$$

Denoting  $((a^{-1}/b^{-1}) \setminus a^{-1}) = z$ , we get  $(a^{-1}/b^{-1}) \cdot z = a^{-1}$ , and taking  $a^{-1}/b^{-1} = c$  we have  $c \cdot b^{-1} = a^{-1}$ , so  $c \cdot z = c \cdot b^{-1}$  i.e.  $z = b^{-1}$  and  $\alpha(\mathbf{1}) = H_{a^{-1}}L_{a^{-1}}^{-1}\tau(\mathbf{1}) = H_{a^{-1}}L_{a^{-1}}^{-1}(\mathbf{1}) = (a^{-1})^{-1} = \alpha$ .

Now, for  $\gamma = \mathbf{1}$  in (20) we obtain  $\gamma(x) = \beta(x) \cdot \alpha$ , which implies  $\gamma(x) = R_a\beta(x)$ , for all  $x \in Q$ , so

$$\beta = R_a^{-1}\gamma. \quad (21)$$

Taking  $x = \mathbf{1}$  in (20) we have  $\gamma(y) = b \cdot \alpha(y)$ , so  $\gamma(y) = L_b\alpha(y)$ , for all  $y \in Q$ , i.e.

$$\alpha = L_b^{-1}\gamma. \quad (22)$$

From (20), (21) and (22) we get:  $\gamma(x \cdot y) = \beta(x) \cdot \alpha(y) = R_a^{-1}\gamma(x) \cdot L_b^{-1}\gamma(y) = \gamma(x) \circ \gamma(y)$ , for all  $x, y \in Q$ , so  $(Q, \circ) \cong (Q, \cdot)$ .  $\square$

**Proposition 5.** Let  $(Q, \cdot)$  be an arbitrary loop. The following statements hold:

1.  $\varphi(N_i^{(\cdot)}) = N_i^{(\cdot)}$  and  $\varphi(N_m^{(\cdot)}) = N_m^{(\cdot)}$ , for every  $\varphi \in PS_r^{(\cdot)}$ ;
2.  $\varphi(N_r^{(\cdot)}) = N_r^{(\cdot)}$  and  $\varphi(N_m^{(\cdot)}) = N_m^{(\cdot)}$ , for every  $\varphi \in PS_l^{(\cdot)}$ ;

*Proof.* 1. Let  $a \in N_i^{(\cdot)}$ , and let  $\varphi$  be a right pseudoautomorphism of  $(Q, \cdot)$  with the companion  $c \in Q$ . Then

$$\begin{aligned} \varphi(a) \cdot [\varphi(x) \cdot (\varphi(y) \cdot c)] &= \varphi(a) \cdot (\varphi(x \cdot y) \cdot c) = \\ \varphi(a \cdot xy) \cdot c &= \varphi(ax \cdot y) \cdot c = \varphi(a \cdot x) \cdot (\varphi(y) \cdot c), \end{aligned}$$

for all  $x, y \in Q$ . So

$$\varphi(a) \cdot [\varphi(x) \cdot (\varphi(y) \cdot c)] = \varphi(a \cdot x) \cdot (\varphi(y) \cdot c), \quad (23)$$

for all  $x, y \in Q$ . Taking  $y = \varphi^{-1}(\varphi^{-1}c)$  in (23), where  $\varphi^{-1}c \cdot c = \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e}$  is the unit of the loop  $(Q, \cdot)$ , we obtain

$$\varphi(a) \cdot \varphi(x) = \varphi(a \cdot x), \quad (24)$$

for all  $x \in Q$ . Now, using (24), from (23) follows:

$$\varphi(a) \cdot [\varphi(x) \cdot (\varphi(y) \cdot c)] = (\varphi(a) \cdot \varphi(x)) \cdot (\varphi(y) \cdot c), \quad (25)$$

for all  $x, y \in Q$ . Denoting  $\varphi(x) = u$  and  $\varphi(y) \cdot c = v$ , (25) implies  $\varphi(a) \cdot uv = (\varphi(a) \cdot u)v$ , for all  $u, v \in Q$ , so  $\varphi(a) \in N_l^{(\zeta)}$ ,  $\forall a \in N_l^{(\zeta)}$ , i.e.

$$\varphi(N_l^{(\zeta)}) \subseteq N_l^{(\zeta)}. \quad (26)$$

So as the set of all right pseudoautomorphisms is a group, we have that  $\varphi^{-1}$  is a right pseudoautomorphism of the loop  $(Q, \cdot)$  as well, so  $\varphi^{-1}(N_l^{(\zeta)}) \subseteq N_l^{(\zeta)}$ . Hence, for  $a \in N_l^{(\zeta)}$  we get that  $\varphi^{-1}(a) \in N_l^{(\zeta)}$ , so  $a \in \varphi(N_l^{(\zeta)})$ , i.e.

$$N_l^{(\zeta)} \subseteq \varphi(N_l^{(\zeta)}). \quad (27)$$

From (26) and (27) follows  $\varphi(N_l^{(\zeta)}) = N_l^{(\zeta)}$ .

Let  $b \in N_m^{(\zeta)}$  and let  $\varphi$  be a right pseudoautomorphism of  $(Q, \cdot)$  with the companion  $c \in Q$ . Then, for  $\forall x, y \in Q$ , the following equalities hold:

$$\begin{aligned} \varphi(x) \cdot [\varphi(b) \cdot (\varphi(y) \cdot c)] &= \varphi(x) \cdot (\varphi(b \cdot y) \cdot c) = \\ \varphi(x \cdot by) \cdot c &= \varphi(xb \cdot y) \cdot c = \varphi(x \cdot b) \cdot (\varphi(y) \cdot c), \\ \varphi(x) \cdot [\varphi(b) \cdot (\varphi(y) \cdot c)] &= \varphi(x \cdot b) \cdot (\varphi(y) \cdot c). \end{aligned} \quad (28)$$

Taking  $y = \varphi^{-1}(c^{-1})$  in (28), we have

$$\varphi(x) \cdot \varphi(b) = \varphi(x \cdot b), \quad (29)$$

$\forall x \in Q$ . Now, using (29), the equality (28) implies

$$\varphi(x) \cdot [\varphi(b) \cdot (\varphi(y) \cdot c)] = (\varphi(x) \cdot \varphi(b)) \cdot (\varphi(y) \cdot c), \quad (30)$$

$\forall x, y \in Q$ . Denoting  $\varphi(x) = u$ ,  $\varphi(y) \cdot c = v$  in (30) we obtain  $u \cdot (\varphi(b) \cdot v) = (u \cdot \varphi(b))v$ , for all  $u, v \in Q$ , i.e.  $\varphi(b) \in N_m^{(\zeta)}$ ,  $\forall b \in N_m^{(\zeta)}$ , hence

$$\varphi(N_m^{(\zeta)}) \subseteq N_m^{(\zeta)}. \quad (31)$$

So as  $\varphi^{-1}$  is also a right pseudoautomorphism of the loop  $(Q, \cdot)$ , we get  $\varphi^{-1}(N_m^{(\zeta)}) \subseteq N_m^{(\zeta)}$ . Now, if  $b \in N_m^{(\zeta)}$  then  $\varphi^{-1}(b) \in N_m^{(\zeta)}$ ,  $\Rightarrow b \in \varphi(N_m^{(\zeta)})$ , i.e.

$$N_m^{(\zeta)} \subseteq \varphi(N_m^{(\zeta)}). \quad (32)$$

From (31) and (32) follows  $\varphi(N_m^{(\zeta)}) = N_m^{(\zeta)}$ .

2. Let  $a \in N_r^{(\zeta)}$  and let  $\varphi$  be a left pseudoautomorphism of  $(Q, \cdot)$  with the companion  $c \in Q$ . Then, for every  $x, y \in Q$ , the following equalities hold:

$$\begin{aligned} [(c \cdot \varphi(x)) \cdot \varphi(y)] \cdot \varphi(a) &= (c \cdot \varphi(x \cdot y)) \cdot \varphi(a) = c \cdot \varphi(xy \cdot a) = c \cdot \varphi(x \cdot ya) = \\ (c \cdot \varphi(x)) \cdot \varphi(ya), &\text{ so} \\ [(c \cdot \varphi(x)) \cdot \varphi(y)] \cdot \varphi(a) &= (c \cdot \varphi(x)) \cdot \varphi(ya). \end{aligned} \quad (33)$$

Taking  $x = \varphi^{-1}(c^{-1})$  in (33), where  $c \cdot c^{-1} = e$ ,  $e$  is the unit of the loop  $(Q, \cdot)$ , we obtain

$$\varphi(y) \cdot \varphi(a) = \varphi(y \cdot a), \quad (34)$$

$\forall y \in Q$ . Now, using (34), from (33) we get:

$$[(c \cdot \varphi(x)) \cdot \varphi(y)] \cdot \varphi(a) = (c \cdot \varphi(x)) \cdot (\varphi(y) \cdot \varphi(a)), \quad (35)$$

$\forall x, y \in Q$ . Denoting  $c \cdot \varphi(x) = u$  and  $\varphi(y) = v$ , from (35) follows:  $uv \cdot \varphi(a) = u \cdot (v \cdot \varphi(a))$ , for all  $u, v \in Q$ , so  $\varphi(a) \in N_r^{(\zeta)}, \forall a \in N_r^{(\zeta)}$ , i.e.

$$\varphi(N_r^{(\zeta)}) \subseteq N_r^{(\zeta)}. \quad (36)$$

So as  $\varphi^{-1} \in PS_r^{(\zeta)}$ , we have  $\varphi^{-1}(N_r^{(\zeta)}) \subseteq N_r^{(\zeta)}$ . So, for every  $a \in N_r^{(\zeta)}$ , we get  $\varphi^{-1}(a) \in N_r^{(\zeta)} \Rightarrow a \in \varphi(N_r^{(\zeta)})$ , i.e

$$N_r^{(\zeta)} \subseteq \varphi(N_r^{(\zeta)}). \quad (37)$$

From (36) and (37) follows  $\varphi(N_r^{(\zeta)}) = N_r^{(\zeta)}$ .

Let  $b \in N_m^{(\zeta)}$  and let  $\varphi$  be a left pseudoautomorphism of  $(Q, \cdot)$  with the companion  $c \in Q$ . Then, for  $\forall x, y \in Q$ , the following equalities hold:

$$\begin{aligned} [(c \cdot \varphi(x)) \cdot \varphi(b)] \cdot \varphi(y) &= (c \cdot \varphi(x \cdot b)) \cdot \varphi(y) = c \cdot \varphi(xb \cdot y) = c \cdot \varphi(x \cdot by) = \\ &= (c \cdot \varphi(x)) \cdot \varphi(b \cdot y), \text{ so} \\ [(c \cdot \varphi(x)) \cdot \varphi(b)] \cdot \varphi(y) &= (c \cdot \varphi(x)) \cdot \varphi(b \cdot y), \end{aligned} \quad (38)$$

$\forall y \in Q$ . Taking  $x = \varphi^{-1}(c^{-1})$  in (38), we obtain

$$\varphi(b) \cdot \varphi(y) = \varphi(b \cdot y), \quad (39)$$

$\forall x, y \in Q$ , and using (39), from (38) follows:

$$[(c \cdot \varphi(x)) \cdot \varphi(b)] \cdot \varphi(y) = (c \cdot \varphi(x)) \cdot (\varphi(b) \cdot \varphi(y)), \quad (40)$$

$\forall x, y \in Q$ . Denoting  $(c \cdot \varphi(x)) = u$ ,  $\varphi(y) = v$  in (40), we get  $(u \cdot \varphi(b)) \cdot v = u \cdot (\varphi(b) \cdot v)$ , for all  $u, v \in Q$ , i.e.  $\varphi(b) \in N_m^{(\zeta)}, \forall b \in N_m^{(\zeta)}$ , so

$$\varphi(N_m^{(\zeta)}) \subseteq N_m^{(\zeta)}. \quad (41)$$

Analogously, for  $\varphi^{-1}$  we have  $\varphi^{-1}(N_m^{(\zeta)}) \subseteq N_m^{(\zeta)}$ . So, if  $b \in N_m^{(\zeta)}$  then  $\varphi^{-1}(b) \in N_m^{(\zeta)} \Rightarrow b \in \varphi(N_m^{(\zeta)})$ , i.e

$$N_m^{(\zeta)} \subseteq \varphi(N_m^{(\zeta)}). \quad (42)$$

From (41) and (42) follows  $\varphi(N_m^{(\zeta)}) = N_m^{(\zeta)}$ .  $\square$

**Corollary.** Let  $(Q, \cdot)$  be an arbitrary loop and let  $\varphi$  be a right (left) pseudoautomorphism of  $(Q, \cdot)$ . Then the restriction  $\varphi/N_i^{(\zeta)} \in \text{Aut}N_i^{(\zeta)}$  (respectively  $\varphi/N_r^{(\zeta)} \in \text{Aut}N_r^{(\zeta)}$ ) and  $\varphi/N_m^{(\zeta)} \in \text{Aut}N_m^{(\zeta)}$ .

*Proof.* If  $\varphi$  is a right pseudoautomorphism of  $(Q, \cdot)$  then  $\varphi(N_i^{(\zeta)}) = N_i^{(\zeta)}$  and  $\varphi(N_m^{(\zeta)}) = N_m^{(\zeta)}$ , so  $\varphi/N_i^{(\zeta)}: N_i^{(\zeta)} \rightarrow N_i^{(\zeta)}$  and  $\varphi/N_m^{(\zeta)}: N_m^{(\zeta)} \rightarrow N_m^{(\zeta)}$  are bijections. Moreover, so as the nuclei of the loop  $(Q, \cdot)$  are associative subloops,  $\varphi/N_r^{(\zeta)} \in \text{Aut}N_r^{(\zeta)}$  and  $\varphi/N_m^{(\zeta)} \in \text{Aut}N_m^{(\zeta)}$ . Analogously, if  $\varphi$  is a left pseudoautomorphism then  $\varphi/N_i^{(\zeta)} \in \text{Aut}N_i^{(\zeta)}$ .  $\square$

**Proposition 6.** Let  $(Q, \cdot)$  be a right Bol loop and  $c \in Q$ . A mapping  $\varphi \in S_c$  is a middle pseudoautomorphism of the loop  $(Q, \cdot)$ , with the companion  $c$ , if and only if  $\varphi$  is a right pseudoautomorphism of  $(Q, \cdot)$ , with the companion  $c$ .



*Proof.* So as  $(Q, \cdot)$  is a right Bol loop, the equality  $(xc \cdot z) \cdot c = x \cdot (cz \cdot c)$  holds, for every  $x, y \in Q$ . Taking  $c \setminus y = z$  in the last equality, we get  $[(x \cdot c) \cdot (c \setminus y)] \cdot c = x \cdot [(c \cdot (c \setminus y)) \cdot c] = x \cdot yc$ , which implies  $(x \cdot c) \cdot (c \setminus y) = (x \cdot yc) \cdot c^{-1}$ , hence

$$(x/c^{-1}) \cdot (c \setminus y) = (x \cdot yc) \cdot c^{-1}, \quad (43)$$

for every  $x, y \in Q$ . If  $\varphi$  is a right pseudoautomorphism of  $(Q, \cdot)$ , with the companion  $c$ , then

$$\varphi(x \cdot y) \cdot c = \varphi(x) \cdot (\varphi(y) \cdot c) \Rightarrow \varphi(x \cdot y) = (\varphi(x) \cdot (\varphi(y) \cdot c)) \cdot c^{-1},$$

for every  $x, y \in Q$ , so using (43), we get  $\varphi(x \cdot y) = (\varphi(x)/c^{-1}) \cdot (c \setminus \varphi(y))$ ,  $\forall x, y \in Q$ , i.e.  $\varphi$  is a middle pseudoautomorphism of  $(Q, \cdot)$ , with the companion  $c$ . Conversely, if  $\varphi$  is a middle pseudoautomorphism of  $(Q, \cdot)$ , with the companion  $c$ , then  $\varphi(x \cdot y) = (\varphi(x)/c^{-1}) \cdot (c \setminus \varphi(y))$ ,  $\forall x, y \in Q$ , so using (43), we get  $\varphi(x \cdot y) = (\varphi(x) \cdot (\varphi(y) \cdot c)) \cdot c^{-1}$ , which implies  $\varphi(x \cdot y) \cdot c = \varphi(x) \cdot (\varphi(y) \cdot c)$ ,  $\forall x, y \in Q$ , i.e.  $\varphi$  is a right pseudoautomorphism of  $(Q, \cdot)$ , with the companion  $c$ .  $\square$

**Proposition 7.** Let  $(Q, \cdot)$  be a left Bol loop and  $c \in Q$ . A mapping  $\varphi \in S_Q$  is a middle pseudoautomorphism of the loop  $(Q, \cdot)$ , with the companion  $c$  if and only if  $\varphi$  is a left pseudoautomorphism of the loop  $(Q, \cdot)$ , with the companion  $c^{-1}$ .

*Proof.* Let  $(Q, \cdot)$  be a left Bol loop, then  $c^{-1} \cdot x = c \setminus x$ , for all  $x \in Q$ , so  $c^{-1}(z \cdot c^{-1}x) = (c^{-1} \cdot zc^{-1})x \Leftrightarrow z \cdot c^{-1}x = c \cdot [(c^{-1} \cdot zc^{-1})x]$ , for every  $x, y \in Q$ . Taking  $z \rightarrow y/c^{-1}$  in the last equality we get

$$(y/c^{-1}) \cdot (c^{-1} \cdot x) = c \cdot [(c^{-1} \cdot (y/c^{-1}) \cdot c^{-1}) \cdot x] \Leftrightarrow \\ (y/c^{-1}) \cdot (c \setminus x) = c(c^{-1}y \cdot x),$$

for all  $x, y \in Q$ , where  $\varphi \in S_Q$ . So, a mapping  $\varphi \in S_Q$  is a middle pseudoautomorphism of the loop  $(Q, \cdot)$ , with the companion  $c$ , if and only if

$$\varphi(y \cdot x) = (\varphi(y)/c^{-1}) \cdot (c \setminus \varphi(x)) = c \cdot [(c^{-1} \cdot \varphi(y)) \cdot \varphi(x)],$$

for  $\forall x, y \in Q$ , which is equivalent to  $c^{-1} \cdot \varphi(y \cdot x) = (c^{-1} \cdot \varphi(y)) \cdot \varphi(x)$ , for all  $x, y \in Q$ , i.e. if and only if  $\varphi$  is a left pseudoautomorphism with the companion  $c^{-1}$ .  $\square$

**Proposition 8 [10].** Let  $(Q, \cdot)$  be a right Bol loop and let  $(Q, \circ)$  be the corresponding middle Bol loop. The following statements hold:

1.  $PS_m^{(\circ)} = PS_r^{(\circ)} = PS_r^{(\circ)}$ ,
2.  $PS_l^{(\circ)} = PS_m^{(\circ)}$ ,
3.  $\alpha \in PS_l^{(\circ)} \Leftrightarrow I\alpha I \in PS_r^{(\circ)}$ , where  $I: Q \rightarrow Q, I(x) = x^{-1}, \forall x \in Q$ .

**Proposition 9.** Let  $(Q, \cdot)$  be a left Bol loop and let  $(Q, \circ)$  be the corresponding middle Bol loop. The following statements hold:

1.  $PS_m^{(\circ)} = PS_l^{(\circ)} = PS_r^{(\circ)}$ ,
2.  $PS_r^{(\circ)} = PS_m^{(\circ)}$ ,
3.  $\alpha \in PS_l^{(\circ)} \Leftrightarrow I\alpha I \in PS_l^{(\circ)}$ .

*Proof.* 1. Let  $\varphi$  be a middle pseudoautomorphism of  $(Q, \cdot)$  with the companion  $c$ . Then  $\varphi$  satisfies (5). Using (4), the equality (5) implies:

$$\varphi(x // y^{-1}) = [\varphi(x) \circ c] // [(\varphi(y) \setminus c)^{-1}]^{-1}$$

which is equivalent to

$$\varphi(x) \circ c = \varphi(x // y^{-1}) \circ [(\varphi(y) \backslash c)^{-1}]^{-1}, \quad (44)$$

where  $(//)$  is the left division in  $(Q, \circ)$ . So as  $(Q, \circ)$  is a middle Bol loop  $[(\varphi(y) \backslash c)^{-1}]^{-1} = \varphi(y) \backslash c$ ,  $\forall y \in Q$ , where " $\backslash$ " is the right division in  $(Q, \circ)$ , hence (44) is equivalent to

$$\varphi(x) \circ c = \varphi(x // y^{-1}) \circ (\varphi(y) \backslash c)$$

Denoting  $x // y^{-1}$  by  $z$ , the last equality implies:

$$\varphi(z \circ y^{-1}) \circ c = \varphi(z) \circ (\varphi(y) \backslash c). \quad (45)$$

For  $z = y = e$ , from (45) follows  $\varphi(e) = e$ . Taking  $z = e$  in (45) and using the equality  $\varphi(e) = e$ , we get  $\varphi(y^{-1}) \circ c = \varphi(y) \backslash c$ , so (45) is equivalent to

$$\varphi(z \circ y^{-1}) \circ c = \varphi(z) \circ \varphi(y^{-1}) \circ c,$$

i.e.  $\varphi$  is a right pseudoautomorphism  $(Q, \circ)$  with the companion  $c$ . Conversely, if  $\varphi \in PS_r^{(\circ)}$  then  $\exists c \in Q$ :  $\varphi(x \circ y) \circ c = \varphi(x) \circ (\varphi(y) \circ c)$ ,  $\forall x, y \in Q$ . Using (3), from the last equality we get

$$\varphi(x/y^{-1})/c^{-1} = \varphi(x)/(\varphi(y)/c^{-1})^{-1} \Leftrightarrow \varphi(x) = (\varphi(x/y^{-1})/c^{-1}) \cdot I(\varphi(y)/c^{-1}).$$

Denoting  $x/y^{-1} = z$ , the previous equality implies

$$\varphi(z \cdot y^{-1}) = (\varphi(z)/c^{-1}) \cdot I(\varphi(y)/c^{-1}). \quad (46)$$

Taking  $z = e$ , from (46) follows  $\varphi(y^{-1}) = c \cdot I(\varphi(y)/c^{-1})$ , hence  $c^{-1} \cdot \varphi(y^{-1}) = I(\varphi(y)/c^{-1})$ , so

(46) implies  $\varphi(z \cdot y^{-1}) = (\varphi(z)/c^{-1}) \cdot (c^{-1} \cdot \varphi(y^{-1}))$ , which is equivalent to  $\varphi(z \cdot y^{-1}) = (\varphi(z)/c^{-1}) \cdot (c \backslash \varphi(y^{-1}))$ ,  $\forall y, z \in Q$ , i.e.  $\varphi$  is a middle pseudoautomorphism of  $(Q, \cdot)$ , with the companion  $c$ , and  $PS_m^{(\circ)} = PS_i^{(\circ)} = PS_r^{(\circ)}$ .

2. Let  $\varphi$  be a right pseudoautomorphism of the loop  $(Q, \cdot)$ , with the companion  $b$ :

$$\varphi(x \cdot y) \cdot b = \varphi(x) \cdot (\varphi(y) \cdot b), \quad (47)$$

$\forall x, y \in Q$ . Using (4) in (47), we get

$$\varphi(x // y^{-1}) // b^{-1} = \varphi(x) // (\varphi(y) // b^{-1})^{-1}. \quad (48)$$

So as  $(Q, \cdot)$  is a middle Bol loop, denoting  $(\varphi(y) // b^{-1})^{-1} = u$ , we have:  $\varphi(y) // b^{-1} = u^{-1} \Leftrightarrow \varphi(y) = u^{-1} \circ b^{-1} \Leftrightarrow b \circ u = (\varphi(y))^{-1} \Leftrightarrow u = b \backslash (\varphi(y))^{-1}$ , so

$$(\varphi(y) // b^{-1})^{-1} = b \backslash (\varphi(y))^{-1}. \quad (49)$$

Using (49), the equality (48) implies

$$\varphi(x // y^{-1}) // b^{-1} = \varphi(x) // (b \backslash (\varphi(y))^{-1}). \quad (50)$$

Denoting  $x // y^{-1} = z$ , i.e.  $z \circ y^{-1} = x$ , (50) implies

$$\varphi(z) // b^{-1} = \varphi(z \circ y^{-1}) // (b \backslash (\varphi(y))^{-1}),$$

which is equivalent to:

$$\varphi(z \circ y^{-1}) = (\varphi(z) // b^{-1}) \circ (b \backslash (\varphi(y))^{-1}). \quad (51)$$

Taking  $z = e$  in (51), we get

$$\varphi(y^{-1}) = b \circ (b \backslash (\varphi(y))^{-1}) = (\varphi(y))^{-1},$$

$\forall y \in Q$ , so (51) is equivalent to

$$\varphi(z \circ y^{-1}) = (\varphi(z) // b^{-1}) \circ (b \backslash \varphi(y^{-1})),$$

$\forall y, z \in Q$ , i.e.  $\varphi \in PS_m^{(\circ)}$ , with the companion  $b$ . Conversely, if  $\varphi \in PS_m^{(\circ)}$  then  $\exists c \in Q$ :

$$\varphi(x \circ y) = (\varphi(x) // c^{-1}) \circ (c \backslash \backslash \varphi(y)), \quad (52)$$

$\forall x, y \in Q$ . Denoting  $\varphi(x) // c^{-1} = u$  and using (3), we get  $u \circ c^{-1} = \varphi(x)$ ,  $u/c = \varphi(x)$ ,  $\varphi(x) \cdot c = u$ , so

$$\varphi(x) // c^{-1} = \varphi(x) \cdot c. \quad (53)$$

Analogously, denoting  $c \backslash \backslash \varphi(y) = v$  and using (3), we get:  $c \circ v = \varphi(y)$ ,  $c/v^{-1} = \varphi(y)$ ,  $\varphi(y) \cdot v^{-1} = c$ ,  $v^{-1} = \varphi(y)^{-1} \cdot c$ ,  $v = I(I\varphi(y) \cdot c)$ , so

$$c \backslash \backslash \varphi(y) = I(I\varphi(y) \cdot c), \quad (54)$$

$\forall y \in Q$ . Now, using (53) and (54), the equality (52) implies

$$\varphi(x/y^{-1}) = (\varphi(x) \cdot c) / (I\varphi(y) \cdot c),$$

which is equivalent to

$$\varphi(x) \cdot c = \varphi(x/y^{-1}) \cdot (I\varphi(y) \cdot c).$$

Denoting  $x/y^{-1} = z$  in the last equality, we get

$$\varphi(z \cdot y^{-1}) \cdot c = \varphi(z) \cdot (I\varphi(y) \cdot c). \quad (55)$$

Taking  $z = e$ , from (55) follows  $\varphi(y^{-1}) \cdot c = I\varphi(y) \cdot c$ ,  $\Rightarrow \varphi(y^{-1}) = I\varphi(y)$ ,  $\forall y \in Q$ , so

$$\varphi I = I\varphi. \quad (56)$$

From (55) and (56), we get

$$\varphi(z \cdot y^{-1}) \cdot c = \varphi(z) \cdot (\varphi(y^{-1}) \cdot c),$$

$\forall y, z \in Q$ , i.e.  $\varphi \in PS_r^{(\circ)}$ . So  $PS_r^{(\circ)} = PS_m^{(\circ)}$ .

3. If  $\varphi \in PS_l^{(\circ)}$  then there exists an element  $c \in Q$ , such that, for  $\forall x, y \in Q$ ,

$$c \circ \varphi(x \circ y) = (c \circ \varphi(x)) \circ \varphi(y). \quad (57)$$

Using (3), the equality (57) takes the form  $c/\varphi(x/y^{-1})^{-1} = (c/\varphi(x)^{-1})/\varphi(y)^{-1} \Leftrightarrow c/\varphi(x)^{-1} = [c/\varphi(x/y^{-1})^{-1}] \cdot \varphi(y)^{-1}$ , so denoting  $x/y^{-1} = z$ , we get

$$c/I\varphi(z \cdot y^{-1}) = [c/I\varphi(z)] \cdot I\varphi(y), \quad (58)$$

which (for  $z = e$ ) implies  $c/I\varphi I(y) = c \cdot I\varphi(y)$ , so  $c/I\varphi(y) = c \cdot I\varphi I(y)$ ,  $\forall x, y \in Q$ , i.e.

$$c/I\varphi = c \cdot I\varphi I. \quad (59)$$

Using (59), from (58) follows  $c \cdot I\varphi I(z \cdot y) = [c \cdot I\varphi I(z)] \cdot I\varphi I(y)$ ,  $\forall y, z \in Q$ , i.e.  $I\varphi I$  is a left pseudoautomorphism of  $(Q, \circ)$ , with the companion  $c$ .  $\square$

**Corollary.** Let  $(Q, \circ)$  be a middle Bol loop and let  $\varphi$  be a middle pseudoautomorphism of  $(Q, \circ)$ , then  $\varphi(N_i^{(\circ)}) = N_i^{(\circ)}$  and  $\varphi(N_r^{(\circ)}) = N_r^{(\circ)}$ .

*Proof.* Let  $(Q, \cdot)$  be the corresponding right Bol loop of  $(Q, \circ)$ , then  $PS_l^{(\circ)} = PS_m^{(\circ)}$ , so  $\varphi$  is a left pseudoautomorphism of  $(Q, \cdot)$ . Also the equality  $N_r^{(\circ)} = N_r^{(\circ)}$  holds, so  $\varphi(N_r^{(\circ)}) = N_r^{(\circ)} = N_r^{(\circ)} = N_r^{(\circ)}$ .  $\square$

### Bibliography:

1. БЕЛЮСОВ, В. Основы теории квазигрупп и луп. Москва: Наука, 1967. 223 с.
2. ГВАРАМИЯ, V. Об одном классе луп. В: Ученые записки МГПИ, 1971, том 378, с.23-34.
3. ROBINSON, D.A. Bol loops. In: *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1966, vol.123, p.341-354.
4. SYRBU, P. On middle Bol loops. In: *ROMAI J.*, 2010, vol.6(2), p.229-236.
5. GRECU, I., SYRBU, P. On some isostrophy invariants of Bol loops. In: *Bull. Transylv. Univ. Braşov, Ser. C.* 2012, vol.5(54), p.145-154.
6. GREER, M., KINYON, M. Pseudoautomorphisms of Bruck loops and their generalizations. In: *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 2012, vol.53(3), p.383-389.

7. PFLUGFELDER, H.O. *Quasigroups and loops: Introduction*. Sigma Series in Pure Mathematics, Heldermann.1990. 145 p.
8. ФЛОРЯ, И.А. *Квазигруппы Бола. Исследования по общей алгебре*. АН МССР, 1965, с.136-153.
9. ФЛОРЯ, И.А. Лупы с односторонней обратимостью. В: *Известия АН МССР*, 1965, №7, с.68-80.
10. SYRBU, P., GRECU, I. On some groups related to middle Bol loops. În: *Studia Universitas Moldaviae*. Revistă științifică a Universității de Stat din Moldova, 2013, nr.7 (67), p.10-18.
11. DRISCO, A. Loops with Transitive Automorphisms. In: *Journal of algebra*, 1996, vol.184, p.213-229.
12. BRUCK, R.H. *A survey of binary systems*. Springer Verlag, Berlin-Gottinger-Heidelberg, 1958.

Prezentat la 27.11.2015

# APPROACHES FOR SOLVING BIMATRIX INFORMATIONAL EXTENDED GAMES

Boris HÂNCU, Mihai COCÎRLĂ

*Moldova State University*

Different ways of solving bimatrix games in complete and perfect information (or over the set of informational extended strategies) are studied in the present paper. The Nash and Bayes-Nash solutions for informational extended games are discussed.

**Keywords:** non cooperative game, payoff function, set of strategies, informational extended games, Bayes-Nash equilibrium.

## MODALITAȚI DE SOLUȚIONARE A JOCURILOR BIMATRICEALE INFORMAȚIONAL EXTINSE

În acest articol sunt analizate diferite moduri de soluționare a jocurilor bimatriceale în informație completă și perfectă. Informația perfectă permite jucătorilor să utilizeze strategii informaționale extinse. Se analizează soluții de tip Nash și Bayes-Nash pentru jocuri în strategii informaționale extinse.

**Cuvinte cheie:** jocuri noncooperatiste, funcții de utilitate, multime de strategii, joc informațional extins, echilibru de tip Bayes-Nash.

## 1 Bimatrix informational extended games

We consider the informational non extended bimatrix game in the strategic form

$$\Gamma = \langle I, J, A, B \rangle, \quad (1.1)$$

where  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  is the line index set (the set of strategies of the player 1),  $J = \{1, 2, \dots, m\}$  is the column index set (the set of strategies of the player 2) and  $A = \|a_{ij}\|_{\substack{j \in J \\ i \in I}}$ ,  $B = \|b_{ij}\|_{\substack{j \in J \\ i \in I}}$  are the payoff matrices of player 1 and player 2, respectively. All players know exactly the payoff matrices and the sets of strategies. Players maximize their payoffs. So the game is in **complete information** (the players know exactly the normal form of the game). We assign to players an additional characteristic which we call *an informational type of the payer* [1,2]. More exactly, we say that the player 1 is of the "2  $\rightarrow$  1 informational type" and respectively, the player 2 is of the "1  $\rightarrow$  2 informational type" if the player 1 (respectively player 2) knows the precise value of the strategy which will be chosen by the player 2 (respectively by the player 1). These conditions stipulate that we can analyze the informational extension of the game generated by a double-sided informational flow, denoted by  $1 \rightleftharpoons 2$ . It means the player 1 knows exactly the value of the strategy chosen by the player 2, as well as, simultaneously, the player 2 knows exactly the value of the strategy chosen by the player 1. So the game (1.1) is in **perfect information** over the sets of pure strategies.

The conditions described above stipulate that we can use the set of informational extended strategies of the player 1 (respectively 2) which is the set of the functions  $\Theta_1 = \{\theta_1^\alpha : J \rightarrow I\}_{\alpha=1}^{\varkappa_1}$  and, respectively  $\Theta_2 = \{\theta_2^\beta : I \rightarrow J\}_{\beta=1}^{\varkappa_2}$ . It is easy to see that  $\varkappa_1 = n^m$  and  $\varkappa_2 = m^n$ . Thus, the informational extended strategies of the player 1 are the functions  $\theta_1^\alpha$  such that, for all  $j \in J$ , there is  $i_j^\alpha \in I$  such that  $\theta_1^\alpha(j) = i_j^\alpha$  and it means the following: the player 1 will choose the line  $i_j^\alpha \in I$  if the player 2 will choose the column  $j \in J$ . Respectively, the informational extended strategies of the player 2 are functions  $\theta_2^\beta$  such that, for all  $i \in I$ , there is  $j_i^\beta \in J$  such that  $\theta_2^\beta(i) = j_i^\beta$  and it means the following: the player 2 will choose the column  $j_i^\beta \in J$  if the player 1 will choose the line  $i \in I$ .

It should be mentioned that the players do not know the informational type of each other. In other words, the players do not know the informational extended strategies of each others and from

this point of view we can consider that the game is in **imperfect information** structure over the sets of the informational extended strategies.

Denote by  $Game(1 \rightleftharpoons 2)$  the bimatrix game in the informational extended strategies, described above. Remark that the notation  $Game\left(1 \overset{\text{inf}}{\rightleftharpoons} 2\right)$  does not represent the normal form. This game is in imperfect information on the set of informational extended strategies, but because we do not know yet the normal form, we can not say if this game is in complete or incomplete information. The quantification of information in the games of type  $Game\left(1 \overset{\text{inf}}{\rightleftharpoons} 2\right)$  is done by means of functions which represent informational extended strategies. We can use the following approach to solve the informational extended game  $Game(1 \rightleftharpoons 2)$ .

## 2 Solving the informational extended game by means of the normal form

Denote by

$$gr\theta_1^\alpha = \{(i, j) : j \in J, i \equiv i_j^\alpha = \theta_1^\alpha(j)\}, \quad gr\theta_2^\beta = \{(i, j) : i \in I, j \equiv j_i^\beta = \theta_2^\beta(i)\}$$

the graphs of the informational extended strategies  $\theta_1^\alpha$  and  $\theta_2^\beta$ . It is clear that  $gr\theta_1^\alpha$  (respectively  $gr\theta_2^\beta$ ) is the set of the informational non extended strategy profiles generated by the informational extended strategy  $\theta_1^\alpha$  (respectively  $\theta_2^\beta$ ).

According to [3] we can construct the normal form of the informational extended game, denoted by

$$\Gamma(1 \rightleftharpoons 2) = \langle I, \Theta_1, \Theta_2, A(1 \rightleftharpoons 2), B(1 \rightleftharpoons 2) \rangle \quad (2.1)$$

where the payoff matrices of the player 1 is  $A(1 \rightleftharpoons 2) = \|a_{\alpha\beta}\|_{\alpha=1, \chi_1}^{\beta=1, \chi_2}$ , for

$$a_{\alpha\beta} = \begin{cases} \max_{(i,j) \in [gr\theta_1^\alpha \cap gr\theta_2^\beta]} a_{ij} & \text{if } gr\theta_1^\alpha \cap gr\theta_2^\beta \neq \emptyset, \\ -\infty & \text{if } gr\theta_1 \cap gr\theta_2 = \emptyset, \end{cases} \quad (2.2)$$

and of the player 2 is  $B(1 \rightleftharpoons 2) = \|b_{\alpha\beta}\|_{\alpha=1, \chi_1}^{\beta=1, \chi_2}$ , for

$$b_{\alpha\beta} = \begin{cases} \max_{(i,j) \in [gr\theta_1^\alpha \cap gr\theta_2^\beta]} b_{ij} & \text{if } gr\theta_1^\alpha \cap gr\theta_2^\beta \neq \emptyset, \\ -\infty & \text{if } gr\theta_1 \cap gr\theta_2 = \emptyset. \end{cases} \quad (2.3)$$

The game  $\Gamma(1 \rightleftharpoons 2)$  is one in **complete** information because the players known exactly their payoff matrices and in **imperfect** information because the players do not know what kind of informational extended strategy will be chosen by each others.

Finally, to determine the Nash equilibrium profiles in the bimatrix informational extended game of type  $\Gamma(1 \rightleftharpoons 2)$  we have to do the following steps:

- construct the sets of the informational extended strategies of the players, i.e.  $\Theta_1 = \{\theta_1^\alpha : J \rightarrow I\}_{\alpha=1}^{\chi_1}$  and  $\Theta_2 = \{\theta_2^\beta : I \rightarrow J\}_{\beta=1}^{\chi_2}$ ;
- determine the sets of all non informational extended strategy profiles generated by the informational extended strategies  $\theta_1^\alpha$  and  $\theta_2^\beta$ , i.e.  $gr\theta_1^\alpha$ ,  $gr\theta_2^\beta$  and intersection  $gr\theta_1^\alpha \cap gr\theta_2^\beta$ ;

- construct the payoff matrices  $A(1 \rightleftharpoons 2)$  and  $B(1 \rightleftharpoons 2)$  according to the relations (2.2)-(2.3);
- using existent algorithms, to determine the Nash equilibrium profile in the bimatrix game with the matrices  $A(1 \rightleftharpoons 2)$  and  $B(1 \rightleftharpoons 2)$  from (2.2)-(2.3).

In the following example we illustrate the described above methods (see [3]).

**Example 2.1** We construct the normal form of the "1  $\rightleftharpoons$  2" informational extended game and determine the Nash equilibrium profiles in the following bimatrix game  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Solution.** The Nash equilibrium profile in the bimatrix game with informational non extended strategies is (2, 1). The set of the informational extended strategies of the player 1 is

$$\Theta_1 = \left\{ \theta_1^\alpha(j) = i_j^\alpha, j = \overline{1, 3}, i_j^\alpha \in I \right\}_{\alpha=\overline{1, 8}} \text{ where } \theta_1^1(j) = 1 \forall j = 1, 2, 3; \theta_1^2(j) = 2 \forall j = 1, 2, 3;$$

$$\theta_1^3(j) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 1, 2, \\ 2 & \text{if } j = 3, \end{cases} \theta_1^4(j) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 1, 3, \\ 2 & \text{if } j = 2, \end{cases} \theta_1^5(j) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 2, 3, \\ 2 & \text{if } j = 1, \end{cases} \theta_1^6(j) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 1, \\ 2 & \text{if } j = 2, 3, \end{cases}$$

$$\theta_1^7(j) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 2, \\ 2 & \text{if } j = 1, 3, \end{cases} \theta_1^8(j) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 3, \\ 2 & \text{if } j = 1, 2. \end{cases} \text{ The set of the informational extended strategies}$$

$$\text{of the player 2 is } \Theta_2 = \left\{ \theta_2^\beta(i) = j_i^\beta, i = \overline{1, 2}, j_i^\beta \in J \right\}_{\beta=\overline{1, 9}}, \text{ where } \theta_2^1(i) = 1 \forall i = 1, 2; \theta_2^2(i) = 2$$

$$\forall i = 1, 2; \theta_2^3(i) = 3 \forall i = 1, 2; \theta_2^4(i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 1, \\ 2 & \text{if } i = 2, \end{cases} \theta_2^5(i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 2, \\ 2 & \text{if } i = 1, \end{cases} \theta_2^6(i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 1, \\ 3 & \text{if } i = 2, \end{cases}$$

$$\theta_2^7(i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 2, \\ 3 & \text{if } i = 1, \end{cases} \theta_2^8(i) = \begin{cases} 2 & \text{if } i = 1, \\ 3 & \text{if } i = 2, \end{cases} \theta_2^9(i) = \begin{cases} 3 & \text{if } i = 1, \\ 2 & \text{if } i = 2. \end{cases} \text{ To determine payoffs of the players,}$$

in the following table we represent the graph intersections  $gr\theta_1^\alpha \cap gr\theta_2^\beta$  for  $\alpha = \overline{1, 8}$  and  $\beta = \overline{1, 9}$ :

$\cap$	$gr\theta_2^1$	$gr\theta_2^2$	$gr\theta_2^3$	$gr\theta_2^4$	$gr\theta_2^5$	$gr\theta_2^6$	$gr\theta_2^7$	$gr\theta_2^8$	$gr\theta_2^9$
$gr\theta_1^1$	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 1)	(1, 3)	(1, 2)	(1, 3)
$gr\theta_1^2$	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 2)	(2, 1)	(2, 3)	(2, 1)	(2, 3)	(2, 2)
$gr\theta_1^3$	(1, 1)	(1, 2)	(2, 3)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 1)	$\emptyset$	(1, 2)	$\emptyset$
$gr\theta_1^4$	(1, 1)	(2, 2)	(1, 3)	(1, 1)	$\emptyset$	(1, 1)	(1, 3)	$\emptyset$	(1, 3)
$gr\theta_1^5$	(2, 1)	(1, 2)	(1, 3)	$\emptyset$	(1, 2)	$\emptyset$	(1, 3)	(1, 2)	(1, 3)
$gr\theta_1^6$	(1, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(1, 1)	$\emptyset$	(1, 1)	$\emptyset$	(2, 3)	(2, 2)
$gr\theta_1^7$	(2, 1)	(1, 2)	(2, 3)	$\emptyset$	(1, 2)	(2, 3)	(2, 1)	(1, 2)	$\emptyset$
$gr\theta_1^8$	(2, 1)	(2, 2)	(1, 3)	(2, 2)	(2, 1)	$\emptyset$	(1, 3)	$\emptyset$	(1, 3)

Using this table and relations (2.2)-(2.3) we can construct the payoff matrices of the player and finally obtain the following bimatrix game with elements type  $(a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta})$ :

$$\left( \begin{array}{cccccccccc} (3, 0) & (5, \underline{5}) & (\underline{4}, 1) & (3, 0) & (5, \underline{5}) & (\underline{3}, 0) & (4, 1) & (\underline{5}, \underline{5}) & (4, 1) & \\ (\underline{6}, \underline{4}) & (\underline{7}, \underline{3}) & (2, 2) & (\underline{7}, \underline{3}) & (\underline{6}, \underline{4}) & (2, 2) & (\underline{6}, \underline{4}) & (2, 2) & (\underline{7}, \underline{3}) & \\ (3, 0) & (5, \underline{5}) & (2, 2) & (3, 0) & (5, \underline{5}) & (\underline{3}, 2) & (-\infty) & (3, \underline{5}) & (-\infty) & \\ (3, 0) & (\underline{7}, \underline{3}) & (\underline{4}, 1) & (\underline{7}, \underline{3}) & (-\infty) & (\underline{3}, 0) & (4, 1) & (-\infty) & (\underline{7}, \underline{3}) & \\ (\underline{6}, \underline{4}) & (5, \underline{5}) & (\underline{4}, 1) & (-\infty) & (\underline{7}, \underline{5}) & (-\infty) & (\underline{6}, \underline{4}) & (\underline{5}, \underline{5}) & (4, 1) & \\ (3, 0) & (\underline{7}, \underline{3}) & (2, 2) & (\underline{7}, \underline{3}) & (-\infty) & (\underline{3}, 2) & (-\infty) & (2, 2) & (\underline{7}, \underline{3}) & \\ (\underline{6}, \underline{4}) & (\underline{7}, \underline{5}) & (\underline{4}, 2) & (-\infty) & (\underline{6}, \underline{5}) & (2, 2) & (\underline{6}, \underline{4}) & (\underline{5}, \underline{5}) & (-\infty) & \\ (\underline{6}, \underline{4}) & (\underline{7}, \underline{3}) & (\underline{4}, 1) & (\underline{7}, \underline{3}) & (\underline{6}, \underline{4}) & (-\infty) & (\underline{6}, \underline{4}) & (-\infty) & (\underline{7}, \underline{3}) & \end{array} \right) \quad (2.4)$$



where  $(-\infty)$  denote  $(-\infty, -\infty)$ .

Below it is shown the accordance between Nash equilibrium profiles in the bimatrix game  $\Gamma \left( 1 \stackrel{\text{inf}}{\rightleftharpoons} 2 \right)$  with matrices from (2.4) and, in the square brackets, profiles in the non informational extended game  $\Gamma$  from (1.1), that are generated by the respectively informational extended strategies:

$$NE \left[ \Gamma \left( 1 \stackrel{\text{inf}}{\rightleftharpoons} 2 \right) \right] = \{ (\theta_1^1, \theta_2^8) [(1, 2)], (\theta_1^2, \theta_2^1) [(2, 1)], (\theta_1^3, \theta_2^7) [(2, 1)], (\theta_1^4, \theta_2^2) [(2, 2)], (\theta_1^4, \theta_2^4) [(2, 2)], (\theta_1^4, \theta_2^9) [(2, 2)], (\theta_1^5, \theta_2^5) [(2, 1)], (\theta_1^5, \theta_2^8) [(1, 2)], (\theta_1^6, \theta_2^2) [(2, 2)], (\theta_1^6, \theta_2^4) [(2, 2)], (\theta_1^7, \theta_2^2) [(1, 2)], (\theta_1^7, \theta_2^8) [(1, 2)], (\theta_1^8, \theta_2^1) [(2, 1)], (\theta_1^8, \theta_2^7) [(2, 1)] \}.$$

### 3 Solving the informational extended game by means of the informational non extended game

We can describe the informational extended strategies in bimatrix game as follows: to all informational extended strategies  $\theta_1^\alpha$ , respectively  $\theta_2^\beta$ , we put in correspondence a set

$$I^\alpha = \{ i_j^\alpha : i_j^\alpha \in I, \forall j = \overline{1, m} \} \quad \text{and} \quad J^\beta = \{ j_i^\beta : j_i^\beta \in J, \forall i = \overline{1, n} \}.$$

So, for all  $j \in J$ ,  $\theta_1^\alpha(j) = i_j^\alpha \in I^\alpha$  and for all  $i \in I$ ,  $\theta_2^\beta(i) = j_i^\beta \in J^\beta$ . Denote by  $gr\theta_1^\alpha = \{ (j, i_j^\alpha) \equiv (i_j^\alpha, j) : j \in J, i_j^\alpha \in I^\alpha \}$  and  $gr\theta_2^\beta = \{ (i, j_i^\beta) \equiv (j_i^\beta, i) : i \in I, j_i^\beta \in J^\beta \}$  the sets of the informational non extended strategy profiles of the player 1, respectively 2, generated by the informational extended strategies  $\theta_1^\alpha$  and  $\theta_2^\beta$ , respectively. Denote by

$$difI^\alpha = \{ i_j^\alpha \in I^\alpha : i_j^\alpha \neq i_k^\alpha, \forall j, k \in J, j \neq k \} \quad \text{and} \quad difJ^\beta = \{ j_i^\beta \in J^\beta : j_i^\beta \neq j_r^\beta, \forall i, r \in I, i \neq r \}.$$

Then the set  $difI^\alpha$ , respectively  $difJ^\beta$ , is the set of informational non extended strategies of the player 1, respectively 2, generated by the informational extended strategies  $\theta_1^\alpha$ , respectively  $\theta_2^\beta$ . Here  $\alpha = \overline{1, m}$  and  $\beta = \overline{1, n}$ . Using these notations, we can represent the informational extended strategies  $\theta_1^\alpha$ , respectively  $\theta_2^\beta$ , by the cortege  $\mathcal{I}^\alpha = (i_1^\alpha, i_2^\alpha, \dots, i_j^\alpha, \dots, i_m^\alpha)$  where:  $i_j^\alpha \in I^\alpha, \forall j = \overline{1, m}$ , respectively  $\mathcal{J}^\beta = (j_1^\beta, j_2^\beta, \dots, j_i^\beta, \dots, j_n^\beta)$ , where  $j_i^\beta \in J^\beta, \forall i = \overline{1, n}$ .

Now, according to [4], we can construct the normal form of the bimatrix game

$$\Gamma \left( \theta_1^\alpha, \theta_2^\beta \right) = \left\langle I, J, A^\alpha, B^\beta \right\rangle, \quad (3.1)$$

that is an informational non extended game generated by the informational extended strategies  $(\theta_1^\alpha, \theta_2^\beta)$ . Here  $A^\alpha = \|a_{i_j^\alpha j_i^\beta}\|_{i \in I}^{j \in J}$ ,  $B^\beta = \|b_{i_j^\alpha j_i^\beta}\|_{i \in I}^{j \in J}$ ,  $i_j^\alpha \in I^\alpha$ ,  $j_i^\beta \in J^\beta$ . The game  $\Gamma \left( \theta_1^\alpha, \theta_2^\beta \right)$  is played as follows: independently and simultaneously each player  $k = \overline{1, 2}$  chooses the informational non extended strategy  $i \in I$ ,  $j \in J$  after that players 1 and 2 calculate the value of the informational extended strategies  $i_j^\alpha = \theta_1^\alpha(j)$  and  $j_i^\beta = \theta_2^\beta(i)$ , and further each player calculates the payoff values  $a_{i_j^\alpha j_i^\beta}$ ,  $b_{i_j^\alpha j_i^\beta}$ , and with this the game is finished. It is clear that for all strategy profiles  $(i, j)$  in the game  $\Gamma = \langle I, J, A, B \rangle$  from (1.1) the following realization  $(i_j^\alpha = \theta_1^\alpha(j), j_i^\beta = \theta_2^\beta(i))$  in terms of the informational extended strategies will correspond. The game (3.1) is the bimatrix game with complete and imperfect information over the set of informational non extended strategies  $I, J$ .

Finally, to determine the Nash equilibrium profiles in the bimatrix game of type  $\Gamma \left( \theta_1^\alpha, \theta_2^\beta \right)$  defined in (3.1) we have to the following steps:

- using the "combinatorial algorithm" construct the corteges  $\mathcal{I}^\alpha, \mathcal{J}^\beta$ , for all  $\alpha, \beta$ ;

- for all fixed  $\alpha, \beta$ , construct the payoff matrices  $A^\alpha = \|a_{i_j^\alpha j_i^\beta}\|_{i \in I}^{j \in J}$ ,  $B^\beta = \|b_{i_j^\alpha j_i^\beta}\|_{i \in I}^{j \in J}$ ;
- using existent algorithms determine the set  $NE(A^\alpha, B^\beta)$  of Nash equilibrium profiles in the bimatrix game with the matrices  $A^\alpha$  and  $B^\beta$ .

We illustrate the described above method in the following example:

**Example 3.1** We consider the bimatrix game  $H_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  and construct the normal form of the game generated by the informational extended strategies.

**Solution.** Consider the sets of the informational extended strategies from the Example 2.1. The corteges  $\mathcal{I}^\alpha$  and  $\mathcal{J}^\beta$  are:

- for player 1 :  $\theta_1^1 \Rightarrow \mathcal{I}^1 = (1, 1, 1)$ ;  $\theta_1^2 \Rightarrow \mathcal{I}^2 = (2, 2, 2)$ ;  $\theta_1^3 \Rightarrow \mathcal{I}^3 = (1, 1, 2)$ ;  $\theta_1^4 \Rightarrow \mathcal{I}^4 = (1, 2, 1)$ ;  $\theta_1^5 \Rightarrow \mathcal{I}^5 = (2, 1, 1)$ ;  $\theta_1^6 \Rightarrow \mathcal{I}^6 = (1, 2, 2)$ ;  $\theta_1^7 \Rightarrow \mathcal{I}^7 = (2, 1, 2)$ ;  $\theta_1^8 \Rightarrow \mathcal{I}^8 = (2, 2, 1)$ ;
- for player 2 :  $\theta_2^1 \Rightarrow \mathcal{J}^1 = (1, 1)$ ;  $\theta_2^2 \Rightarrow \mathcal{J}^2 = (2, 2)$ ;  $\theta_2^3 \Rightarrow \mathcal{J}^3 = (3, 3)$ ;  $\theta_2^4 \Rightarrow \mathcal{J}^4 = (1, 2)$ ;  $\theta_2^5 \Rightarrow \mathcal{J}^5 = (2, 1)$ ;  $\theta_2^6 \Rightarrow \mathcal{J}^6 = (1, 3)$ ;  $\theta_2^7 \Rightarrow \mathcal{J}^7 = (3, 1)$ ;  $\theta_2^8 \Rightarrow \mathcal{J}^8 = (2, 3)$ ;  $\theta_2^9 \Rightarrow \mathcal{J}^9 = (3, 2)$ .

So, we can construct the all amount, equal to 72, of the informational non extended game generated by all informational extended strategy profile  $(\theta_1^\alpha, \theta_2^\beta)$ :

$$\begin{aligned}
\Gamma(\theta_1^1, \theta_2^1) &= \left\langle I, J, A^1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, B^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle; \\
\Gamma(\theta_1^1, \theta_2^2) &= \left\langle I, J, A^1 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \right\rangle; \\
\Gamma(\theta_1^1, \theta_2^3) &= \left\langle I, J, A^1 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle; \\
\Gamma(\theta_1^3, \theta_2^4) &= \left\langle I, J, A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}, B^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle; \\
\Gamma(\theta_1^3, \theta_2^5) &= \left\langle I, J, A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 7 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}, B^5 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right\rangle; \\
\Gamma(\theta_1^4, \theta_2^4) &= \left\langle I, J, A^4 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}, B^4 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \right\rangle; \\
\Gamma(\theta_1^4, \theta_2^5) &= \left\langle I, J, A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}, B^5 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle; \\
&\vdots \\
\Gamma(\theta_1^8, \theta_2^8) &= \left\langle I, J, A^8 = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B^8 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle; \\
\Gamma(\theta_1^8, \theta_2^9) &= \left\langle I, J, A^8 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}, B^9 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \right\rangle.
\end{aligned}$$

## 4 Bayes-Nash solutions in the bimatrix informational extended games

As was mentioned in the section "Solving the informational extended game by means of the informational non extended game" any strategy profile  $(\theta_1^\alpha, \theta_2^\beta)$  in informational extended strategies generates a couple of matrices, which represent the utility of the players in informational non extended strategies

$$\left\{ A(\alpha, \beta) = \|a_{i_j^\alpha j_i^\beta}\|_{i \in I}^{j \in J}, B(\alpha, \beta) = \|b_{i_j^\alpha j_i^\beta}\|_{i \in I}^{j \in J}, i_j^\alpha \in I^\alpha, j_i^\beta \in J^\beta \right\}_{\alpha=\overline{1, \kappa_1}}^{\beta=\overline{1, \kappa_2}}.$$

So as the players do not know what informational extended strategies are chosen by their partners, each player will have a possible set of utility matrices. This type of games is one in **incomplete information** because neither player 1 nor player 2 knows exactly which matrix from the mentioned set of matrices will be his utility.

Finally, the game *Game*  $(1 \rightleftharpoons 2)$  of imperfect information on the set of informational extended strategies, generates an incomplete information game on the set of informational non extended strategies. So we study the following two person game: the strategies of the player 1 are  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  and of the player 2 are  $J = \{1, 2, \dots, m\}$ ; the payoff matrix of the player 1 is one of the matrices from the set  $\left\{ A(\alpha, \beta) = \|a_{i_j^\alpha j_i^\beta}\|_{i \in I}^{j \in J}, i_j^\alpha \in I^\alpha, j_i^\beta \in J^\beta \right\}_{\alpha=\overline{1, \kappa_1}}^{\beta=\overline{1, \kappa_2}}$  and the payoff matrix of the player 2 is one of the matrices from the set  $\left\{ B(\alpha, \beta) = \|b_{i_j^\alpha j_i^\beta}\|_{i \in I}^{j \in J}, i_j^\alpha \in I^\alpha, j_i^\beta \in J^\beta \right\}_{\alpha=\overline{1, \kappa_1}}^{\beta=\overline{1, \kappa_2}}$ .

When, using the informational extended strategies, the matrices  $A(\theta_1^\alpha, \theta_2^\beta)$  and  $B(\theta_1^\alpha, \theta_2^\beta)$  were already built, we use the following notations:  $\|a_{i_j^\alpha j_i^\beta}\|_{i \in I}^{j \in J} \equiv \|a_{ij}^{\alpha\beta}\|_{i \in I}^{j \in J}$  and  $\|b_{i_j^\alpha j_i^\beta}\|_{i \in I}^{j \in J} \equiv \|b_{ij}^{\alpha\beta}\|_{i \in I}^{j \in J}$  for all  $\alpha = \overline{1, \kappa_1}$  and  $\beta = \overline{1, \kappa_2}$ , so we have a bimatrix game where the utility is determined by a set of matrices:

$$AB(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} (a_{11}^{\alpha\beta}, b_{11}^{\alpha\beta}) & \cdots & (a_{1j}^{\alpha\beta}, b_{1j}^{\alpha\beta}) & \cdots & (a_{1m}^{\alpha\beta}, b_{1m}^{\alpha\beta}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_{i1}^{\alpha\beta}, b_{i1}^{\alpha\beta}) & \cdots & (a_{ij}^{\alpha\beta}, b_{ij}^{\alpha\beta}) & \cdots & (a_{im}^{\alpha\beta}, b_{im}^{\alpha\beta}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_{nm}^{\alpha\beta}, b_{nm}^{\alpha\beta}) & \cdots & (a_{nj}^{\alpha\beta}, b_{nj}^{\alpha\beta}) & \cdots & (a_{nm}^{\alpha\beta}, b_{nm}^{\alpha\beta}) \end{pmatrix}$$

for  $\alpha = \overline{1, \kappa_1}$  and  $\beta = \overline{1, \kappa_2}$  and the set of strategies are  $I$  and  $J$ . Every player knows that the utilities are determined by the set of matrices  $\left\{ AB(\alpha, \beta) = \| (a_{ij}^{\alpha\beta}, b_{ij}^{\alpha\beta}) \|_{i \in I}^{j \in J} \right\}_{\alpha=\overline{1, \kappa_1}}^{\beta=\overline{1, \kappa_2}}$ , but they do not know which matrix from this set will be used.

So, the game *Game*  $(1 \rightleftharpoons 2)$  of imperfect information on the set of informational extended strategies generates the following normal form incomplete information game

$$\tilde{\Gamma} = \left\langle \{1, 2\}, I, J, \left\{ AB(\alpha, \beta) = \| (a_{ij}^{\alpha\beta}, b_{ij}^{\alpha\beta}) \|_{i \in I}^{j \in J} \right\}_{\alpha=\overline{1, \kappa_1}}^{\beta=\overline{1, \kappa_2}} \right\rangle. \quad (4.1)$$

We call an agent Bayesian rational (or say that he has subjective expected utility preferences) if

- (i) In settings with uncertainty he forms beliefs describing the probabilities of all relevant events;
- (ii) When making decisions, he acts to maximize his expected utility given by his beliefs;
- (iii) After receiving new information, he updates his beliefs by taking conditional probabilities whenever possible.

In the game theory, it is standard to begin analyses with the assumption that players are Bayesian rational.

The way to modelling this situation of **asymmetric** or **incomplete** informations by recurring to an idea generated by Harsanyi(1967). The key is to introduce a move by the Nature, which transforms the uncertainty by converting an **incomplete information** problem into an **imperfect information problem**. The idea is that the Nature moves determining player's types, a concept that embodies all the relevant private information about them (such as payoffs, preferences, beliefs about other players, etc.). Harsanyi described a game as having incomplete information when the players are uncertain about each other's types.

According to [6] we can construct the bimatrix Bayesian game for the bimatrix incomplete information game  $\tilde{\Gamma}$  from (4.1) that consists of the following.

1. A set of players  $\{1, 2\}$ ;
2. A set of possible actions for each player: for player 1 is  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ , the line index, and for player 2 is  $J = \{1, 2, \dots, m\}$ , the column index;
3. A set of possible types for each player that coincides with the set of informational extended strategies of that player, namely  $\Theta_1 = \{\theta_1^\alpha : J \rightarrow I\}_{\alpha=1}^{\varkappa_1}$  for player 1 and respectively  $\Theta_2 = \{\theta_2^\beta : I \rightarrow J\}_{\beta=1}^{\varkappa_2}$  for the player 2. So the types of the player 1 are  $\Delta_1 = \{\alpha = 1, \dots, \varkappa_1\}$  and of the player 2 are  $\Delta_2 = \{\beta = 1, \dots, \varkappa_2\}$ . Only player 1(player 2) knows his type  $\alpha$  (type  $\beta$ ) when play begins.
4. A probability function that specifies, for each possible type of each player, a probability distribution over the other player's possible types, describing what each type of each player would believe about the other players' types  $p : \Delta_1 \rightarrow \Omega(\Delta_2)$ ,  $q : \Delta_2 \rightarrow \Omega(\Delta_1)$ , where  $\Omega(\Delta_2)$  (respectively  $\Omega(\Delta_1)$ ) denotes the set of all probability distributions on a set  $\Delta_1$  (respectively  $\Delta_2$ ). The function  $p$  (respectively  $q$ ) summarizes what player 1 (respectively player 2), given his type, believes about the types of the other players. So,  $p(\beta|\alpha) = \frac{p(\beta \cap \alpha)}{p(\alpha)}$  (Bayes'Rule) (respectively  $q(\alpha|\beta) = \frac{q(\alpha \cap \beta)}{q(\beta)}$ ) is the conditional probability assigned to the type  $\beta \in \Delta_2$  (respectively  $\alpha \in \Delta_1$ ) when the type of the player 1 is  $\alpha$  (respectively of the player 2 is  $\beta$ ).

5. Combining actions and types for each player it is possible to construct the strategies. Strategies will be given by a mapping from the type space to the action space. In other words, a strategy may assign different actions to different types. The sets of pure strategies of the players (line and columns) will depend on the type of the players (or, in other words, on what informational extended strategy will chose the players). So, in this way, we will construct the strategies of the players. If player 1 is of type  $\alpha \in \Delta_1$  and player 1 knows that the type of the player 2 may be an element from the set  $\Delta_2 = \{\beta = 1, \dots, \varkappa_2\}$ , and because the utility matrix elements also depend on the type  $\beta$  of player 2, then the set of matrices that represent his utility is  $\left\{ A(\alpha, \beta) = \left\| a_{ij}^{\alpha\beta} \right\|_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \right\}_{\beta=1, \dots, \varkappa_2}$ . We will denote the pure strategy of player 1 by  $\tilde{\mathbf{i}} = i_1 i_2 \dots i_\beta \dots i_{\varkappa_2}$  and it has the following meaning: the player will chose the line  $i_1 \in I$  if  $\beta = 1$ , namely line  $i_1$  from the utility matrix  $A(\alpha, 1)$  and line  $i_2 \in I$  if  $\beta = 2$  and so on, line  $i_{\varkappa_2} \in I$  if  $\beta = \varkappa_2$ . Then the set of all pure strategy of player 1 will be determined by the set of all corteges of type  $i_1 i_2 \dots i_\beta \dots i_{\varkappa_2}$  for all  $i_\beta \in I$  and will be denoted by  $\tilde{\mathbf{I}}(\alpha)$ . In his turn, if player 2 is of type  $\beta \in \Delta_2$  and he knows that the type of player 1 may be an element from the set  $\Delta_1 = \{\alpha = 1, \dots, \varkappa_1\}$ , and because the utility matrix elements depend also on the type  $\alpha$  of player 1, then the set of matrices that represent his utility is  $\left\{ B(\alpha, \beta) = \left\| b_{ij}^{\alpha\beta} \right\|_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \right\}_{\alpha=1, \dots, \varkappa_1}$ . By the same way we will denote the pure strategy of player 2 by  $\tilde{\mathbf{j}} = j_1 j_2 \dots j_\alpha \dots j_{\varkappa_2}$  and it has the following meaning: the

player will chose column  $j_1 \in J$  if  $\alpha = 1$ , namely column  $j_1$  from utility matrix  $B(1, \beta)$  and column  $j_2 \in J$  if  $\alpha = 2$  and so on he will chose column  $j_{\kappa_1} \in J$  if  $\alpha = \kappa_1$ . Then the set of all pure strategy of player 2 will be determined by the set of all corteges of type  $j_1 j_2 \dots j_{\alpha} \dots j_{\kappa_2}$  for all  $j_\alpha \in J$  and will be denoted by  $\tilde{\mathbf{J}}(\beta)$ .

6. A payoff function specifies each player's expected payoff matrices for every possible combination of all player's actions and types. Hence, if the player 1 of type  $\alpha$  chooses the pure strategy  $\tilde{\mathbf{i}} \in \tilde{\mathbf{I}}(\alpha)$ , and the player 2 plays some strategy  $\tilde{\mathbf{j}} \in \tilde{\mathbf{J}}(\beta)$  for all  $\beta \in \Delta_2$ , then expected payoffs of player 1 is the following matrix

$$\mathbf{A}(\alpha) = \left\| \mathbf{a}_{\tilde{\mathbf{i}}\tilde{\mathbf{j}}}^{\alpha} \right\|_{\substack{\tilde{\mathbf{j}} \in \tilde{\mathbf{J}}(\beta) \\ \tilde{\mathbf{i}} \in \tilde{\mathbf{I}}(\alpha)}} \quad (4.2)$$

where  $\mathbf{a}_{\tilde{\mathbf{i}}\tilde{\mathbf{j}}}^{\alpha} = \sum_{\beta \in \Delta_2} p(\beta|\alpha) a_{i_\beta j_\alpha}^{\alpha\beta}$ . Similarly, if player 2 of type  $\beta$  chooses the pure strategy  $\tilde{\mathbf{j}} \in \tilde{\mathbf{J}}(\beta)$

and the player 1 plays some strategy  $\tilde{\mathbf{i}} \in \tilde{\mathbf{I}}(\alpha)$  for all  $\alpha \in \Delta_1$ , then expected payoffs of player 2 of type  $\beta$  is

$$\mathbf{B}(\beta) = \left\| \mathbf{b}_{\tilde{\mathbf{i}}\tilde{\mathbf{j}}}^{\beta} \right\|_{\substack{\tilde{\mathbf{j}} \in \tilde{\mathbf{J}}(\beta) \\ \tilde{\mathbf{i}} \in \tilde{\mathbf{I}}(\alpha)}} \quad (4.3)$$

where  $\mathbf{b}_{\tilde{\mathbf{i}}\tilde{\mathbf{j}}}^{\beta} = \sum_{\alpha \in \Delta_1} q(\alpha|\beta) b_{i_\beta j_\alpha}^{\alpha\beta}$ .

So we can introduce the following definition.

**Definition 4.1** For the incomplete information game  $\tilde{\Gamma}$  from (4.1) the normal form game

$$\Gamma_{Bayes} = \left\langle \{1, 2\}, \tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\mathbf{J}}, \mathcal{A}, \mathcal{B} \right\rangle, \quad (4.4)$$

where  $\tilde{\mathbf{I}} = \bigcup_{\alpha \in \Delta_1} \tilde{\mathbf{I}}(\alpha)$ ,  $\tilde{\mathbf{J}} = \bigcup_{\beta \in \Delta_2} \tilde{\mathbf{J}}(\beta)$  and the utility matrices are  $\mathcal{A} = \|\mathbf{A}(\alpha)\|_{\alpha \in \Delta_1}$  and  $\mathcal{B} = \|\mathbf{B}(\beta)\|_{\beta \in \Delta_2}$ , is called the associated Bayesian game in the non informational extended strategies.

It is important to discuss a little bit each part of the definition above. Players types contain all relevant information about certain player's private characteristics of the informational extended strategy to choose. The type  $\alpha$  (respectively  $\beta$ ) is only observed by player 1 (player 2), who uses this information both to make decisions and to update his beliefs about the likelihood of opponents types (using the conditional probability  $p(\beta|\alpha)$  (respectively  $q(\alpha|\beta)$ ). We still assume common knowledge of the 1)-6) items, but we allow uncertainty about players' preferences. Player's  $(\alpha, \beta)$  type determines  $(\alpha, \beta)$  payoffs matrices  $(\mathbf{A}(\alpha), \mathbf{B}(\beta))$ .

The games defined above are sometimes called *Bayesian normal form games*, since the drawing of types is followed by a simultaneous move game. One can also define *Bayesian extensive form games*, where the drawing of types is followed by an extensive form game.

**Definition 4.2** (*Bayesian Nash Equilibrium*) The strategy profiles  $(\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*)$ ,  $\mathbf{i}^* \in \tilde{\mathbf{I}}$ ,  $\mathbf{j}^* \in \tilde{\mathbf{J}}$  is Bayesian Nash equilibrium if we have

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{\mathbf{i}^* \mathbf{j}^*} \geq \mathbf{a}_{\mathbf{i} \mathbf{j}^*} & \text{for all } \mathbf{i} \in \tilde{\mathbf{I}}, \\ \mathbf{b}_{\mathbf{i}^* \mathbf{j}^*} \geq \mathbf{b}_{\mathbf{i}^* \mathbf{j}} & \text{for all } \mathbf{j} \in \tilde{\mathbf{J}}. \end{cases}$$

Denote by  $BE[\Gamma_{Bayes}]$  the set of all Bayes-Nash strategies profile of the game  $\Gamma_{Bayes}$  from (4.4).

**Remark 4.1** The Bayesian Game  $\Gamma_{Bayes}$  (4.4) for all  $\alpha \in \Delta_1$  and  $\beta \in \Delta_2$  is a bimatrix game where player 1 is of type  $\alpha$  and player 2 is of type  $\beta$ . The Bayese-Nash equilibria profile following the Definition 4.2 will be found in the next way: we find the Nash equilibria profile for a bimatrix game where the sets of strategies are the "extended sets"  $\tilde{\mathbf{I}} = \bigcup_{\alpha \in \Delta_1} \tilde{\mathbf{I}}(\alpha)$ ,  $\tilde{\mathbf{J}} = \bigcup_{\beta \in \Delta_2} \tilde{\mathbf{J}}(\beta)$  and the utility matrices are the "extended matrices"  $\mathcal{A} = \|\mathbf{A}(\alpha)\|_{\alpha \in \Delta_1}$  and  $\mathcal{B} = \|\mathbf{B}(\beta)\|_{\beta \in \Delta_2}$ .

We will introduce the next definition.

**Definition 4.3** For all fixed  $\alpha \in \Delta_1$  and  $\beta \in \Delta_2$  the game  $sub\Gamma_{Bayes} = \langle \{1, 2\}, \tilde{\mathbf{I}}(\alpha), \tilde{\mathbf{J}}(\beta), \mathbf{A}(\alpha), \mathbf{B}(\beta) \rangle$  will be called a subgame of the Bayesian game  $\Gamma_{Bayes}$  from (4.4).

According to [5], using the notion of "type-players", the  $sub\Gamma_{Bayes}$  is the bimatrix game of the type-player  $\alpha$  and of the type-player  $\beta$ .

**Example 4.1** The construction of the Bayesian game for the  $2 \times 3$  bimatrix games in incomplete information, generated by the informational extended strategies.

**Solution.** Consider a bimatrix game in incomplete information for which the utilities are:

$$AB(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{\alpha\beta} & b_{11}^{\alpha\beta} \\ a_{21}^{\alpha\beta} & b_{21}^{\alpha\beta} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{12}^{\alpha\beta} & b_{12}^{\alpha\beta} \\ a_{22}^{\alpha\beta} & b_{22}^{\alpha\beta} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{13}^{\alpha\beta} & b_{13}^{\alpha\beta} \\ a_{23}^{\alpha\beta} & b_{23}^{\alpha\beta} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

The Bayesian game will contain the elements.

- a) The set of players  $\{1, 2\}$ .
- b) The set of actions of the players  $I = \{1, 2\}$ ,  $J = \{1, 2, 3\}$ .
- c) The set of types of the player 1 is  $\Delta_1 = \{\alpha = \overline{1, 8}\}$  and of the player 2 is  $\Delta_2 = \{\beta = \overline{1, 9}\}$ .
- d) denote the type probability for player 1 by  $p(\beta|\alpha)$ , respectively  $q(\alpha|\beta)$  for player 2.
- e) For any fixed  $\alpha$  we introduce the notation  $i_\beta i_\gamma$ , for  $\beta, \gamma \in \Delta_2$ ,  $\beta \neq \gamma$ , which satisfies the conditions: the player 1 will chose the line  $i_\beta \in I$  in case if the player 2 is of type  $\beta$ , namely, the utility of the player is the matrix  $\left\| a_{ij}^{\alpha\beta} \right\|_{i \in I}^{j \in J}$ , and will chose the line  $i_\gamma \in I$  if the player 2 is of type  $\gamma$  (namely, the utility of the player is the matrix  $\left\| a_{ij}^{\alpha\gamma} \right\|_{i \in I}^{j \in J}$ ). Thus the set of pure strategies of the player 1 is  $\tilde{\mathbf{I}}(\alpha) = \{\tilde{\mathbf{i}} = i_\beta i_\gamma : i_\beta \in I, i_\gamma \in I, \forall \beta, \gamma \in \Delta_2, \beta \neq \gamma\} = \{1_1 1_2, 1_1 2_2, 2_1 1_2, 2_1 2_2\}$ . In the same way we will construct the strategies of the player 2. For any fixed  $\beta$  we will denote  $j_\alpha j_\delta$  for  $\alpha, \delta \in \Delta_1$ ,  $\alpha \neq \delta$ , which meaning is: the player 2 will chose the column  $j_\alpha \in J$  if the player 1 is of type  $\alpha$ , i.e. the utility of the player is the matrix  $\left\| b_{ij}^{\alpha\beta} \right\|_{i \in I}^{j \in J}$ , and will chose the column  $j_\delta \in J$  if the player 1 is of type  $\delta$ , i.e. the utility of the player is the matrix  $\left\| b_{ij}^{\delta\beta} \right\|_{i \in I}^{j \in J}$ . Thus the set of pure strategies of the player 2 is  $\tilde{\mathbf{J}}(\beta) = \{\tilde{\mathbf{j}} = j_\alpha j_\delta : j_\alpha \in J, j_\delta \in J, \forall \alpha, \delta \in \Delta_1, \alpha \neq \delta\} = \{1_1 1_2, 1_1 2_2, 2_1 1_2, 2_1 2_2, 1_1 3_2, 3_1 1_2, 2_1 3_2, 3_1 2_2, 3_1 3_2\}$ .
- g) The players do not know the exact type of the partners and supply this lack of information by the belief probabilities. Let  $\Delta_1 = \{\alpha = 1, 2\}$  and  $\Delta_2 = \{\beta = 1, 2\}$ . Thus the player 1, being of type  $\alpha$ , will assume with the probability  $p(\beta = 1|\alpha)$  that he has the payoff matrix  $\begin{pmatrix} a_{11}^{\alpha 1} & a_{12}^{\alpha 1} & a_{13}^{\alpha 1} \\ a_{21}^{\alpha 1} & a_{22}^{\alpha 1} & a_{23}^{\alpha 1} \end{pmatrix}$  and, with probabilities  $p(\beta = 2|\alpha)$ , the payoff matrix  $\begin{pmatrix} a_{11}^{\alpha 2} & a_{12}^{\alpha 2} & a_{13}^{\alpha 2} \\ a_{21}^{\alpha 2} & a_{22}^{\alpha 2} & a_{23}^{\alpha 2} \end{pmatrix}$ . Respectively, the player 2, being of type  $\beta$ , will assume with the probability  $q(\alpha = 1|\beta)$  that he has the payoff matrix  $\begin{pmatrix} b_{11}^{1\beta} & b_{12}^{1\beta} & b_{13}^{1\beta} \\ b_{21}^{1\beta} & b_{22}^{1\beta} & b_{23}^{1\beta} \end{pmatrix}$  and, with the probability  $q(\alpha = 2|\beta)$ , the payoff matrix  $\begin{pmatrix} b_{11}^{2\beta} & b_{12}^{2\beta} & b_{13}^{2\beta} \\ b_{21}^{2\beta} & b_{22}^{2\beta} & b_{23}^{2\beta} \end{pmatrix}$ . We denote by  $E_1(a_{i_1 j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{i_2 j_\alpha}^{\alpha 2}) = p(\beta = 1|\alpha)a_{i_1 j_\alpha}^{\alpha 1} + p(\beta = 2|\alpha)a_{i_2 j_\alpha}^{\alpha 2}$ .

$E_2(b_{i_\beta j_1}^{1\beta}, b_{i_\beta j_2}^{2\beta}) = q(\alpha = 1|\beta)b_{i_\beta j_1}^{1\beta} + q(\alpha = 2|\beta)b_{i_\beta j_2}^{2\beta}$  for any  $i \in I, j \in J, \alpha \in \Delta_1, \beta \in \Delta_2$ , the average value if the player 1, respectively the player 2, knows the belief probabilities (or the probabilities setted by the Nature). We will construct the utility matrices when the player 1 is of type  $\alpha$  and, at the same time, the player 2 is of type  $\beta$ . Based on the facts mentioned above we will obtain the next bimatrix game in which the utility of the players is described by the following matrices with 4 lines and 9 columns:

$$A(\alpha) = \begin{array}{c} \begin{array}{c|ccccc} \tilde{i} \backslash \tilde{j} & 1_1 1_2 & 1_1 2_2 & 2_1 1_2 & 2_1 2_2 & 1_1 3_2 \\ \hline 1_1 1_2 & E_1 \left( a_{1j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{1j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{1j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{1j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{1j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{1j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{1j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{1j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{1j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{1j_\alpha}^{\alpha 2} \right) \\ \hline 1_1 2_2 & E_1 \left( a_{1j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{2j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{1j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{2j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{1j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{2j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{1j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{2j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{1j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{2j_\alpha}^{\alpha 2} \right) \\ \hline 2_1 1_2 & E_1 \left( a_{2j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{1j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{2j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{1j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{2j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{1j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{2j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{1j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{2j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{1j_\alpha}^{\alpha 2} \right) \\ \hline 2_1 2_2 & E_1 \left( a_{2j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{2j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{2j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{2j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{2j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{2j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{2j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{2j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{2j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{2j_\alpha}^{\alpha 2} \right) \end{array} \\ \\ \begin{array}{c|cccc} \tilde{i} \backslash \tilde{j} & 3_1 1_2 & 2_1 3_2 & 3_1 2_2 & 3_1 3_2 \\ \hline 1_1 1_2 & E_1 \left( a_{1j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{1j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{1j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{1j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{1j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{1j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{1j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{1j_\alpha}^{\alpha 2} \right) \\ \hline 1_1 2_2 & E_1 \left( a_{1j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{2j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{1j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{2j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{1j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{2j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{1j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{2j_\alpha}^{\alpha 2} \right) \\ \hline 2_1 1_2 & E_1 \left( a_{2j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{1j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{2j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{1j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{2j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{1j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{2j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{1j_\alpha}^{\alpha 2} \right) \\ \hline 2_1 2_2 & E_1 \left( a_{2j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{2j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{2j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{2j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{2j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{2j_\alpha}^{\alpha 2} \right) & E_1 \left( a_{2j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{2j_\alpha}^{\alpha 2} \right) \end{array} \end{array} \quad (4.5)$$

$$B(\beta) = \begin{array}{c} \begin{array}{c|ccccc} \tilde{i} \backslash \tilde{j} & 1_1 1_2 & 1_1 2_2 & 2_1 1_2 & 2_1 2_2 & 1_1 3_2 \\ \hline 1_1 1_2 & E_2 \left( b_{i_\beta 1}^{1\beta}, b_{i_\beta 1}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 1}^{1\beta}, b_{i_\beta 2}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 2}^{1\beta}, b_{i_\beta 1}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 2}^{1\beta}, b_{i_\beta 2}^{2\beta} \right) & E_2 \left( 2b_{i_\beta 1}^{1\beta}, b_{i_\beta 3}^{2\beta} \right) \\ \hline 1_1 2_2 & E_2 \left( b_{i_\beta 1}^{1\beta}, b_{i_\beta 1}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 1}^{1\beta}, b_{i_\beta 2}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 2}^{1\beta}, b_{i_\beta 1}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 2}^{1\beta}, b_{i_\beta 2}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 1}^{1\beta}, b_{i_\beta 3}^{2\beta} \right) \\ \hline 2_1 1_2 & E_2 \left( b_{i_\beta 1}^{1\beta}, b_{i_\beta 1}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 1}^{1\beta}, b_{i_\beta 2}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 2}^{1\beta}, b_{i_\beta 1}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 2}^{1\beta}, b_{i_\beta 2}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 1}^{1\beta}, b_{i_\beta 3}^{2\beta} \right) \\ \hline 2_1 2_2 & E_2 \left( b_{i_\beta 1}^{1\beta}, b_{i_\beta 1}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 1}^{1\beta}, b_{i_\beta 2}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 2}^{1\beta}, b_{i_\beta 1}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 2}^{1\beta}, b_{i_\beta 2}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 1}^{1\beta}, b_{i_\beta 3}^{2\beta} \right) \end{array} \\ \\ \begin{array}{c|cccc} \tilde{i} \backslash \tilde{j} & 3_1 1_2 & 2_1 3_2 & 3_1 2_2 & 3_1 3_2 \\ \hline 1_1 1_1 & E_2 \left( b_{i_\beta 3}^{1\beta}, b_{i_\beta 1}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 2}^{1\beta}, b_{i_\beta 3}^{2\beta} \right) & E_2 \left( 2b_{i_\beta 3}^{1\beta}, b_{i_\beta 2}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 3}^{1\beta}, b_{i_\beta 3}^{2\beta} \right) \\ \hline 1_1 2_2 & E_2 \left( b_{i_\beta 3}^{1\beta}, b_{i_\beta 1}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 2}^{1\beta}, b_{i_\beta 3}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 3}^{1\beta}, b_{i_\beta 2}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 3}^{1\beta}, b_{i_\beta 3}^{2\beta} \right) \\ \hline 2_1 1_2 & E_2 \left( b_{i_\beta 3}^{1\beta}, b_{i_\beta 1}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 2}^{1\beta}, b_{i_\beta 3}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 3}^{1\beta}, b_{i_\beta 2}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 3}^{1\beta}, b_{i_\beta 3}^{2\beta} \right) \\ \hline 2_1 2_2 & E_2 \left( b_{i_\beta 3}^{1\beta}, b_{i_\beta 1}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 2}^{1\beta}, b_{i_\beta 3}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 3}^{1\beta}, b_{i_\beta 2}^{2\beta} \right) & E_2 \left( b_{i_\beta 3}^{1\beta}, b_{i_\beta 3}^{2\beta} \right) \end{array} \end{array} \quad (4.6)$$

What is the meaning, for example, of elements at the intersection of line  $1_1 2_2$  and column  $1_1 3_2$ ? Using the belief probabilities for types of the players, we get that player 1, being of type  $\alpha$ , will chose the line  $i = 1$  from the matrix  $\begin{pmatrix} a_{11}^{\alpha 1} & a_{12}^{\alpha 1} & a_{13}^{\alpha 1} \\ a_{21}^{\alpha 1} & a_{22}^{\alpha 1} & a_{23}^{\alpha 1} \end{pmatrix}$  (when the player 2 is of type  $\beta = 1$ ) and line  $i = 2$  from the matrix  $\begin{pmatrix} a_{11}^{\alpha 2} & a_{12}^{\alpha 2} & a_{13}^{\alpha 2} \\ a_{21}^{\alpha 2} & a_{22}^{\alpha 2} & a_{23}^{\alpha 2} \end{pmatrix}$  (when player 2 is of type  $\beta = 2$ ), and correspondingly, the player 2 being of type  $\beta$ , will chose the column  $j = 1$  from the matrix  $\begin{pmatrix} b_{11}^{1\beta} & b_{12}^{1\beta} & b_{13}^{1\beta} \\ b_{21}^{1\beta} & b_{22}^{1\beta} & b_{23}^{1\beta} \end{pmatrix}$  (when the type of the player 1 is  $\alpha = 1$ ) and the column  $j = 3$  in the matrix  $\begin{pmatrix} b_{11}^{2\beta} & b_{12}^{2\beta} & b_{13}^{2\beta} \\ b_{21}^{2\beta} & b_{22}^{2\beta} & b_{23}^{2\beta} \end{pmatrix}$  (when the type of the player 1 is  $\alpha = 2$ ), then the average value of the payoff



for the player 1 is  $E_1 \left( a_{1j_\alpha}^{\alpha 1}, a_{2j_\alpha}^{\alpha 2} \right) = p(\beta = 1|\alpha) a_{1j_\alpha}^{\alpha 1} + p(\beta = 2|\alpha) a_{2j_\alpha}^{\alpha 2}$  and respectively, for the player 2 is  $E_2 \left( b_{i_\beta 1}^{1\beta}, b_{i_\beta 3}^{2\beta} \right) = q(\alpha = 1|\beta) b_{i_\beta 1}^{1\beta} + q(\alpha = 2|\beta) b_{i_\beta 3}^{2\beta}$ .

Finally, for  $\alpha = 1, \alpha = 2, \beta = 1$  and  $\beta = 2$  we obtain:

$$A(1) = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \tilde{\mathbf{i}} \backslash \tilde{\mathbf{j}} & 1_1 1_2 & 1_1 2_2 & 2_1 1_2 & 2_1 2_2 & 1_1 3_2 \\ \hline 1_1 1_2 & E_1 (a_{11}^{11}, a_{11}^{12}) & E_1 (a_{11}^{11}, a_{11}^{12}) & E_1 (a_{12}^{11}, a_{12}^{12}) & E_1 (a_{12}^{11}, a_{12}^{12}) & E_1 (a_{11}^{11}, a_{11}^{12}) \\ \hline 1_1 2_2 & E_1 (a_{11}^{11}, a_{21}^{12}) & E_1 (a_{11}^{11}, a_{21}^{12}) & E_1 (a_{12}^{11}, a_{22}^{12}) & E_1 (a_{12}^{11}, a_{22}^{12}) & E_1 (a_{11}^{11}, a_{21}^{12}) \\ \hline 2_1 1_2 & E_1 (a_{21}^{11}, a_{11}^{12}) & E_1 (a_{21}^{11}, a_{11}^{12}) & E_1 (a_{22}^{11}, a_{12}^{12}) & E_1 (a_{22}^{11}, a_{12}^{12}) & E_1 (a_{21}^{11}, a_{11}^{12}) \\ \hline 2_1 2_2 & E_1 (a_{21}^{11}, a_{21}^{12}) & E_1 (a_{21}^{11}, a_{21}^{12}) & E_1 (a_{22}^{11}, a_{22}^{12}) & E_1 (a_{22}^{11}, a_{22}^{12}) & E_1 (a_{21}^{11}, a_{21}^{12}) \\ \hline \end{array} \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \tilde{\mathbf{i}} \backslash \tilde{\mathbf{j}} & 3_1 1_2 & 2_1 3_2 & 3_1 2_2 & 3_1 3_2 \\ \hline 1_1 1_2 & E_1 (a_{13}^{11}, a_{13}^{12}) & E_1 (a_{13}^{11}, a_{13}^{12}) & E_1 (a_{13}^{11}, a_{13}^{12}) & E_1 (a_{13}^{11}, a_{13}^{12}) \\ \hline 1_1 2_2 & E_1 (a_{13}^{11}, a_{23}^{12}) & E_1 (a_{12}^{11}, a_{22}^{12}) & E_1 (a_{13}^{11}, a_{23}^{12}) & E_1 (a_{13}^{11}, a_{23}^{12}) \\ \hline 2_1 1_2 & E_1 (a_{23}^{11}, a_{13}^{12}) & E_1 (a_{22}^{11}, a_{12}^{12}) & E_1 (a_{23}^{11}, a_{13}^{12}) & E_1 (a_{23}^{11}, a_{13}^{12}) \\ \hline 2_1 2_2 & E_1 (a_{23}^{11}, a_{23}^{12}) & E_1 (a_{22}^{11}, a_{22}^{12}) & E_1 (a_{23}^{11}, a_{23}^{12}) & E_1 (a_{23}^{11}, a_{23}^{12}) \\ \hline \end{array}$$

$$A(2) = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \tilde{\mathbf{i}} \backslash \tilde{\mathbf{j}} & 1_1 1_2 & 1_1 2_2 & 2_1 1_2 & 2_1 2_2 & 1_1 3_2 \\ \hline 1_1 1_2 & E_1 (a_{11}^{21}, a_{11}^{22}) & E_1 (a_{12}^{21}, a_{12}^{22}) & E_1 (a_{11}^{21}, a_{11}^{22}) & E_1 (a_{12}^{21}, a_{12}^{22}) & E_1 (a_{13}^{21}, a_{13}^{22}) \\ \hline 1_1 2_2 & E_1 (a_{11}^{21}, a_{21}^{22}) & E_1 (a_{12}^{21}, a_{22}^{22}) & E_1 (a_{11}^{21}, a_{21}^{22}) & E_1 (a_{12}^{21}, a_{22}^{22}) & E_1 (a_{13}^{21}, a_{23}^{22}) \\ \hline 2_1 1_2 & E_1 (a_{21}^{21}, a_{11}^{22}) & E_1 (a_{22}^{21}, a_{12}^{22}) & E_1 (a_{21}^{21}, a_{11}^{22}) & E_1 (a_{22}^{21}, a_{12}^{22}) & E_1 (a_{23}^{21}, a_{13}^{22}) \\ \hline 2_1 2_2 & E_1 (a_{21}^{21}, a_{21}^{22}) & E_1 (a_{22}^{21}, a_{22}^{22}) & E_1 (a_{21}^{21}, a_{21}^{22}) & E_1 (a_{22}^{21}, a_{22}^{22}) & E_1 (a_{23}^{21}, a_{23}^{22}) \\ \hline \end{array} \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \tilde{\mathbf{i}} \backslash \tilde{\mathbf{j}} & 3_1 1_2 & 2_1 3_2 & 3_1 2_2 & 3_1 3_2 \\ \hline 1_1 1_2 & E_1 (a_{11}^{21}, a_{11}^{22}) & E_1 (a_{13}^{21}, a_{13}^{22}) & E_1 (a_{12}^{21}, a_{12}^{22}) & E_1 (a_{13}^{21}, a_{13}^{22}) \\ \hline 1_1 2_2 & E_1 (a_{11}^{21}, a_{21}^{22}) & E_1 (a_{13}^{21}, a_{23}^{22}) & E_1 (a_{12}^{21}, a_{22}^{22}) & E_1 (a_{13}^{21}, a_{23}^{22}) \\ \hline 2_1 1_2 & E_1 (a_{21}^{21}, a_{11}^{22}) & E_1 (a_{23}^{21}, a_{13}^{22}) & E_1 (a_{22}^{21}, a_{12}^{22}) & E_1 (a_{23}^{21}, a_{13}^{22}) \\ \hline 2_1 2_2 & E_1 (a_{21}^{21}, a_{21}^{22}) & E_1 (a_{23}^{21}, a_{23}^{22}) & E_1 (a_{22}^{21}, a_{22}^{22}) & E_1 (a_{23}^{21}, a_{23}^{22}) \\ \hline \end{array}$$

$$B(1) = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \tilde{\mathbf{i}} \backslash \tilde{\mathbf{j}} & 1_1 1_2 & 1_1 2_2 & 2_1 1_2 & 2_1 2_2 & 1_1 3_2 \\ \hline 1_1 1_2 & E_2 (b_{11}^{11}, b_{11}^{21}) & E_2 (b_{11}^{11}, b_{12}^{21}) & E_2 (b_{12}^{11}, b_{11}^{21}) & E_2 (b_{12}^{11}, b_{12}^{21}) & E_2 (2b_{11}^{11}, b_{13}^{21}) \\ \hline 1_1 2_2 & E_2 (b_{11}^{11}, b_{11}^{21}) & E_2 (b_{11}^{11}, b_{12}^{21}) & E_2 (b_{12}^{11}, b_{11}^{21}) & E_2 (b_{12}^{11}, b_{12}^{21}) & E_2 (b_{11}^{11}, b_{13}^{21}) \\ \hline 2_1 1_2 & E_2 (b_{21}^{11}, b_{21}^{21}) & E_2 (b_{21}^{11}, b_{22}^{21}) & E_2 (b_{22}^{11}, b_{21}^{21}) & E_2 (b_{22}^{11}, b_{22}^{21}) & E_2 (b_{21}^{11}, b_{23}^{21}) \\ \hline 2_1 2_2 & E_2 (b_{21}^{11}, b_{21}^{21}) & E_2 (b_{21}^{11}, b_{22}^{21}) & E_2 (b_{22}^{11}, b_{21}^{21}) & E_2 (b_{22}^{11}, b_{22}^{21}) & E_2 (b_{21}^{11}, b_{23}^{21}) \\ \hline \end{array} \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \tilde{\mathbf{i}} \backslash \tilde{\mathbf{j}} & 3_1 1_2 & 2_1 3_2 & 3_1 2_2 & 3_1 3_2 \\ \hline 1_1 1_1 & E_2 (b_{13}^{11}, b_{11}^{21}) & E_2 (b_{12}^{11}, b_{13}^{21}) & E_2 (2b_{13}^{11}, b_{12}^{21}) & E_2 (b_{13}^{11}, b_{13}^{21}) \\ \hline 1_1 2_2 & E_2 (b_{13}^{11}, b_{11}^{21}) & E_2 (b_{12}^{11}, b_{13}^{21}) & E_2 (b_{13}^{11}, b_{12}^{21}) & E_2 (b_{13}^{11}, b_{13}^{21}) \\ \hline 2_1 1_2 & E_2 (b_{23}^{11}, b_{21}^{21}) & E_2 (b_{22}^{11}, b_{23}^{21}) & E_2 (b_{23}^{11}, b_{22}^{21}) & E_2 (b_{23}^{11}, b_{23}^{21}) \\ \hline 2_1 2_2 & E_2 (b_{23}^{11}, b_{21}^{21}) & E_2 (b_{22}^{11}, b_{23}^{21}) & E_2 (b_{23}^{11}, b_{22}^{21}) & E_2 (b_{23}^{11}, b_{23}^{21}) \\ \hline \end{array}$$

$$B(2) =$$

$\tilde{\mathbf{i}} \setminus \tilde{\mathbf{j}}$	$1_1 1_2$	$1_1 2_2$	$2_1 1_2$	$2_1 2_2$	$1_1 3_2$
$1_1 1_2$	$E_2 (b_{11}^{12}, b_{11}^{22})$	$E_2 (b_{11}^{12}, b_{12}^{22})$	$E_2 (b_{12}^{12}, b_{11}^{22})$	$E_2 (b_{12}^{12}, b_{12}^{22})$	$E ({}_2 b_{11}^{12}, b_{13}^{22})$
$1_1 2_2$	$E_2 (b_{21}^{12}, b_{21}^{22})$	$E_2 (b_{21}^{12}, b_{22}^{22})$	$E_2 (b_{22}^{12}, b_{i_{\beta 1}}^{22})$	$E_2 (b_{22}^{12}, b_{i_{\beta 2}}^{22})$	$E_2 (b_{21}^{12}, b_{23}^{22})$
$2_1 1_2$	$E_2 (b_{11}^{12}, b_{11}^{22})$	$E_2 (b_{11}^{12}, b_{12}^{22})$	$E_2 (b_{12}^{12}, b_{11}^{22})$	$E_2 (b_{12}^{12}, b_{12}^{22})$	$E_2 (b_{11}^{12}, b_{13}^{22})$
$2_1 2_2$	$E_2 (b_{21}^{12}, b_{21}^{22})$	$E_2 (b_{21}^{12}, b_{22}^{22})$	$E_2 (b_{22}^{12}, b_{21}^{22})$	$E_2 (b_{22}^{12}, b_{22}^{22})$	$E_2 (b_{21}^{12}, b_{23}^{22})$

$\tilde{\mathbf{i}} \setminus \tilde{\mathbf{j}}$	$3_1 1_2$	$2_1 3_2$	$3_1 2_2$	$3_1 3_2$
$1_1 1_2$	$E_2 (b_{13}^{12}, b_{11}^{22})$	$E_2 (b_{12}^{12}, b_{13}^{22})$	$E ({}_2 b_{13}^{12}, b_{12}^{22})$	$E_2 (b_{13}^{12}, b_{13}^{22})$
$1_1 2_2$	$E_2 (b_{23}^{12}, b_{21}^{22})$	$E_2 (b_{22}^{12}, b_{23}^{22})$	$E_2 (b_{23}^{12}, b_{22}^{22})$	$E_2 (b_{23}^{12}, b_{23}^{22})$
$2_1 1_2$	$E_2 (b_{13}^{12}, b_{11}^{22})$	$E_2 (b_{12}^{12}, b_{13}^{22})$	$E_2 (b_{13}^{12}, b_{12}^{22})$	$E_2 (b_{13}^{12}, b_{13}^{22})$
$2_1 2_2$	$E_2 (b_{23}^{12}, b_{21}^{22})$	$E_2 (b_{22}^{12}, b_{23}^{22})$	$E_2 (b_{23}^{12}, b_{22}^{22})$	$E_2 (b_{23}^{12}, b_{23}^{22})$

So, the normal form of the Bayesian game from (4.4) is

$$\Gamma_{Bayes} = \left\langle \{1, 2\}, \tilde{\mathbf{I}} = \tilde{\mathbf{I}}(\alpha = 1) \cup \tilde{\mathbf{I}}(\alpha = 2), \tilde{\mathbf{J}} = \tilde{\mathbf{J}}(\beta = 1) \cup \tilde{\mathbf{J}}(\beta = 2), \right. \\ \left. \mathcal{A} = \|\mathbf{A}(\alpha = 1), \mathbf{A}(\alpha = 2)\|, \mathcal{B} = \|\mathbf{B}(\beta = 1), \mathbf{B}(\beta = 2)\| \right\rangle.$$

Bimatrix games  $\langle A(1), B(1) \rangle$ ,  $\langle A(1), B(2) \rangle$ ,  $\langle A(2), B(1) \rangle$  and  $\langle A(2), B(2) \rangle$  are subgames of the constructed above Bayesian game.

As a particular case we will examine the next example. We consider the following bimatrix game  $H_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  for which we construct the normal form of the Bayesian game associated to the informational extended game.

For example, suppose that the informational extended strategies of the player 1 are  $\theta_1^1(j) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 1, 2 \\ 2 & \text{if } j = 3 \end{cases}$ ,  $\theta_1^2(j) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 1, 3 \\ 2 & \text{if } j = 2 \end{cases}$  and respectively, for the player 2 are  $\theta_2^1(i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 1 \\ 2 & \text{if } i = 2 \end{cases}$ ,  $\theta_2^2(i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 2 \\ 2 & \text{if } i = 1 \end{cases}$ . Using the notations from Example 2.1 or 3.1, we have  $\theta_1^1(j) \equiv \theta_1^3(j)$ ,  $\theta_1^2(j) \equiv \theta_1^4(j)$ ,  $\theta_2^1(i) \equiv \theta_2^4(i)$ ,  $\theta_2^2(i) \equiv \theta_2^5(i)$ .

As mentioned above, the informational extended strategies  $\{\theta_1^1, \theta_1^2, \theta_2^1, \theta_2^2\}$  generate an incomplete information game in which the payoff matrix may be one of the following matrices (one in which the utility of the players is determined by one of the matrix bellow):

$$AB(\theta_1^1, \theta_2^1) = \begin{pmatrix} (3, 0) & (3, 0) & (6, 4) \\ (5, 5) & (5, 5) & (7, 3) \end{pmatrix}, \quad AB(\theta_1^2, \theta_2^1) = \begin{pmatrix} (3, 0) & (6, 4) & (3, 0) \\ (5, 5) & (7, 3) & (5, 5) \end{pmatrix}, \quad (4.7) \\ AB(\theta_1^1, \theta_2^2) = \begin{pmatrix} (5, 5) & (5, 5) & (7, 3) \\ (3, 0) & (3, 0) & (6, 0) \end{pmatrix}, \quad AB(\theta_1^2, \theta_2^2) = \begin{pmatrix} (5, 5) & (7, 3) & (5, 5) \\ (3, 0) & (6, 4) & (3, 0) \end{pmatrix}.$$

We will construct the Bayesian game for the game in incomplete and imperfect information over the set of informational non extended strategies  $I, J$  from (4.7). The set of types of the player 1 is  $\alpha \in \Delta_1 = \{1, 2\}$  and of the player 2 is  $\beta \in \Delta_2 = \{1, 2\}$ . Let's consider that the belief probabilities of the types are: for the player 1 :  $p(\beta|\alpha) = \begin{cases} p & \text{for } \beta = 1 \\ 1 - p & \text{for } \beta = 2 \end{cases}$  and for the player 2 :  $q(\alpha|\beta) = \begin{cases} q & \text{for } \alpha = 1 \\ 1 - q & \text{for } \alpha = 2 \end{cases}$ ,  $0 \leq p \leq 1$ ,  $0 \leq q \leq 1$ . Thus we get a Bayesian game in which the utility functions of the players, depending of their types, will be:

$$\mathbf{A}(\alpha = 1) = \begin{pmatrix} 5 - 2p & 5 - 2p & 5 - 2p & 5 - 2p & 5 - 2p & 6 & 3 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 6p & 6 - 3p & 3 + 3p & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 7 & 5 & 7 & 7 \\ 3 + 2p & 3 + 2p & 3 + 2p & 3 + 2p & 3 + 2p & 6 + p & 3 + 2p & 6 + p & 6 + p \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}(\beta = 1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4q & 0 & 4 & 4q \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4q & 0 & 4 & 4q \\ 5 & 3+2q & 5 & 3+2q & 5 & 5-q & 5 & 3 & 5-2q \\ 5 & 3+2q & 5 & 3+2q & 5 & 5-2q & 5 & 3 & 5-2q \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}(\alpha = 2) = \begin{pmatrix} 5-2p & 7-p & 5-2p & 7-p & 5-2p & 5-2p & 5-2p & 7-p & 5-2p \\ 3 & 6 & 3 & 6 & 3 & 3 & 3 & 6 & 3 \\ 3+2p & 7 & 5 & 7-4p & 5 & 5 & 5 & 7 & 5 \\ 3+2p & 6+p & 3+2p & 3+2p & 6+p & 3+2p & 3+2p & 6+p & 3+2p \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}(\beta = 2) = \begin{pmatrix} 5 & 3+2q & 5 & 3+2q & 5 & 5-2q & 5 & 3 & 5-2q \\ 0 & 4-4q & 0 & 4-4q & 0 & 0 & 0 & 4-4q & 0 \\ 5 & 3+2q & 5 & 3+2q & 5 & 5-2q & 5 & 3 & 5-2q \\ 0 & 4-4q & 0 & 4-4q & 0 & 0 & 0 & 4-4q & 0 \end{pmatrix}.$$

According to the Definition 4.2, we have  $(\tilde{\mathbf{i}}^*, \tilde{\mathbf{j}}^*) \equiv (i_1^* i_2^*, j_1^* j_2^*) \in NE(\Gamma_{Bayes})$  in the game (4.5)-(4.6), if for all  $i \in I, j \in J$  the following conditions hold

$$\begin{cases} E_1 \left( a_{i_1^* j_1^*}^{11}, a_{i_2^* j_1^*}^{12} \right) \geq E_1 \left( a_{i_1 j_1}^{11}, a_{i_2 j_1}^{12} \right), \\ E_1 \left( a_{i_1^* j_2^*}^{21}, a_{i_2^* j_2^*}^{22} \right) \geq E_1 \left( a_{i_1 j_2}^{21}, a_{i_2 j_2}^{22} \right), \\ E_2 \left( b_{i_1^* j_1^*}^{11}, b_{i_1^* j_2^*}^{21} \right) \geq E_2 \left( b_{i_1 j_1}^{11}, b_{i_1 j_2}^{21} \right), \\ E_2 \left( b_{i_2^* j_1^*}^{12}, b_{i_2^* j_2^*}^{22} \right) \geq E_2 \left( b_{i_2 j_1}^{12}, b_{i_2 j_2}^{22} \right). \end{cases}$$

Let  $p = q = \frac{1}{2}$ , then

$$\mathbf{A}(\alpha = 1) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 6 & 3 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 9/2 & 9/2 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 7 & 5 & 7 & 7 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 13/2 & 3 & 13/2 & 13/2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}(\alpha = 2) = \begin{pmatrix} 5 & 13/2 & 5 & 13/2 & 5 & 5 & 5 & 13/2 & 5 \\ 3 & 6 & 3 & 6 & 3 & 3 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 13/2 & 3 & 3 & 13/2 & 3 & 3 & 13/2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}(\beta = 1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & 9/2 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}(\beta = 2) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

For all  $\alpha = \overline{1, 2}$  the set of best response strategies of the player 1 is  $Br_1(1) = \{1, 3\}$ ,  $Br_1(2) = \{1, 4\}$ ,  $Br_1(3) = \{1, 3\}$ ,  $Br_1(4) = \{1\}$ ,  $Br_1(5) = \{4\}$ ,  $Br_1(6) = \{3\}$ ,  $Br_1(7) = \{2\}$ ,  $Br_1(8) = \{3\}$ ,  $Br_1(9) = \{3\}$ . Respectively, for all  $\beta = \overline{1, 2}$  the set of best response strategies of the player 2 is  $Br_2(1) = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$ ,  $Br_2(2) = \{2, 4, 8\}$ ,  $Br_2(3) = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$ ,  $Br_2(4) = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$ . Thus, the set of Bayese-Nash equilibrium profile is

$$BE[\Gamma_{Bayes}] = \{(1_1 1_2, 1_1 1_2), (1_1 1_2, 2_1 1_2), (2_1 1_2, 1_1 1_2), (2_1 1_2, 2_1 1_2), (2_1 1_2, 3_1 3_2)\}.$$

Using given above constructions and the Harsanyi theorem [7], we get the following theorem.

**Theorem 4.1** *The strategy profile  $(\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*)$  is a Bayes-Nash equilibrium in the game  $\Gamma_{Bayes}$  from (4.4) if and only if, for all  $\alpha \in \Delta_1, \beta \in \Delta_2$ , the strategy profile  $(\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*)$  is a Nash equilibrium for the subgame  $sub\Gamma_{Bayes} = \langle \{1, 2\}, \tilde{\mathbf{I}}(\alpha), \tilde{\mathbf{J}}(\beta), \mathbf{A}(\alpha), \mathbf{B}(\beta) \rangle$ .*

Using the terms of the informational extended strategies, these theorem means the following.

**Remark 4.2** *If the player 1 chooses the information extended strategy  $\theta_1^\alpha \in \Theta_1$  (respectively, the player 2 choose the information extended strategy  $\theta_2^\beta \in \Theta_2$ ) and assumes that the player 2, for all  $\beta \in \Delta_2$ , will choose the information extended strategies  $\theta_2^\beta$  with the probability  $p(\theta_2^\beta | \theta_1^\alpha)$  (respectively, the player 2 assumes that for all  $\alpha \in \Delta_1$ , the player 1 will choose the information extended strategies  $\theta_1^\alpha$  with the probability  $q(\theta_1^\alpha | \theta_2^\beta)$ ), then the Nash equilibrium profiles of the bimatrix Bayesian game with matrices  $\mathbf{A}(\alpha), \mathbf{B}(\beta)$ , for all  $\alpha \in \Delta_1, \beta \in \Delta_2$ , from (4.2)-(4.3) is the Bayes-Nash equilibria of the bimatrix informational extended game  $\tilde{\Gamma}$  from (4.1).*

Finally, to determine Bayes-Nash equilibria profiles of the bimatrix incomplete information game  $\tilde{\Gamma} = \langle \{1, 2\}, I, J, \left\{ AB(\alpha, \beta) = \left\| \left( a_{ij}^{\alpha\beta}, b_{ij}^{\alpha\beta} \right) \right\|_{i \in I}^{j \in J} \right\}_{\alpha=1, \kappa_1}^{\beta=1, \kappa_2} \rangle$  from (4.1), we have to follow next steps:

- using the "combinatorial algorithm", we construct, for all  $\alpha, \beta$ , the corteges  $\mathcal{I}^\alpha$  and  $\mathcal{J}^\beta$  that represent the informational extended strategies  $\theta_1^\alpha$  and  $\theta_2^\beta$ , respectively;
- construct the game of incomplete information on the set of information non extended strategies, i.e. construct, for each player, the set of possible utility matrices  $\left\{ A(\alpha) = \|a_{i_j^\alpha j_i^\beta}\|_{i \in I}^{j \in J}, B(\beta) = \|b_{i_j^\alpha j_i^\beta}\|_{i \in I}^{j \in J}, i_j^\alpha \in I^\alpha, j_i^\beta \in J^\beta \right\}_{\alpha=1, \kappa_1}^{\beta=1, \kappa_2}$ ;
- for all  $\alpha \in \Delta_1, \beta \in \Delta_2$ , construct the "belief probabilities"  $p(\theta_2^\beta | \theta_1^\alpha)$  and  $q(\theta_1^\alpha | \theta_2^\beta)$ ;
- generate the sets  $\left\{ \tilde{\mathbf{I}}(\alpha) \right\}_{\alpha \in \Delta_1}, \left\{ \tilde{\mathbf{J}}(\beta) \right\}_{\beta \in \Delta_2}$  of pure strategies for Bayesian game which correspond to the game  $\tilde{\Gamma}$ ;
- for all fixed  $\alpha \in \Delta_1$  and  $\beta \in \Delta_2$ , construct the payoff matrices  $\mathbf{A}(\alpha)$  from (4.2) and  $\mathbf{B}(\beta)$  from (4.3);
- using the existent algorithms, determine for all  $\alpha \in \Delta_1, \beta \in \Delta_2$  the set of Nash equilibrium profiles in the bimatrix game  $\langle \{1, 2\}, \tilde{\mathbf{I}}(\alpha), \tilde{\mathbf{J}}(\beta), \mathbf{A}(\alpha), \mathbf{B}(\beta) \rangle$ .
- using the theorem 4.1, construct the set of all Bayes-Nash equilibria in the game  $\Gamma_{Bayes}$  from (4.4).

## Bibliography

- [1] KUKUSHKIN N. S., MOROZOV V. V. *Teoria neantagonisticeskih igr.* Moskva: MGU, 1984 (in Russian).
- [2] NOVAC, L. Nash equilibria in the noncooperative informational extended games. Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova, Matematica, 2009, no. 1(59), p. 96–103.
- [3] HANCU BORIS. *Informational extended games generated by the one and double way directional informational flow.* Studia Universitatis, Seria Științe exacte și economice, No. 7(47), Chișinău, 2011, 32–43.

- [4] HANCU BORIS *Solving the games generated by the informational extended strategies of the players.* Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica. No 3(70), 2012, p. 53-62.
- [5] HARSANYI, JOHN C., REINHARD SELTEN. *A General Theory of Equilibrium Selection in Games* Cambridge, MA: MIT-Press. 1998
- [6] HANCU BORIS. *Solving two person games with complete and perfect informations.* Studia Universitatis, Seria Stiințe exacte și economice, No. 7(77), Chișinău, 2014, p. 3–16.
- [7] HARSANYI, JOHN C. Games with incomplete information played by Bayesian players. Part III: The basic probability distribution of the game. In: Management Science, 1968, no. 14, p. 486-502.

## QUANTIFYING INFORMATION QUALITY

*Ran BERGMANN*

*Moldova State University*

In the knowledge based information society, to which the modern world is moving, in order to enhance their global business performance, organizations must be careful with the quality of their information since it is one of their main assets. But what are the main dimensions of information quality (IQ), how to ensure the desired quality etc.?

The purpose of this paper is to demonstrate the importance of the business information quality assessment, in according to analysis of scientific literature, and to perform a summary of principal dimensions, ways and possibilities for IQ management.

**Keywords:** *data quality, information quality, quality management.*

### CUANTIFICAREA CALITĂȚII INFORMAȚIEI

În societatea informațională globală bazată pe cunoaștere, spre care tinde lumea modernă, pentru a-și îmbunătăți performanța de afaceri la nivel mondial, organizațiile sunt nevoite să se preocupe de calitatea informațiilor, care constituie unul dintre activele lor principale. Dar care sunt principalele dimensiuni ale calității informației, cum să se asigure calitatea dorită etc.?

Scopul lucrării este de a demonstra, în baza analizei literaturii științifice, importanța evaluării calității informațiilor de afaceri și de a efectua o sinteză a principalelor dimensiuni, componente, metode și posibilități de management al calității informațiilor.

**Cuvinte-cheie:** *calitatea datelor, calitatea informațiilor, managementul calității.*

### Introduction

According to experts, Quality of Information (IQ) can be achieved through management by integrating some corresponding management activities into the organizational processes [1] and quantifying and assessment of IQ is a key determinant of IQ management [2-3].

Nowadays, when our current society is in transition of historical stage from large industrial era to the information age (also known as the *Computer age*, *Digital age* or *New media age*, based on information computerization), we all use information systems and the internet (International Interconnected Networks) [4]. For example, most of our society use google and other kinds of searching engines, get important data about the bank transactions, get work assignments and even set appointments with a doctor through the internet. We cannot imagine modern society without information. The quality and timing of information determine the degree of success of any business organization. So organizations that want to gain competitive advantage should treat information not only as subsidiary business element, but also as a product that quality may differ and that should be managed efficiently using appropriate methods, principles and means of quality management [5].

In this article, we review the general concept of information quality, and look for the basic elements that exist in the literature and research to assess the quality of the information. We indicate the relationship between *data* and *information quality* and we make a comparison between the two main models and highlighting the common between them in order to develop a better measure of the quality of information as the basis for a better assessment.

### 1. The relationship between data and information

Information is defined as data processed to be useful and either defined as data that represents the results of a computational process, such as statistical analysis, for assigning meanings to the data, or translation of the meaning given by people usually by using software tools like Information Systems (IS) [6]. Data are numbers, words or images that have yet to be organized or analyzed to answer a specific question [7]. It represents real world objects, in a format that can be stored, retrieved and elaborated by a software procedure [8]. In the computing literature, some of the studies use data and information terms interchangeably. Although there is still an ambiguity around their definitions, a consensus is also available that they are not the same thing. But the relationship between data and information is an interconnected one, data is raw facts such as phone

numbers or addresses, and information is the organization of these raw facts into a meaningful manner. From the quality point of view it is important to consider both of them due to the dependences between *input accuracy* and *output accuracy* [9,10]. The implications of data quality are partly determined by the relationship between the quality of the input data and the quality of the information that an information system outputs. This is because data often passing various processing before any actual use, such that quality may change. However, the relationship between an information system's data accuracy and its output information accuracy is hard to assess. The popular belief is reflected by the saying "*garbage in garbage out*", namely, the accuracy of the output of an information system is positively and tightly linked to the accuracy of its input. Yet, this belief has not been validated [11].

Information is generated through the transformation of data. According to O'Brien & Marakas [12], Information as data that have been converted into a meaningful and useful context for specific end user's needs.

Figure 1 explains how the Data is transformed into Information [10, 13].



Figure 1. Transforming Data into Information

## 2. Quality management

The definition of quality sometimes depends on the role of people who describes it; there is no single, universal definition of quality. Some people view quality as "*performance to standards.*" Others view it as "*meeting the customer's needs*" or "*satisfying the customer*" [14] p.151. Therefore, different definitions of quality are available. According to Oxford dictionary, quality means "*the standard of something as measured against other things of a similar kind; the degree of excellence of something*" [15].

In manufacturing, "*a measure of excellence or a state of being free from defects, deficiencies, and significant variations, brought about by the strict and consistent adherence to measurable and verifiable standards to achieve uniformity of output that satisfies specific customer or user requirements*". ISO 8402-1986 standard defines quality as "*the totality of features and characteristics of a product or service that bears its ability to satisfy stated or implied needs*" [16]. There are a lot of approaches to handle quality, each one of the specialists of quality is probably convinced that his method of assuring and measuring quality is the best. The PMBOK (Project Management Body of Knowledge) Guide [17] describes three elements of quality management: *quality planning*, *quality assurance*, and *quality control*. The Juran Trilogy describes three slightly different elements: *quality planning*, *quality control*, and *quality improvement* [18]. (Joseph M. Juran holds degrees in electrical engineering and law. Juran worked at the Hawthorne Electric Plant in Chicago in the 1920's (as did Deming) and also taught at New York University. He is also well known in Japan for his contributions to the practice of total quality control after the Second World War). Juran's view includes assurance and control activities within quality control, but also adds the essential element of quality improvement.

ISO describe eight quality management principles on which the quality management system standards of the ISO 9000 series are based [19]: (1) Customer focus, (2) Leadership, (3) Involvement of people, (4) Process approach, (5) System approach to management, (6) Continual improvement, (7) Factual approach to decision making, (8) Mutually beneficial supplier relationships.

The PMBOK Guide points that quality management processes: "*include all the activities of the performing organization that determine quality policies, objectives, and responsibilities so that the project will satisfy the needs for which it was undertaken*". This description is sufficiently general to include the needs of the project in terms of *time, cost, and scope* and the needs of the product of the project or customers of the project in terms of the defined requirements. Project quality management is connected to all organizational quality management activities in terms of processes and costs [20, p.41].

Other approach is to combine the better of these views to include *quality planning*, *quality assurance*, *quality control* and *quality improvement*. We want to determine the most suitable quality dimensions, mainly from the point of views of the users, and find what the key dimensions to satisfy the users are, that will used as a basis for the quality evaluation.



### 3. Data quality management

Impact of Data Quality (DQ) on Organizational Performance Madnick et al. (2009) [21] note that there are technical and nontechnical issues that may cause data and information quality problems: “Organizations have increasingly invested in technology to collect, store, and process vast quantities of data. Even so, they often find themselves stymied in their efforts to translate this data into meaningful knowledge that they can use to improve business processes, make smart decisions, and create strategic advantages. Issues surrounding the quality of data and information that cause these difficulties range in nature from the technical (e.g., integration of data from different sources) to the nontechnical (e.g., lack of a strategy across an organization ensuring the right stakeholders have the right information in the right format at the right place and time)” [22].

Data Quality Management (DQM) is a combination of the collection, organization, storage, processing, and presentation of high-quality data. In addition, it deals with organizational issues that must be addressed, such as maintaining sponsorship, managing expectation, avoiding scope creep, and handling political issues [23-26]. However, responsibility for improving data quality and managing corporate data is often assigned to IT departments [27]. Also, many companies try to cope with Data Quality (DQ) issues by simply implementing data management or data warehouse systems. Surveys on data warehousing failures reveal that organizational rather than technical issues are more critical to their success [28-30]. Figure 2 shows the scope of DQM within the context of IT and quality management.

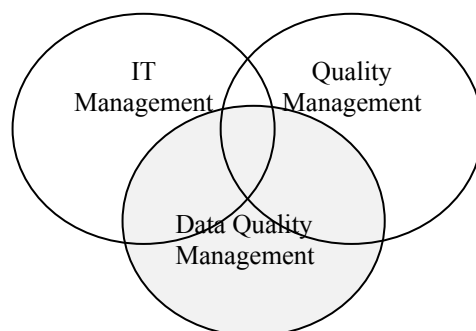


Figure 2. Data quality management in the context of IT and quality management [30]

### 4. Total data quality management

Total Data Quality Management (TDQM) was initially introduced at the Massachusetts Institute of Technology (MIT) in 1990s as an extension of Total Quality Management, while its main purpose is to develop a theoretical foundation for data quality. TDQM uses the Information Product (IP) approach inspired by the resemblance between manufacturing product of TQM and data. Wang summarizes the purpose of TDQM as “delivering high quality information products to information consumers” [31]. TDQM adopts Deming’s “Plan, Do, Check and Act” from the TQM literature and creates its own “Define, Measure, Analyze, and Improve” cycle as a continuous process [2]. Table 1 shows a comparison between Product vs. Information Manufacturing [31], with the emphasis on the partial similarities between the manufacture and information product used by the TDQM [32].

Table 1

Product vs. Information manufacturing [31]

	Product Manufacturing	Information Manufacturing
Input	Raw Materials	Raw Data
Process	Assembly Line	Information System
Output	Physical Products	Information Products

### 5. Total information quality management

Total Information Quality Management (TIQM) methodology (formerly known as Total Quality Data Methodology – TQDM) is inspired by quality management concepts analogous to those of TDQM. Deming Management Method and Keizen had an especially big influence while establishing the basis of the methodology. It has been initially designed to support data warehouse projects where data from different sources is

consolidated into a common integrated database [24]. TIQM mainly concentrates on management activities that should be performed during the integration of those data sources, in order to make choices best fitting the organization. A detailed classification of costs and benefits is provided as part of the methodology. The main goal of the cost-benefit analysis is finding out the most useful and effective quality improvement activities; such that once they are performed, their benefit should exceed their cost.

TIQM consist of six process steps [33]: (1) Assess data definition and information architecture quality, (2) Assess information quality, (3) Measure non-quality information costs and risks, (4) Reengineer and correct data, (5) Improve information process quality, (6) Establish the information quality environment.

## 6. Information quality

Information Quality (IQ) has become a critical concern of organizations and an active area of Management Information Systems (MIS) research. The growth of data warehouses and the direct access of information from various sources by managers and information users have increased the need for, and awareness of, high-quality information in organizations [34].

Information quality is one of the key determinants of information system success. When information quality is poor, it can cause a variety of risks in an organization [35]. Information quality is the desirable characteristics of the system outputs [10]. Information quality is either the sum of information quality characteristics that satisfy the information consumers' (knowledge workers') expectations and needs. Only high quality information enables to make reasonable business decisions. Consequently, this is information that is delivered to the right person at the right time and place. Topical modern business problems are as follows: how to pick right information from its abundance, how to decide which information is correct, and which one is useless, finally, how to assess the quality of information [5].

After an extensive review of the literature, an agreed definition of information quality also seems to be an elusive concept and difficult to define in a way that is conceptually satisfying. There are a number of theoretical frameworks for understanding data and information quality. *Levis et al* [36], summarized the main points of some important models. Redman, Orr and others [37-39] present a cybernetic model of information quality that views organizations as made up of closely interacting feedback systems linking quality of information to its use, in a feedback cycle where the actions of each system are continuously modified by the actions, changes and outputs of other systems. Data and information are of high quality "if it is fit for its intended use" (also "fit-for purpose"). Wang&Strong (1996) propose a DQ/IQ framework that includes the categories of *intrinsic* data quality, *accessibility* data quality, *contextual* and *representational* data quality from the perspectives of those who used the information [40, 41]. Information quality, just as a material product has quality dimensions associated with it, an IP has IQ dimensions. IQ has been viewed as fitness for use by information consumers, with four IQ categories and fifteen dimensions identified [31], [40]. As shown in Table 2.

**Table 2**

**Categorized of IQ/DQ and dimensions [40]**

<b>IQ Category</b>	<b>IQ Dimensions</b>
Intrinsic IQ	Accuracy, Objectivity, Believability, Reputation
Accessibility IQ	Access, Security
Contextual IQ	Relevancy, Value-Added, Timeliness, Completeness, Amount of data
Representational IQ	Interpretability, Ease of understanding, Concise representation, Consistent representation

The goal of Information Quality Management (IQM) introduced in the 1990s is to increase the value of high quality information assets. Most researchers and practitioners agree, that the key to understanding information quality is to understand the processes that generate, use, and store data. High quality information is a critical enabler to TQM and, serves as a key to quality success. Better quality and productivity may not be the issue, but rather better information quality. Information is critical to all functions and all functions need to be integrated by information. Organizational knowledge is based on exchange of information between customers, employees, information suppliers, and the public [42].

### 7. Quantifying information quality

Information Quality (IQ) is a measure of how fit information is for a purpose. Sometimes called Quality of Information (QoI) by analogy with Quality of Service (QoS), it quantifies whether the correct information is being used to make a decision or take an action. Not understanding when information is of adequate quality can lead to bad decisions and catastrophic effects, including system outages, increased costs, lost revenue and worse. Quantifying information quality can help improve decision-making, but the ultimate goal should be to select or construct information producers that have the appropriate balance between information quality and the cost of providing it [43]. Pipino et al. (2002) categorizes DQ/IQ assessment into objective and subjective assessment. Objective assessments reveal quality problems in databases while subjective assessments reflect the needs and experiences of data consumers [44]. Objective IQ, assessment measures the extent to which information conforms to quality specifications and references. Subjective IQ, assessment measures the extent to which information is fitness for use by information consumers [45]. Table 3 indicates the differences between objective and subjective IQ assessment.

Table 3

Comparison of objective and subjective IQ assessment [45]

Method \ Feature	Objective assessment	Subjective assessment
Tool	Software	Survey
Measuring Object	Data	Information
Standard	Rules, Patterns	User Satisfaction
Process	Automated	User Involved
Result	Single	Multiple

### 8. Measuring information quality model

An Information Quality Model structure the IQ measurable concept by defining the relationship between attributes of information products and information needs.

Generic modules determine that, the same relationships always hold; e.g. a generic model might say that, no matter what process is being performed. The relevance, timeliness, completeness and reliability or the information product are important factors in the satisfaction of information need. Targeted models, on the other hand, state that, in a particular context and when performing a particular process, the satisfaction of the information need will depend on a specific set of information product attributes. A targeted model may include weights for each attribute so that their relative importance can be brought into the algorithm that calculates the indicator for identifying the best opportunities for improvement [46].

Information quality is an assessment of whether information is suited for the purposes to which it is put, and IQ metrics provide quantitative data to make this assessment. The metrics can be divided into three categories: standalone, composite, and context-dependent IQ metrics. Table 4 represent the classification of IQ metrics, by Keeton et al 2009 [43].

Table 4

Keeton, Mehra &amp; Wilkes classification of IQ metrics

Standalone IQ metrics	Standalone IQ metrics are independent of the use the information is put to, and can be directly measured by the information producer. They include: how recent is the data? How complete is it? How accurate is it? How representative is it?
Composite IQ metrics	Composite IQ metrics are measured across multiple producers. For example: is this data producer unique, or is there a duplicate copy obtainable elsewhere? Do these two producers agree (e.g., the strength of correlations or duplicate coverage between them)? Do we know the information's provenance? Is it auditable? Which producer should be trusted more for the desired purpose?
Context-dependent IQ metrics	Context-dependent IQ metrics can only be calculated relative to the context and needs of the information consumer. They generally cannot be evaluated by looking solely at a single information producer

### 9. Data quality dimensions

Another data quality classification is provided by Wand and Wang [47]. They limit their focus to intrinsic data qualities, of which they define four intrinsic dimensions: completeness, unambiguousness, meaningfulness and correctness. Wand and Wang take as their basis a paper, which features a review of cited data quality dimensions, i.e. the comprehensive literature review of Wang et al. [48]. Based on the comprehensive literature review, Wand and Wang summarize the 26 most often cited data quality dimensions as shown in Table 5.

Table 5

Cited data quality dimensions Source: Wand and Wang

Quality dimensions	Frequency	Quality dimensions	Frequency	Quality dimensions	Frequency
Accuracy	25	Format	4	Comparability	2
Reliability	22	Interpretability	4	Conciseness	2
Timeliness	19	Content	3	Freedom from bias	2
Relevance	16	Efficiency	3	Informativeness	2
Completeness	15	Importance	3	Level of detail	2
Currency	9	Sufficiency	3	Quantitativeness	2
Consistency	8	Usableness	3	Scope	2
Flexibility	5	Usefulness	3	Understandability	2
Precision	5	Clarity	2		

As mentioned, Wang and Strong [40] propose a DQ/IQ classification which divides data quality into four categories: *intrinsic*, *contextual*, *representational*, and *accessibility*. For each category, they define a set of dimensions. The definition by Wang and Strong is discussed by Haug et al [49] who argues that "representational data quality" can be perceived as a form of "accessibility data quality" instead of a category of its own.

Thus, Haug et al. define three data quality categories: intrinsic, accessibility and usefulness. Levitin and Redman [50] provide another perspective by arguing that since processes to produce data have many similarities to processes that produce physical products, data producing processes could be viewed as producing data products for data consumers. With a basis in this view of data as resources, Levitin and Redman discuss how thirteen basic properties of organizational resources may be translated into properties for data [51].

### 10. Information quality dimensions

Information quality is commonly thought of as a multi-dimensional concept with varying attributed characteristics depending on a quality view-point. Each organization or the information consumer (the customer or the user) has a different view of the dimensions of information quality. Determine information quality dimensions for the information quality can be used to add structure and instrumental to this inherent complexity. Table 6 provides a summary of the 20 most common dimensions and the frequency with which they are included in the comparison Information Quality Frameworks of Shirlee-ann Knight and Janice Burn (2005) [52]. Definitions of the Common Dimensions are in Table 8.

Table 6

The common dimensions of IQ/DQ [52]

Quality dimensions	Frequency	Quality dimensions	Frequency	Quality dimensions	Frequency
Accuracy	8	Understandability	5	Believability	3
Consistency	7	Accessibility	4	Navigation	3
Security	7	Availability	4	Reputation	3
Timeliness	7	Objectivity	4	Useful	3
Completeness	5	Relevancy	4	Efficiency	3
Concise	5	Usability	4	Value-Added	3
Reliability	5	Amount of data	3		

Confusingly enough, quality dimensions are named and approached differently in different frameworks. As we can see, some dimensions are common and used by the two frameworks. In order to merge the two frameworks for assessing data and information quality, we propose a scale to determine the scores of the frequency weighted of each of the quality dimension measurements. For the scoring calculation, we sum the number of occurrences from the two frameworks (from Table 5 and Table 6) and determine the highest score with the greatest value, namely, rank the dimensions. These ranks will be used as the basis for calculating the score scale between 0 and 10, with 10 –the highest score. In Table 7 we show the frequency score of the 36 quality dimensions based on the two frameworks, so that made for each of the quality dimensions, the weighting of their grades according to the number of occurrences. This provides us a measurement scale for the quality dimensions with the frequency score.

Table 7

Quality dimensions and the frequency score

Quality dimensions	Frequency score	Quality dimensions	Frequency score	Quality dimensions	Frequency score
Accuracy	10	Usability	2.50	Interpretability	0.80
Timeliness	8.18	Efficiency	2.48	Content	0.60
Reliability	7.53	Useful	2.48	Importance	0.60
Completeness	6.13	Amount of data	1.88	Sufficiency	0.60
Consistency	5.98	Believability	1.88	Usableness	0.60
Relevancy	5.70	Navigation	1.88	Clarity	0.40
Security	4.38	Reputation	1.88	Comparability	0.40
Concise	3.53	Value-Added	1.88	Freedom from bias	0.40
Understandability	3.53	Currency	1.80	Informativeness	0.40
Accessibility	2.50	Flexibility	1.00	Level of detail	0.40
Availability	2.50	Precision	1.00	Quantitativeness	0.40
Objectivity	2.50	Format	0.80	Scope	0.40

Table 8

Common Quality Dimensions Definitions of DQ\IQ [40], [52]

	Dimension	Definition
1.	Accessibility	Extent to which information is available, or easily and quickly retrievable.
2.	Accuracy	The extent to which data are correct, reliable and certified free of error.
3.	Amount of data	Extent to which the quantity or volume of available data is appropriate.
4.	Availability	Extent to which information is physically accessible.
5.	Believability	Extent to which information is regarded as true and credible.
6.	Completeness	Extent to which information is not missing and is of sufficient breadth and depth for the task at hand.
7.	Concise	Extent to which information is compactly represented without being overwhelming (i.e. brief in presentation, yet complete and to the point).
8.	Consistency	Extent to which information is presented in the same format and compatible with previous data.
9.	Efficiency	Extent to which data are able to quickly meet the information needs for the task at hand.
10.	Navigation	Extent to which data are easily found and linked to.
11.	Objectivity	Extent to which information is unbiased, unprejudiced and impartial.
12.	Relevancy	Extent to which information is applicable and helpful for the task at hand.
13.	Reliability	Extent to which information is correct and reliable.
14.	Reputation	Extent to which information is highly regarded in terms of source or content.
15.	Security	Extent to which access to information is restricted appropriately to maintain its security.



	Dimension	Definition
16.	Timeliness	Extent to which the information is sufficiently up-to-date for the task at hand.
17.	Understandability	Extent to which information is clear without ambiguity and easily comprehended.
18.	Usability	Extent to which information is clear and easily used.
19.	Useful	Extent to which information is applicable and helpful for the task at hand.
20.	Value-Added	Extent to which information is beneficial, provides advantages from its use.

In Figure 4, the graph represents only the 10 quality dimensions which are common and shared in the two frameworks, for measuring data quality and information quality.

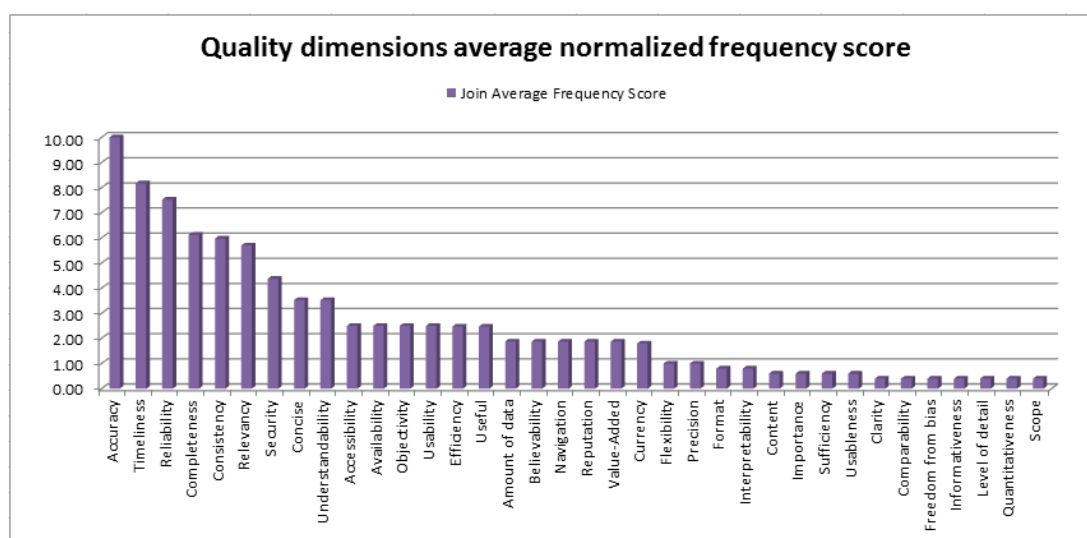


Figure 3. DQ/IQ dimensions average normalized frequency score

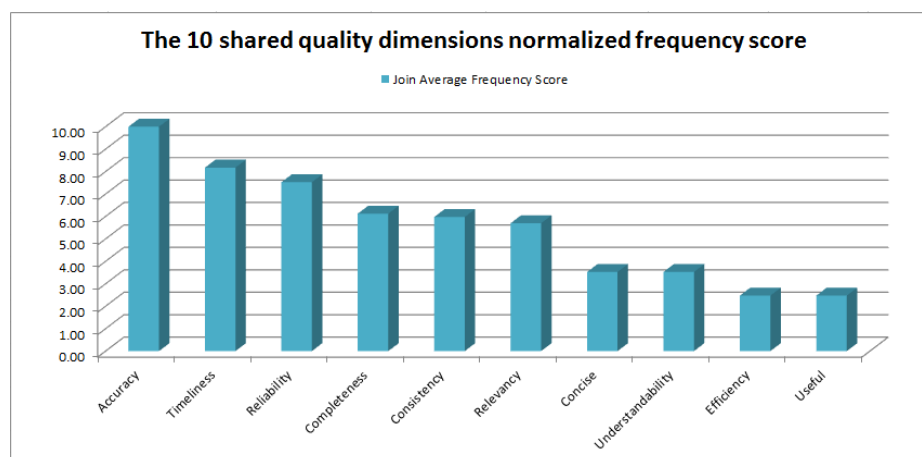


Figure 4. The 10 DQ/IQ shared quality dimension normalized frequency score

### 11. Various methodologies of information quality assessment

More than two decades of research in the emerging field of IQ has developed useful theories, methodologies, and technologies for assessing, improving, and managing the quality of various types of information [21]. The concept of IQ goes beyond accuracy. It includes more than a dozen other dimensions such as timeliness, completeness, consistency, interpretability, accessibility, security, to name only a few [40]. These different dimensions can be grouped into different categories. Several IQ frameworks have been developed to define and categorize various IQ dimensions [2, 40, 53, 54]. Among various IQ management methodologies, the Total Data Quality Management methodology [55] is one of the most used in researches and

practice. It suggests that information should be treated as a product (Information Product) and managed continuously by following the cycles of improving Quality through: Define, Measure, Analyze, and Improve (DMAIC) [23]. Existing research has attempted to identify a full spectrum of IQ issues, most users are only concerned with a very few IQ dimensions. In fact, research has shown that a user typically can only handle approximately seven concepts without being confused or to flooded with data [56].

Thus it is not effective to present too many IQ dimensions when informing users or occupy their inputs about quality. Therefore numerous machine-based IQ assessment methods have been developed. Depending on the type of the information (e.g., structured vs. structured, centrally produced vs. socially contributed, medical domain vs. IT domain), different sets of metrics are selected and automatically assessed using different input features. Functional dependency analysis [57] and statistical analysis [58] can be used to identify various quality problems in relational and other types of structured sources. Record linkage techniques [59] can be used to detect duplicates and inconsistencies. For textual data, various quality indicators can be used as a proxy for quality metrics. The indicators can be based on content (e.g., information-to-noise ratio), metadata (e.g., Web page's last update date), or other features (e.g., HTML syntactic correctness). Up to 26 such indicators have been used to assess the quality of online health information [60]. With the growth of social media such as Wikipedia and various discussion forums, there has been growing amount of research that focuses on assessing the quality of socially contributed contents. The algorithms are usually specific to a particular type of social media platform because they rely on certain features specific to the platform. Most machine-based methods are scalable and can produce IQ metadata useful for improving the effectiveness of Web search and information retrieval. However, automatic algorithms can, at best, estimate the overall quality. They cannot reliably generate ratings along quality dimensions because the relationship between selected features and quality dimensions are usually unknown or unreliable. For example, number of edits is mapped to authority and article length is mapped to completeness for Wikipedia articles [2]. It is debatable whether such mappings make sense. Ratings along quality dimensions are necessary for explication purposes and for the effective use of information (e.g., making trade-offs between dimensions). Furthermore, certain selected metrics may be irrelevant to users in their intended uses of the information.

More importantly, machine-based methods cannot capture users' perspectives about IQ. User-based assessment relies on user inputs collected using questionnaire surveys, ratings, or freeform comments. A systematic survey instrument [34] has been used in various organizations to assess IQ perceived by users of different roles in the information supply chain. The survey method requires significant user involvement and is often used to assess a collection of IP's as a whole, thus it is not scalable to obtain real-time IQ assessment at a fine-granularity. Minimalist approach to online voting (such as thumbs up/down and "has the article helped you") does not capture sufficient information for quality improvement purposes. Freeform feedback option is cumbersome and thus rarely used by users.

User-based methods can capture user's perspectives about IQ but are not scalable. They also lack the necessary granularity and specificity in terms of the IP (in the case of the survey method) and the IQ metadata (in the case of the simple voting method). Furthermore, the lack of user incentives often results in scarcity of useful feedback and even leads to biased and malicious feedback. Hongwei Zhu, Yinghua Ma, Guiyang Surealized (2011) that these challenges require further research [61].

### Conclusions

Information and its use is a very important resource for any kind of organization, not less important than other resources. To be better than the competitors, organizations have to get the best, the most updated and useful information, and for that purpose they have to know how to supply the best quality, monitoring and assessing of the information. Organizations who realize that information is a part of the organizational quality process will get superiority over the competitors [1]. Therefore, organizations should determine who is responsible for quality improvement and quality assessment of the information. Moreover, *it is important to determine the quality evaluation system, using machine-based methods and user-based assessment, to monitor and measure quality improvement over a time period and compare it to previous periods.*

To ensure information quality, organizations must comply in accordance with a clearly defined quality dimensions, like quality control in the manufacture of other products (goods and services), which are provided and are valued in accordance with the specific quality characteristics. As a result, the dimensions of IQ/DQ are the basis for assessing the quality of information.



Information Quality literature has provided a great amount of proposals for assessing the quality of information, but there is still a need to develop frameworks for assessing and improving the quality of information from the information consumer and the organizational point of view in the perspective of the information project classification. Moreover, for each dimension there must be set a clear definition what it represents, in order to be able to compare it for any type of Information Project (i.e. information system) throughout its life cycle.

In this paper, we prefer to base on the Data quality dimensions scale proposed initially by Wand and Wang [47] and the Information quality dimensions proposed by Shirlee-ann Knight and Janice Burn [52]. Both are strong and well validated. There are some basic differences in the theories of both models since data and information are not the same. However, most of the dimensions used, and especially the most frequent ones, are very similar. In this work, we tried to combine the two models and built a shared set of dimensions. Hopefully, this will give a starting point for the further research.

In order to prepare an assessment scale and give the appropriate weight for each of the quality indicator for certain project information, we revealed that quantifying information quality involves two main stages: first, identifying which dimensions are important and relevant to the information project and second, determining how these dimensions affect the customers' needs when they consume the information. This will enable to perform more accurate assessment of the quality, identifying discrepancies and determining the necessary actions for improvement.

#### Acknowledgements

Special thanks to my supervisor for his great support and advice, *Associate Professor Dr. Tudor Bragaru*, Mathematics and Informatics Department.

Special thanks to *Dr. Julia Sirota* for her great support and advice.

#### Bibliography:

1. CABALLERO, I., CALERO, C., PIATTINI, M. IQM3: Information Quality Management Maturity Model. In: *Journal of Universal Computer Science*, 2008, vol.14, p.3658-3685.
2. STVILIA, B. et al. A framework for information quality assessment. In: *Journal of the American society for information science and technology*, 2007, no.58, p.1720-1733.
3. MOUZH, Ge., MARKUS, G., DIETMAR, J. Information Quality Assessment. In: *Vvalidating measurement dimensions and processes, ECIS 2011*, <http://aisel.aisnet.org/ecis2011/>.
4. JIANG, L. et al. Contrastive Analysis on Network Performance of Information System. In: *International Journal of Multimedia and Ubiquitous Engineering*, 2015, vol.10, p.265-276.
5. RUŽEVIČIUS, J., GEDMINAITĖ, A. Peculiarities of the business information quality assessment. In: *Vadyba / management*, 2007, no.1, p.54-60.
6. CHEN, M. et al. Data, Information, and Knowledge in Visualization. In: *IEEE Computer Graphics and Applications*, January/February 2009, p.12-19.
7. Improving information to support decision making: standards for better quality data. A framework to support improvement in data quality in the public sector. *Audit Commission for local authorities and the National Health Service in England*, 2007. 21 p.
8. BATINI, C., SCANNAPIECA, M. *Data Quality Concepts, Methodologies and Techniques*. Leipzig: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. 276 p. ISBN-10 3-540-33172-7
9. AAMODTA, A., NYGÅRDB, M. Different roles and mutual dependencies of data, information, and knowledge - an AI perspective on their integration. In: *Data and Knowledge Engineering* 1995, vol.16, p.191-222.
10. HASAN AL-MAMARY, Y., AZIATI, N. The Relationship between System Quality, Information Quality, and Organizational Performance. In: *International Journal of Knowledge and Research in Management & E-Commerce*, 2014, vol.4, p.7-10.
11. GELMAN, I. Simulations of the relationship between an information system's input accuracy and its output accuracy. In: *Proceedings of the Ninth International Conference on Information Quality (ICIQ-04)* 2004, p.99-110.
12. O'BRIEN, J. *Management information systems*. McGraw-Hill/Irwin, a business unit of The McGraw-Hill Companies, Inc., 2011. ISBN: 0073376817
13. HASAN AL-MAMARY, Y., AZIATI, N. The Meaning of Management Information Systems and its Role in Telecommunication Companies in Yemen. In: *American Journal of Software Engineering*, 2014, vol.2, p.22-25.
14. DAN REID, R. *Operations Management*. John Wiley & Sons, 4th ed., 2011. ISBN:0470325046
15. Definition of quality in: <http://www.oxforddictionaries.com/definition/learner/quality>

16. Definition of quality in: <http://www.businessdictionary.com/definition/quality.html>
17. A guide to the Project Management Body of Knowledge. Third Edition ed: Project Management Institute, Inc.; 2004.
18. SUAREZ, J. *Three Experts on Quality Management: Philip B. Crosby, W. Edwards Deming, Joseph M. Juran*. Department of the Navy Total Quality Leadership Office 1992, no.92-02.
19. Quality management principles, 2012. [http://www.iso.org/iso/qmp\\_2012.pdf](http://www.iso.org/iso/qmp_2012.pdf).
20. ROSSE, K. *Project Quality Management Why, What and How*. J.ROSS publishing, 2005. 193 p. ISBN 1-932159-48-7
21. STUART, E. et all. Overview and Framework for Data and Information Quality Research. In: *ACM Journal of Data and Information Quality (JDIQ)*, 2009.
22. SAMITSCH, C. *Data Quality and its Impacts on Decision-Making How Managers can benefit from Good Data*. Springer, 2015, p.4-13.
23. WANG, R. et all. Manage Your Information as a Product. In: *Sloan Management Review* 1998, vol.39, p.95-105.
24. ENGLISH, L. *Improving Data Warehouse and Business Information Quality*. Wiley & Sons: New York, 1999.
25. NOHR, H. *Management der Informationsqualität*. Springer Fachmedien: 2001, p.57-77.
26. EPPLER, M. *Managing Information Quality*. Springer, 2006, Second Edition.
27. FRIEDMAN, T. *Gartner Study on Data Quality Shows That IT Still Bears the Burden*. Gartner, 2006.
28. WATSON, H., ARIYACHANDRA, T. Data warehouse governance: best practices at Blue Cross and Blue Shield of North Carolina. In: *Decision Support Systems*, 2004, vol.38, p.435-450.
29. WENDE, K. A Model for Data Governance – Organising Accountabilities for Data Quality Management. In: *18th Australasian Conference on Information Systems*, 2007, p. 416-425.
30. WENDE, K. A contingency approach to data governance. In: *12th International Conference on Information Quality (ICIQ-07)*, 2007.
31. WANG, R. A Product Perspective on Total Data Quality Management. In: *Communications of the ACM* 1998, vol.41, p.58-65.
32. SOYER, A. *Data Quality Management: A Solvency II Perspective*. Universiteit Leiden, 2013.
33. ENGLISH, L. *Total information quality management: A complete methodology for IQ management*. DM Review, 2003.
34. YANG W et al. AIMQ: a Methodology for Information Quality Assessment. In: *Information & Management*, 2002, vol.40, p.133-146.
35. BOREK, A., WOODALL, P., TOMASELLA, M. A Risk Based Model For Quantifying The Impact Of Information Quality. In: *Computers in Industry*, 2014, vol.65, p.354-366.
36. LEVIS, M., BRADY, M. Information quality management: review of an evolving research area. In: *12th International Conference on Information Quality*, 2007.
37. REDMAN, T. Improve Data Quality for Competitive Advantage. In: *Sloan Management Review*, 1995, p. 99-107.
38. ORR, K. Data Quality and Systems Theory. In: *Communications of the ACM*, 1998, vol.41, p.66-71.
39. BECKFORD, J. *Quality A critical introduction*. NewYork: Routledge, 1998.
40. WANG, R., STRONG, D. Beyond accuracy: what data quality means to data consumers. In: *Journal of Management Information Systems*, 1996, vol.12, p.5-33.
41. KNIGHT, S. A Conceptual Framework for Investigating Information Quality in Information Systems. In: *Information and Records Management Annual*, 2008.
42. LEVIS, M., BRADY, M. *Information quality issues highlighted by deming's fourteen points on quality management*. Dublin City University Ireland, 2008.
43. Kimberly Keeton and Pankaj Mehra HP Labs JWG, Inc. Do you know your IQ? A research agenda for information quality in systems. In: *ACM*, 2009, vol.37, p.26-31.
44. PIPINO, L. WANG, R. Data Quality Assessment. In: *Communications of the ACM*, 2002, vol.45, p.211-218.
45. HELFERT, M. et al. Analysing The Effect Of Security On Information Quality Dimensions. In: *ECIS Proceedings*, 2009, paper 58.
46. JOHNSON, M. Improving the Quality of Information for Software Project Management. *Springer: 2007, vol. 4895 of Lecture Notes in Computer Science: 1-20*.
47. WAND, Y., WANG, R. Anchoring Data Quality Dimensions in Ontological Foundations. In: *Communications of the ACM*, 1996, vol.39.
48. WANG, R., STOREY, V., FIRTH, C. A Framework for Analysis of Data Quality Research. In: *IEEE transactions on knowledge and data engineering*, 1995, vol.7, p.623-640.
49. HAUG, A., PEDERSEN, A. A classification model of ERP system data quality. In: *Industrial Management & Data Systems*, 2009, vol.109.
50. LEVITIN, A., REDMAN, T. Data as a Resource: Properties, Implications, and Prescriptions. In: *Sloan Management Review*, 1998, vol.40, p.89-101.
51. HAUG, A., LIEMPD, D. University of Southern Denmark. The costs of poor data quality. In: *Journal of Industrial Engineering and Management*, 2011, vol.4, p.168-193.

52. KNIGHT, S., BURN, J. Developing a Framework for Assessing Information Quality on the World Wide Web. In: *Informing Science Journal*, 2005, vol.8.
53. BOVEE, M., MAK, B. A Conceptual Framework and Belief-Function Approach to Assessing Overall Information Quality. In: *International Journal of Intelligent Systems*, 2003, vol.18, p.51-74.
54. ROSANNE, J. PRICE, G. A Semiotic Information Quality Framework Decision Support in an Uncertain and Complex World. In: *The IFIP TC8/WG8.3, International Conference*, 2004, p.658-672.
55. MADNICK, S., WANG, R. Introduction to the TDQM Research Program. In: *Sloan School of Management, MIT*, 1992.
56. MILLER, G. The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. In: *Psychological Review*, 1956, vol.63, p.81-97.
57. FAN, W. Dependencies revisited for improving data quality. *Proceedings of the 27 ACM SIGMOD-SIGACT-SIGART Symposium on Principles of Database Systems*, 2008, p.159-170.
58. DASU, T., JINSON, T. Exploratory Data Mining and Data Cleaning. *A JOHN WILEY & SONS, INC.*, 2003.
59. THOMAS, N. et al. *Data Quality and Record Linkage Techniques*. Springer, 2007.
60. EYSENBACH, G. et al. Empirical studeis asesing the quality of health information for consumers one wh World Wide Web A Systematic Review. *JAMA*, 2002, vol.287, p.2691-2700.
61. HONGWEI, Z., YINGHUA, M., GUIYANG, S. Collaboratively Assessing Information Quality on the Web, AMCIS 2012, <http://aisel.aisnet.org/amcis2012/proceedings/DataInfoQuality/1>.

*Prezentat la 17.01.2015*

## INSTRUMENTE PENTRU DEZVOLTAREA RESURSELOR EDUCAȚIONALE MULTIMEDIA

*Tudor BRAGARU, Ilie CÎRCIUMARU, Timofei COLIN*

*Universitatea de Stat din Moldova*

Progresul tehnico-științific și erodarea rapidă a cunoștințelor în societatea informațională globală bazată pe cunoaștere impune noi metode de generare și transmitere a cunoștințelor pe măsură. e-Learning și blended learning bazate pe Resurse Educaționale Multimedia (REM) de autor par a fi în stare să rezolve această problemă.

Scopul lucrării constă în studiul, experimentarea, analiza comparativă și selectarea unui set de instrumente și tehnologii simple, potrivite pentru dezvoltarea REM de către majoritatea profesorilor.

**Cuvinte-cheie:** *lecții audio, lecții video, prezentări, resurse educaționale multimedia, instrumente de dezvoltare.*

### TOOLS FOR DEVELOPMENT OF MULTIMEDIA EDUCATIONAL RESOURCES

Scientific and technical progress and rapid erosion of knowledge in the Global Information Society based on Knowledge, requires adequate methods of generation and transmission of knowledge. e-Learning and blended learning based on Multimedia Educational Resources (REM) seem to be able to solve this problem.

The purpose of this paper is analysis, experimentation, benchmarking and selecting of a set of tools and simple technologies suitable for development REM by most of teachers.

**Keywords:** *audio lessons, video lessons, presentations, multimedia educational resources, development tools.*

### Introducere

Secolul XXI este cel al tehnologiilor informaționale și comunicaționale (TIC). Acestea au pătruns în viața noastră atât de mult, încât este greu de imaginat cum am trăit până acum fără ele. *Calculator personal, telefon mobil (smartphone, IP-phone, phablet...), notebook/netbook, tabletă, carte electronică* – fiecare dintre noi dispune de cel puțin unul-două asemenea dispozitive. Dacă 50-70 de ani în urmă computerele se foloseau doar în armată și în laboratoarele științifice, astăzi o mulțime de dispozitive electronice se folosesc în cele mai diverse domenii: medicină și contabilitate, distracție și producere, calcule științifice, autopilotarea automobilului etc. În loc de ghiozdane cu cărți, mulți copii, studenți, cursanți poartă tablete și calculatoare personale (PC), având stocate pe ele *resurse educaționale multimedia în format digital, interactive, mult mai atrăgătoare decât cărțile tipărite.*

Cărțile obișnuite, care au stat la baza predării mai mult de 2000 de ani, în care se păstrau toate cunoștințele lumii, astăzi sunt înlocuite de *lecții video, audio, prezentări, тренажоре* etc., toate bazate pe calculatoare și accesate prin intermediul Internetului și Web-ului. Datorită Internetului, oricine are posibilitatea de a obține orice cunoștințe din diferite domenii, oriunde s-ar afla și oricând îi este comod. Concluzia de bază desprinsă este: *dacă înaintea nu se putea face școală fără carte, astăzi nu se mai poate face școală fără TIC.*

Această concluzie firească este condiționată de mai multe avantaje oferite:

1. e-Learning prin cele patru mari deschideri (de acces, curriculum și program, organizarea și managementul cursantului, durata și orarul flexibil) permite globalizarea educației; de fapt, este cel mai accesibil tip de instruire în condiții de 40 – *Orice cunoștință poate fi învățată de Oricine, Oricând și de Oriunde* îi este comod, adesea gratuit, fără bariere de spațiu, timp, religie etc.
2. Un PC, o tabletă sau un telefon mobil sunt mult mai ușoare decât manualele, au o capacitate de stocare mult mai mare și sunt mult mai potrivite pentru localizarea informațiilor necesare, inclusiv din mers, în transport.
3. Profitând de motoare moderne de căutare este mai rapid să găsești, localizezi informația necesară pe Internet sau Web, decât într-o bibliotecă tradițională și altele.

**e-Learning/instruire electronică**, ca abreviere de la *Electronic Education/Learning*, reprezintă un *mod eficient de învățare mediată de calculator și TIC*. Experții UNESCO definesc e-Learning ca „*învățare cu ajutorul Internet și multimedia*”. În condițiile edificării societății bazate pe cunoaștere e-Learning este deosebit de util pentru instruirea adulților de-a lungul vieții, promovat de Uniunea Europeană (UE) și UNESCO într-un șir de politici, ca: *e-Europe-2002, e-Europe-2005, Lifelong Learning Programme 2007-13, Information*



*Society and the media working towards growth and jobs, Education and Training 2020, Moldova Digitală 2020 și multe altele.*

Toate acestea prevăd reformarea educației și dezvoltarea metodelor novatoare de învățare, inclusiv deschisă la distanță, continuă, de-a lungul vieții și în condiții de 40. Însă, trecerea de la metodele tradiționale ale educației la cele novatoare nu poate fi realizată fără de aplicații speciale de dezvoltare și administrare eficientă a REM, care constituie obiectul și subiectul prezentei lucrări.

### **De ce e-Learning și dezvoltarea REM sunt atât de importante pentru educație?**

În primul rând, acestea răspund enormelor nevoi de formare de toate nivelurile, aducând calitate, flexibilitate și eficacitate net superioare tehnicilor tradiționale, reducând în același timp costurile sumare.

În al doilea rând, aplicarea tehnologiilor multimedia în procesul de predare-învățare implică o mai bună memorare sau o creștere a volumului de informații conștientizate și reducerea timpului necesar pentru instruire. Potrivit afirmației recunoscutului expert în psihologia educațională William Glasser [1], „omul, de regulă, învață 10% din ceea ce citește; 20% din ceea ce aude; 30% din ceea ce vede; 50% din ceea ce aude și vede; 70% din ceea ce discută cu alții; 80% din propria experiență (ceea ce face singur); 95% din ceea ce învață pe alții”. La concluzii similare au ajuns și alți cercetători în domeniul psihologiei învățământului, cum ar fi Verba și Winnzka, R.Karnikau și F.McElroy [2], chiar dacă procentajul diferă. Oricum, conform experților, eficiența lecțiilor audio/video este, în medie, de 5 ori mai mare decât simpla lectură a cărții, ceea ce impune dezvoltarea în masă a REM.

În al treilea rând, în societatea informațională bazată pe cunoaștere procesul educațional se reorientează de la capacitatea de memorare spre capacitatea de a gândi și acționa. Astfel, experții prezic că în următorii 30-40 de ani educația va fi cea mai actuală, inovativă și costisitoare activitate, inovațiile principale fiind legate de integrarea TIC în educație, formarea continuă de-a lungul vieții, inclusiv formală, nonformală/informală, corporativă. Iar societatea ar trebui să fie pregătită din timp pentru aceste inovări.

În prezenta lucrare au fost cercetate, analizate și explorate diverse instrumente de dezvoltare a conținutului educațional multimedia (lecții audio/video, prezentări, itemi de autoevaluare și control) nemijlocit de către titularii de curs pentru un start mai ușor.

### **1. Instrumente de creare/redactare a resurselor multimedia**

Resursele educaționale multimedia sunt disponibile într-o mare varietate, de la simplu text și imagini la prezentări și resurse multimedia complexe. Fiecare dintre acestea necesită o abordare aparte în procesele de creare și dezvoltare/actualizare continuă.

**Resursele educaționale textuale sunt cele mai frecvente.** Cele mai răspândite tipuri de fișiere textuale în format digital sunt de tip \*.txt, \*.doc, \*.docx, \*.rtf. Există o mare diversitate de instrumente de creare și redactare a acestor tipuri de fișiere. Astfel, orice sistem de operare ne pune la dispoziție editoare de text încorporate foarte simple. De exemplu, Notepad de la Windows, Gedit de la Ubuntu. Alte instrumente cu aceeași destinație folosite pe larg sunt *procesoarele de texte Microsoft Word, LibreOffice Writer, Open Office* – programe cu o vastă gamă de posibilități ce permit redactarea și machetarea eficientă a textelor, oferă facilități de manipulare cu bucăți de text, combină caracteristicile procesării și publicării documentelor. Merită a fi menționat și *Google Docs*, aplicație online de la compania Google, care oferă oportunități deosebite pentru redactarea fișierelor text și care nu depinde de sistemul de operare utilizat. Probabil, orice utilizator de calculator posedă unul sau câteva dintre aceste instrumente, așa că ele nu constituie subiectul prezentei lucrări. Mai multe detalii privind editoarele de text se pot găsi la adresa <http://www.investintech.com/articles/tenwordalternatives> sau <http://www.digitaltrends.com/computing/best-microsoft-office-alternatives/>.

**Grafica ocupă un loc deosebit în șirul resurselor educaționale,** deoarece o simplă schemă, o diagramă pot vorbi mai mult decât mii de cuvinte. Cele mai frecvente tipuri de fișiere grafice sunt \*.png, \*.jpg, \*.jpeg, \*.bmp, \*.psd. Pentru crearea și redactarea imaginilor grafice și/sau a diagramelor există un șir de aplicații simple, așa ca *MS Paint, MS Excel, MS Power Point* de la Windows și *GIMP Image editor* sau *Open Office* de la Ubuntu. O mare parte din necesități pot fi acoperite de aceste instrumente.

Pentru lucrări grafice profesionale compania Adobe ne pune la dispoziție produsul *Adobe Photoshop*, aplicație destul de sofisticată dar și foarte răspândită. Mai multe detalii despre *Adobe Photoshop* a se vedea <http://www.adobe.com/products/photoshop/features.html>.

**Pentru studiul universitar animațiile sunt mai rar întâlnite.** Oricum, așa resurse pot fi create ca resurse video cu extensia \*.gif. În acest scop se poate utiliza *MS Paint* și/sau *Adobe Photoshop* sau instrumente mai

complexe, inclusiv aplicații online oferite de *makeagif.com*, *imgflip.com*, *imgur.com* etc., care permit crearea fișierelor de tip animație din fișiere de tip video. Mai multe detalii privind metodele de creare a fișierelor de tip animație a se vedea: <http://www.techsng.com/2014/11/makeagif-com-create-animated-gif-images-online-free.html>.

**Resursele educaționale audio** au o largă arie de utilizare (de exemplu, de către slabvăzători, în studierea limbilor „din mers” etc.). Fișierele audio pot avea extensia \*.mp3, \*.wav, \*.ogg, \*.m4a și altele. Pentru fișierele audio specialiștii recomandă *Adobe Audition* și *Audacity*. Ambele aplicații oferă o mulțime de posibilități de înregistrare și redactare a fișierelor audio. Sunt de menționat și aplicațiile preinstalate în sistemele de operare ale calculatoarelor, telefoanelor mobile și altor *gadgeturi* (obiecte tehnologice mici, de obicei îndeplinesc funcții noi), care permit utilizatorilor să asimileze informații din orice domeniu.

Mai multe detalii privind crearea fișierelor audio cu ajutorul aplicației *Sound Recorder* preinstalate în SO Windows a se vedea: <http://windows.microsoft.com/en-us/windows7/record-audio-with-sound-recorder>.

**Resursele educaționale video sunt foarte importante pentru educație.** Un gigant din lumea IT, subdiviziunea Youtube a companiei Google, conține peste 400 milioane de fișiere video (Statistica youtube: <https://www.youtube.com/yt/press/statistics.html>). Pentru crearea și redactarea resurselor video se pot utiliza fie camere de luat vederi, fie aplicații specializate de genul *Cam Studio*, *Yam Cam*, *Ice cream Screen Recorder*, *Sony Vegas Pro*, *Windows Live Movie Maker* etc. Există o gamă largă de formate video: \*.mp4, \*.avi, \*.wmv, \*.flv etc.

**Resursele educaționale de tip prezentare** au devenit în ultimul timp foarte răspândite. Citind cărți, întotdeauna încercăm să evidențiem cele mai importante, relevante idei și informații. Pentru realizarea acestei necesități a fost creată o tehnologie software specială, care permite prezentarea informațiilor importante sub formă de *teze grupate în diapozitive*. Există un șir de aplicații pentru a crea prezentări: *Microsoft Power Point* [3], *PowToon* [4], *Prezi* [5], *KeyNote* [6], *Prezentit* [7], *SlideRocket* [8], *Adobe Reader* (<https://forums.adobe.com/docs/DOC-1821>) și altele.

În continuare sunt examinate succint două dintre aceste aplicații: *MSPP – cel mai răspândit instrument de creare a prezentărilor* și *Prezi – cel mai perspectiv, ca fiind independent de sistemul de operare, cu o transportabilitate totală a prezentărilor*. Mai multe detalii se pot găsi pe paginile-suport ale acestor aplicații: <https://prezi.com/support/>, <https://support.office.com/en-us/article/PowerPoint-2013-videos-and-tutorials-bd93efc0-3582-49d1-b952-3871cde07d8a>.

## 2. Power Point și Prezi – cele mai utilizate aplicații de elaborare a prezentărilor

Aplicația *MSPP*, lansată în 1990, la ziua de azi a ajuns la versiunea 16 și este cea mai populară aplicație pentru crearea prezentărilor. Toate aplicațiile menționate, în afară de *Prezi*, operează cu unități logice numite *diapozitive (slides)* – un aranjament constituit din *texte scurte – teze, imagini grafice și alte obiecte*, prezentarea constând din mai multe asemenea diapozitive. Prezentările pot fi imprimare pe *folii de proiector* sau demonstrate pe *dispozitive electronice*. *Power Point* dispune de multiple funcții puternice utile în dezvoltarea prezentărilor. Interfața *Power Point* este intuitiv clară, similară cu aplicația *MS Word*, ceea ce face operarea destul de ușoară. *MSPP* are încorporat un set de șabloane prestabilite cu design și culori bine potrivite, care scutește utilizatorul de această muncă specifică designerilor. Totodată, *MSPP* oferă și posibilitatea creării propriilor șabloane, dacă utilizatorul dorește.

Pentru o mai bună captare a atenției auditoriului, în prezentările electronice asupra textului și altor elemente pot fi aplicate efecte speciale și/sau animație (similar filmelor). Se poate anima apariția paginii, de exemplu ea se poate roti sau poate să „cadă” pe ecran. Animația poate fi aplicată și la apariția succesivă a elementelor pe un diapozitiv fie la comanda utilizatorului, fie la un interval prestabilit. *MSPP* oferă posibilitatea de a insera pe diapozitive imagini și/sau muzică și/sau video. Dimensiunile imaginii pot fi redactate direct pe diapozitiv.

*Prezentările MSPP pot fi salvate în multiple formate*. Cele mai utilizate sunt formatele: \*.ppt, \*.pptx, \*.pps, \*.jpeg, \*.png, \*.pdf, \*.html, \*.xml, \*.pot.

**Formatul \*.ppt** (pentru versiunea 97-2003) sau **\*.pptx** (pentru versiunile mai recente) constituie un format nativ în care se salvează prezentarea *MSPP* cu toate efectele încorporate, care pot fi salvate și ulterior redeschise-afișate și/sau redactate.

**Formatul \*.pps** este un fel de „*slideshow*” – *afișarea consecutivă a unei înlănțuiri de diapozitive* cu o pauză prestabilă de timp între cadrele vecine și/sau la apăsarea pe șoricel/consola de comandă.

În formatele *\*.jpeg*, *\*.jpg* și *\*.png* prezentarea este divizată într-un set de imagini (fișiere separate). Diferența principală între formatele *\*.jpeg* și *\*.png* constă în faptul că *\*.png* poate să conțină straturi transparente, care în *\*.jpeg/jpg* se colorează în alb.

**Formatul *\*.pdf*** (abreviere de la *Portable Document Format*) este foarte popular pentru documente. În *\*.pdf* prezentarea se transformă într-un fel de carte, unde diapozitivele sunt *foi imprimate*, evident fără efectele speciale și de animație.

**Formatul *\*.html*** este afișabil în navigatoare Internet (engl. *browsers*).

**Formatul *\*.xml*** se folosește, de obicei, pentru păstrarea datelor. De exemplu, dacă vrem să deschidem prezentarea în alte programe sau din careva motive vrem să prelucrăm datele de sine stătător. Deoarece *\*.xml* este un format textual, poate fi deschis în orice editor de texte.

**Formatul *\*.pot*** se folosește ca **prezentare-șablon MSPP**, care conține doar carcasa standard a prezentării (*logo, titluri, fonturi etc.*). Elaborarea unei prezentări bazate pe șablon rezidă în selectarea acestuia și adăugarea propriilor conținuturi.

Ca și alte programe *MS Office*, *MSPP* este un produs software *closed source* și are un cost. Prețul variază de la șapte dolari pe lună – abonament pentru întreg pachetul *MS Office*, până la 100 dolari numai pentru *MSPP*. Pentru detalii a se vedea <https://products.office.com/en-us/buy/office>.

Cu multiplele sale avantaje *MSPP*, acesta are și un mare dezavantaj: prezentările sunt portabile doar în format *\*.pdf* sau *\*.html*, ceea ce înseamnă pierderea unei părți a funcționalității. Deschiderea prezentării pe un alt calculator în orice alt format diferit de *\*.pdf* sau *\*.html* impune instalarea *MSPP* cu o versiune nu mai mică decât cea în care a fost creată prezentarea. Problema portabilității limitate a prezentărilor *MSPP* a fost rezolvată de *Prezi*.

**Prezi** (<https://prezi.com>), lansat în 2009, este o aplicație online pentru crearea prezentărilor pe „*cloud*” [9], a căror caracteristică principală este **portabilitatea totală**. În loc de diapozitive tradiționale este utilizată *tehnologia scalării (apropierea și îndepărtarea obiectelor)*. Un exemplu ilustrativ a se vedea la adresa <https://prezi.com/x-fbqvi1ldkr/aaron-dignan-the-responsive-organization/>

Înainte de a utiliza *Prezi*, utilizatorul trebuie să se înregistreze pe site-ul web oficial al companiei – [www.prezi.com](http://www.prezi.com). Adică, doar utilizatorii autorizați pot crea prezentări *Prezi*. Înregistrarea este posibilă și prin rețele sociale. Conform statisticilor din 2013 [10], *Prezi* avea peste 36 milioane de utilizatori. Interfața *Prezi* (denumirea instrumentelor, meniurilor, comenzilor etc.) este accesibilă în limba *engleză* sau în *germană, franceză, italiană, spaniolă, chineză, coreeană*. Evident, prezentările pot fi create în orice limbă dorită.

*Prezi* oferă mai multe șabloane, grupate pe categorii, în baza cărora pot fi ușor construite prezentări vizuale. Evident, aplicația are și posibilitatea prezentărilor de la „o foaie albă” pentru a implementa doar idei proprii. Serviciul suport *Prezi* (<https://prezi.com/support/>) oferă lecții gratuite de folosire a sistemului (*secțiunea Learn&Support*). Deși se pot folosi șabloane, sistemul de scalare inițial este mai puțin clar și intuitiv decât diapozitivele, dar după câteva ore de studiu a lecțiilor video totul devine destul de simplu și chiar frumos.

**Aplicația *Prezi* conține resurse gratuite și cu plată.** Cele cu plată furnizează mai multe posibilități. Este de menționat că în *versiunea gratuită prezentările vor fi absolut deschise*. Doar versiunea cu plată oferă posibilitatea dreptului de autor. Prețurile variază de la 4.92 la 13.25 dolari pe lună. De asemenea, există o licență specială pentru oamenii de știință și elevi/studenti, care poate fi obținută prin confirmarea statutului de Student/Teacher (funcția *Verification*). Detalii pe <https://prezi.com/pricing>.

Deoarece *Prezi* este o aplicație online, acesta poate fi folosită independent de sistemul de operare al utilizatorului. Totul ce este necesar pentru a crea obiecte *Prezi* – o conexiune și un navigator Internet. Există o versiune a aplicației *Prezi* pentru telefoane mobile sub sistemele de operare *iOS* și *Android* (<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.prezi.android>). Prezentarea creată cu *Prezi* poate fi salvată și prezentată offline sau stocată pe *orice dispozitiv extern de memorare*. Comparativ cu *MSPP*, fișierele *Prezi* sunt mai voluminoase, de ordinul sutelor de mega octeți.

**În concluzie**, aplicațiile *MSPP* și *Prezi* au posibilități similare, dar fiecare are avantajele și dezavantajele sale. În *Prezi* se poate lucra gratuit, prezentările sunt portabile, dar acestea sunt total deschise. Pentru a asigura dreptul de autor trebuie să cumperi abonament *Prezi*. Cu toate că aplicația *MSPP* totdeauna are un cost și prezentările sunt mai puțin portabile, acesta este mai utilizat, deoarece are interfața mai simplă și familiară majorității utilizatorilor. Ca urmare, decizia de alegere a unei aplicații în defavoarea alteia se ia în funcție de scopul urmărit, intensitatea utilizării, timpul necesar pentru formarea deprinderilor de operare, infrastructura



disponibilă etc. În general, *mai potrivit este acel instrument software, pe care îl cunoaștem mai bine/avem o mai bună experiență de operare.*

Pentru studenții și profesorii USM ambele instrumente software sunt gratuite, pentru ambele sunt accesibile numeroase tutoriale deschise, gratuite (*a se vedea compartimentul 5*) așa că alegerea este la discreția fiecărui utilizator. Evident, pot fi utilizate și oricare alte instrumente software, chiar dacă acestea două sunt dintre cele mai recomandate.

### 3. Aplicații pentru crearea și prelucrarea videoresurselor

După cum s-a menționat anterior, capacitatea de memorare a materialului video educațional este comparativ mai bună decât prin aplicarea metodelor tradiționale. Însă, dezvoltarea de către profesori-autori ai videoresurselor educaționale multimedia necesită instrumente simple și eficiente de creare/redactare, inclusiv înregistrarea video direct de pe ecranul calculatorului.

În lumea mare a cinematografului există diverse instrumente speciale pentru montarea și prelucrarea video și adăugarea efectelor speciale. Însă, la nivelul resurselor educaționale de autor ne interesează doar un set relativ restrâns de funcții:

1. Înregistrarea video direct de pe monitorul calculatorului
2. Modificarea videoresurselor (lipirea și/sau ștergerea unor părți)
3. Adăugarea sunetului pe un material video prealabil filmat
4. Adăugarea sunetului în prezentări, de regulă *Power Point*.

Această listă acoperă majoritatea necesităților prelucrării lecțiilor video digitale, care pot fi înregistrate direct în timpul lecției cu o cameră de luat vederi, adesea montată direct pe calculator (cameră web), aparate de fotografiat, telefoane mobile, tabla interactivă sau pot fi copiate din video-biblioteci.

#### 3.1. Captarea video de pe monitorul calculatorului

Există multiple programe de captare video de pe monitorul calculatorului: *Icecream Screen Recorder*, *CamStudio*, *Movavi Screen Capture Recorder* [11], *Wink* [12], *Screen-O-Matic* [13], *Jing* [14], *Copernicus (Mac OS)* [15], *Camtasia* [16], *Open Broadcaster Software (Mac OS, Windows, Linux)* [17] – toate cu funcții similare. Pentru cercetare/explorare au fost selectate două dintre acestea: **CamStudio** și **Icecream Screen Recorder**, programe cu posibilități aproximativ egale.

- *Icecream Screen Recorder* [18], deoarece este un instrument modern, are o variantă gratuită, cu funcții restrânse, și alta cu funcții complete – cu plată, are suport permanent și poate fi instalat pe sisteme operaționale larg răspândite (de exemplu, *Windows 8*, *Windows 10*).
- *CamStudio* [19] este *free open source*, se furnizează gratuit, sub licența GPL (*General Public License* (în traducere „Licența Publică Generală”) este cea mai răspândită licență de software liber) este simplu în utilizare, poate fi instalat pe sisteme operaționale larg răspândite (de exemplu, *Windows 8*, *Windows 10* în regimul de compatibilitate).

Dacă trebuie doar de înregistrat un video cu comentarii, aplicația *CamStudio* se potrivește foarte bine. Însă, dacă trebuie de comentat ceva în scris pe ecran și de păstrat diferite imagini din lecție, mai bine se potrivește versiunea *PRO Icecream Recorder* (cea gratuită nu suportă aceste funcții).

**CamStudio** este un program de captare a imaginii video de pe ecranul calculatorului (*engl.: screencasts*) cu salvarea în videoformatul popular *\*.avi* și cu posibilitatea de a-l converti/transforma în format *\*.flash*. Interfața programului este simplă, afișată în mod standard pentru aplicații *Windows*: un set de meniuri derulante și butoane (start, pauză, stop). Printre funcțiile principale ale programului pot fi menționate:

- Înregistrare simultană video și sunet
- Marcarea zonelor ecranului care vor fi înregistrate (în întregime, o arie dreptunghiulară atașată de colțul stânga-sus, orice arie/parte dreptunghiulară a ecranului sau fereastra aplicației selectate)
- Posibilitatea de a evidenția calea cursorului.

**Meniul de efecte** permite adnotarea și atașarea comentariilor, fixarea timpului și semnelor speciale de securitate („*watermark*”). Unica incomoditate a programului este posibilitatea înregistrării doar în format *\*.avi* sau *\*.flash*. Însă, în Internet există diverse servicii de convertire a formatelor *\*.avi* în alte formate, de exemplu: *Online-convert.com* [20] transformă fișierele de tip *\*.avi* în format *\*.mp4*.

Facilitățile informaționale ale aplicației **Icecream Screen Recorder** sunt mai numeroase, acoperind practic toate necesitățile dezvoltatorului. Sunt disponibile două versiuni ale programului: gratuită și cu taxă, versiunea *PRO* costă 29.95 dolari. Detalii pe <http://icecreamapps.com/ru/Screen-Recorder/upgrade.html>.

În versiunea gratuită pot fi înregistrate secvențe video doar cu durată maximală de 10 minute; pot fi captate imagini de pe ecran, stabilite diferite arii de înscriere video, se poate „picta” cu șoricelul. Formatul de ieșire este \*.webm. Evident, în versiunea PRO nu există limită de timp, pot fi adăugate semne „watermark”, înscrise video simultan cu audio, inclusiv de pe camere web. La necesitate, poate fi pornit ceasul (timer). Fișierul de ieșire poate fi salvat în diverse formate. În calitate de bonus cumpărătorul obține și programul *IceCream PDF Converter PRO*. Interfața *Icecream* este simplă, în tradițiile *Windows 8*. Sunt disponibile butoane fierbinți pentru a opri/porni înscrierea video. Pe <http://icecreamapps.com/> în secția *Manuals* se regăsesc instrucții detaliate (în engleză) privind modul de folosire a aplicației.

### 3.2. Modificarea videoresurselor

După ce lecția video este înregistrată, adesea este nevoie de a o actualiza/modifica prin ștergerea unor cadre și/sau adăugarea altora. Pentru așa gen de modificare video sunt necesare programe mai sofisticate, două dintre care sunt examinate în continuare:

- *Sony Vegas Pro* – program profesional
- *Windows Live Movie Maker* – semiprofesional.

Programul *Windows Live Movie Maker (WLMM)* a fost elaborat de Compania Microsoft, este distribuit sub licența *Freeware* (codul sursă este închis, dar aplicația este gratuită). Programul WLMM este succesorul lui *Windows Movie Maker*, este compatibil cu *Windows 7, 8, 10*, dar nu se instalează implicit pe acestea. WLMM este încorporat în pachetul *Microsoft Essentials* și poate fi descărcat la adresa oficială <http://windows.microsoft.com/en-us/windows/movie-maker>.

Interfața WLMM este similară aplicațiilor *MS Office*; de exemplu, unele funcționalități sunt similare cu *MSPP*. Funcțiile WLMM pot fi clasificate în patru secții:

- Importarea de fotografii și video
- Editarea video și alegerea temei
- Adăugarea și editarea audio
- Difuzarea video online.

Cu VLMM pot fi importate pe calculator video și fotografii de pe diverse dispozitive conectate la calculator prin USB: cameră, telefon, *flash drive*, CD, DVD. După importare, fișierele salvate pe calculator pot fi și prelucrate cu WLMM. Importarea video și a fotografiilor pe calculator se face foarte ușor. După ce dispozitivul cu sursa este conectat, tastăm butonul *Movie Maker* (colțul stânga sus) și alegem opțiunea *Importarea* de pe dispozitiv, apoi alegem dispozitivul și fișierele pe care dorim să le importăm. Dacă este nevoie de adăugat video, fotografii și audio sau de folosit camera web – alegem opțiunea *Main* în meniul principal, apoi selectăm acțiunile necesare. Dacă s-a lucrat anterior cu alte aplicații de la *MS Office* – totul este intuitiv clar.

În procesul de editare a unei unități video aceasta poate fi divizată în mai multe bucăți, poate fi schimbată ordinea lor sau înlăturate anumite bucăți, pot fi inserate alte bucăți video și/sau fotografii. De asemenea, există posibilitatea de a accelera sau încetini viteza de reproducere video și/sau de a specifica cât timp va dura afișarea unor imagini etc.

O altă posibilitate puternică WLMM sunt *temele* – un set de efecte prestabilite. Temele pot fi aplicate pe întreaga unitate video sau doar pe un cadru. Împreună cu temele pot fi aplicate *filtre* (de exemplu, *întunecare*, *clipire* etc.) sau *efecte vizuale*, adăugate *titluri* și/sau *imagini de salut* etc. Ca și în *MSPP*, în opțiunea *animație* pot fi indicate diferite moduri de afișare a cadrului.

Adăugarea pistei sonore pe o bucată video se realizează cu opțiunea *adăugare audio*. Se poate specifica în ce mod și în ce moment va începe/se va termina (*fade in*, *fade out*) suportul audio, inclusiv înregistrarea de la microfon.

Videosursa salvată poate fi publicată din interiorul programului direct pe una din multiplele platforme web: *YouTube*, *Facebook*, *OneDrive*, *Vimeo*, *Flickr*.

*Sony Vegas Pro* (web site oficial <http://www.sonycreativesoftware.com/vegaspro>) este o aplicație pentru crearea și prelucrarea profesională a videoresurselor, creată de compania Sony. Programul reprezintă un instrument foarte puternic, care include toate funcțiile programelor anterior examinate. Evident, ar putea ușor să le înlocuiască, dar, totuși, pentru crearea/redactarea unor resurse mici nu este rațională, deoarece cerințele de calificare sunt destul de ridicate. Pe de altă parte, pe Internet există foarte multe tutoriale și manuale video de utilizare (<http://www.sonycreative software.com/download/ manuals/vegaspro>).

La salvarea resursei multimedia se pot alege diverși parametri audio și video, de genul: *rezoluție, numărul de cadre per secundă, calitatea video, formatul audio (\*.mp3, \*.mpa etc.), frecvența (Hz)* etc. Printre funcțiile de bază ale aplicației *Sony Vegas Pro* sunt de menționat: *capturarea video* (de pe camera web sau alte dispozitive), *înregistrarea sunetului și prelucrarea sunetului (frânarea/accelerarea, creșterea și reducerea tonului, separarea pe fragmente), montarea audio-video (manipularea simultană a pistelor audio și video pe panelul de redactare), adăugarea efectelor, tranzițiilor, titlurilor* etc. Prețul aplicației *Sony Vegas Pro* este de la 50 la 600 dolari (<http://www.sonycreativesoftware.com/vegassoftware>).

În concluzie, pentru editarea video- și audioresurselor educaționale de autor cea mai potrivită ar fi aplicația *WLMM*, deoarece este simplă, gratuită și are funcționale necesare. Pentru a captura ecranul și a crea un fișier *\*.gif* animat (engl.: *screencasts*) mai potrivit ar fi *Icecream Recorder* (versiunea PRO). Și cu *Screen Recorder* se poate face așa ceva, doar că acesta nu este la fel de comod ca *Icecream Recorder*. Selecția celui mai bun instrument software rămâne la discreția utilizatorului. Evident, un rol hotărâtor în decizia de alegere îl are experiența proprie a autorului, dar și prezența instrumentelor în organizație.

#### 4. Aplicații pentru crearea și prelucrarea audioresurselor educaționale

După cum a fost menționat, videoresursele educaționale sunt dintre cele mai eficiente și preferate pentru autoinstruirea la distanță. Însă, vizionarea resurselor educaționale necesită spații și condiții specifice – camere special iluminate, liniște relativă etc. Totodată, din cauza ritmului prea rapid al vieții și a modului de viață al majorității tinerilor de azi, din lipsa de timp, mulți elevi, studenți nu ajung să vizioneze toate videoresursele educaționale propuse, astfel scăpând unele momente importante de studiu.

Conform unui studiu realizat de Colegiul de Informatică din Georgia, SUA ([http://www.cc.gatech.edu/fce/ahri/publications/mclaug\\_rog\\_fisk\\_02.pdf](http://www.cc.gatech.edu/fce/ahri/publications/mclaug_rog_fisk_02.pdf)), un important segment al resurselor educaționale pentru autoinstruirea de oriunde și oricând, comodă pentru majoritatea cursanților, îl constituie audioresursele educaționale. Într-adevăr, prin maniera lor de a reda informația practic în orice condiții, lecțiile audio pot fi „*ascultate-învățate*” din mers, în transport, în cozi de așteptare, în pat înainte de somn, la odihnă etc., permițând cursanților să utilizeze mult mai eficient timpul propriu, fără a fi sustrași de la ritmul lor obișnuit de viață. În multe cazuri, audioresursele educaționale nu au o alternativă mai bună: de exemplu, pentru învățarea limbilor, în cazul persoanelor slab văzătoare, pentru mamele cu copii mici și multe altele. În astfel de cazuri, lecțiile audio sunt mult mai preferabile și accesibile practic tuturor celor care dispun de un telefon mobil. Or, numărul total de telefoane mobile referit la numărul populației din Republica Moldova este de peste 100%, iar în lume – de peste 90% (<http://data.worldbank.org/indicator/IT.CEL.SETS.P2/countries/1W-MD?display=graph>).

Audioresursele pot fi create cu ajutorul oricărui dispozitiv electronic dotat cu un microfon: *smartphone, notebook, tableta, computer desktop* etc. Pentru a crea un nou fișier audio este suficient de a porni *sound-recorder*-ul încorporat în sistemul de operare și de a selecta locul unde va fi salvat. Pentru redactarea și/sau crearea fișierelor audio există o gamă largă de instrumente software performante, cum ar fi *Adobe Audition, Audacity, Avid Pro Tools, Reaper, AbletonLive* etc. (<http://lifelifehacker.com/5939740/five-best-audio-editing-applications>). Conform unor cercetări (<http://www.techradar.com/news/software/applications/best-free-audio-editing-software-9-programs-we-recommend-1136943>, <http://beebom.com/2015/08/best-audio-editing-software>) și propriilor experimentări, s-a stabilit că pentru redactarea fișierelor audio cele mai potrivite ar fi două dintre aceste aplicații: **Adobe Audition** și **Audacity**, care satisfac următoarele cerințe:

- permit crearea/redactarea simplă a unor înregistrări audio;
- dispun de instrumente avansate pentru redactarea fișierelor audio, cum ar fi decuparea și alipirea conținutului, divizarea fișierelor audio cu caracter stereo în mai multe coloane sonore cu posibilitatea de a elimina sunetele de fundal, adăugarea de efecte sonore etc.;
- sunt recomandate de numeroși specialiști în domeniu, ocupând primele locuri în majoritatea sondajelor;
- au o interfață simplă, cu funcții complete, structurate în meniuri și taste rapide.
- suportă o gamă largă de formate audio, printre care *\*.mpr, \*.wav, \*.ogg, \*.flac*, ceea ce le face instrumente aproape universale (<http://audacityteam.org/about/features>, <https://helpx.adobe.com/audition/using/supported-file-formats.html>).

Totodată, conform unui sondaj (<http://lifelifehacker.com/5940219/most-popular-audio-editing-tool-audacity>), 56,75% din participanți au declarat că *Audacity* este cel mai bun, fiind urmat de *Adobe Audition* cu 13,96% și de *Avid Pro Tools* cu 10,29% din voturi.

**Adobe Audition** este o aplicație care necesită procurare pentru a putea fi utilizată, însă costul este compensat de o interfață grafică foarte comodă, ușor de învățat și utilizat. Poate fi utilizată în sistemele de operare *Windows* și *MacOS*.

*Adobe Audition* are o serie mai lungă de pași pentru a crea un fișier nou. Inițial se cere crearea unui nou proiect, care ulterior va fi supus modificării. Pentru pornirea/oprirea înregistrării se va activa butonul respectiv. Pentru instrucțiuni complete a se consulta: <https://helpx.adobe.com/audition/using/recording-audio.html>.

**Audacity** este un instrument software gratuit, suportat de sistemele de operare *Linux*, *Windows* și *MacOS*. Aplicația uimește prin posibilitățile sale de redactare, însă din cauza multitudinii de instrumente disponibile, interfața pare a fi complicată.

Meniul și bara adițională de instrumente oferă toate procedurile necesare pentru crearea fișierelor audio: *butoanele de pornire/oprire a înregistrării, de afișare, de pauză*. Mai multe detalii despre crearea și redactarea fișierelor audio cu ajutorul *Audacity* a se vedea: [http://manual.audacityteam.org/o/man/tutorial\\_recording\\_and\\_editing.html](http://manual.audacityteam.org/o/man/tutorial_recording_and_editing.html).

În urma cercetărilor efectuate, putem afirma că atât *Adobe Audition*, cât și *Audacity* satisfac necesităților de creare și redactare a fișierelor audio. Alegerea depinde de tradițiile interne ale organizației, sistemele de operare utilizate și de preferințele/abilitățile utilizatorului final. În cadrul USM în acest context mai potrivită ar fi utilizarea *Audacity* datorită completitudinii sale funcționale, funcționării pe cele mai răspândite sisteme de operare și deoarece este un instrument absolut gratuit.

### 5. Referințe utile pentru familiarizarea cu instrumentele recomandate

În continuare se regăsesc referințe la un set de resurse deschise de utilizare a instrumentelor în diferite limbi de instruire: *EN – în engleză, RO – în română, RU – în rusă*.

#### 5.1. Elaborarea prezentărilor în Microsoft Power Point

##### a. Lecții textuale

- EN - <http://www.electricteacher.com/tutorial3.htm>, <http://www.tutorialspoint.com/listtutorials/ms-powerpoint/1>
- RO - <http://www.cursuri-powerpoint.ro/cursuri-powerpoint-gratuite.php>
- RU - <http://www.microsoftpowerpoint.ru/>

##### b. Lecții în format video

- EN - <https://support.office.com/en-us/article/PowerPoint-2013-videos-and-tutorials-bd93efc0-3582-49d1-b952-3871cde07d8a>
- RO - [http://www.drpowerpoint.ro/video/category/?categories\\_id=21](http://www.drpowerpoint.ro/video/category/?categories_id=21)
- RU - <http://compteacher.ru/microsoft-office/789-uroki-powerpoint-chast-1-video-onlayn.html>, <http://www.intuit.ru/studies/courses/678/534/info>

#### 5.2. Elaborarea prezentărilor în Prezi

##### a. Lecții textuale

- EN - <http://www.twirpx.com/file/897584/>
- RO - <http://koala.cs.pub.ro/dk/wiki/module/03-multimedia/lectia-01>,
- RU - <http://prezi-lazy.ru/>

##### b. Lecții în format video

- EN - <https://www.youtube.com/playlist?list=PL8ciRIuEbGNbe9mor6w2RxyN4GKk7wlvb>
- RU - <http://prezi-narusskom.ru/>, <https://www.youtube.com/watch?v=KZJKzu4ss0Q&index=2&list=PLjTKqHuzKEeiYw9irIVlefMA-qBSa0xi>

#### 5.3. Crearea și prelucrarea videoresurselor cu CamStudio

##### a. Lecții textuale

- EN - <https://jenniferbarnett.wikispaces.com/file/view/camstudio-instructions.pdf>, [http://www.screencast.be/tutorial\\_camstudio.html](http://www.screencast.be/tutorial_camstudio.html)

##### b. Lecții în format video

- EN - <http://camstudio.org/videotutorials.htm>, [https://www.youtube.com/watch?v=WQ5\\_6szOf48](https://www.youtube.com/watch?v=WQ5_6szOf48)
- RU - <https://www.youtube.com/watch?v=caXCoc41tFk>

#### 5.4. Crearea și prelucrarea videoresurselor cu Icecream Screen Recorder

##### a. Lecții textuale

- EN - <http://icecreamapps.com/Manuals/>, <http://icecreamapps.com/Howtos>



- RU - <http://www.evileg.ru/baza-znanij/programmy/zapis-video-s-monitora-obzor-icecream-screen-recorder.html>

**b. Lecții în format video**

- EN - [http://www.dailymotion.com/video/x2emhmg\\_how-to-record-your-desktop-with-icecream-screen-recorder\\_lifestyle](http://www.dailymotion.com/video/x2emhmg_how-to-record-your-desktop-with-icecream-screen-recorder_lifestyle), [https://www.youtube.com/watch?v=wyM\\_RyTxJZI](https://www.youtube.com/watch?v=wyM_RyTxJZI)
- RU - [https://www.youtube.com/watch?v=\\_XBGxy7Ceys](https://www.youtube.com/watch?v=_XBGxy7Ceys)

**5.5. Redactarea videoresurselor cu Windows Movie Maker**

**a. Lecții textuale**

- EN - <http://windows.microsoft.com/en-us/windows/movie-maker>, <http://windows.microsoft.com/en-us/windows-vista/getting-started-with-windows-movie-maker>, [http://www.digitalcitizen.life/site-search?search\\_api\\_views\\_fulltext=windows%20live%20movie%20maker](http://www.digitalcitizen.life/site-search?search_api_views_fulltext=windows%20live%20movie%20maker)
- RO - <http://windows.microsoft.com/ro-ro/windows/movie-maker>, <http://windows.microsoft.com/ro-ro/windows-vista/getting-started-with-windows-movie-maker>
- RU - <http://windows.microsoft.com/ru-ru/windows-vista/getting-started-with-windows-movie-maker>, <http://windows.microsoft.com/ru-ru/windows/movie-maker>

**b. Lecții în format video**

- EN - <http://windows.microsoft.com/en-us/windows/movie-maker>, <https://www.youtube.com/watch?v=JNKRCaiox4E>
- RU - <https://www.youtube.com/watch?v=2L9xbUq13sY>, <https://www.youtube.com/watch?v=9FRo9nJmvH4>

**5.6. Redactarea videoresurselor cu Sony Vegas Pro**

**a. Lecții textuale**

- EN - <http://www.instructables.com/id/How-to-use-Sony-Vegas-Pro/>
- RU - <http://www.twirpx.com/file/853479/>, <http://www.twirpx.com/file/785411/>, <http://mastervideo.org/index.php/-sony-vegas>

**b. Lecții în format video**

- EN - <http://www.sonycreativesoftware.com/training/vegaspro>, [https://library.creativecow.net/devis\\_andrew/Sony-Vegas-Pro\\_1/1](https://library.creativecow.net/devis_andrew/Sony-Vegas-Pro_1/1)
- RO - <http://videotutorial.ro/sony-vegas-pro-11-animatii-cu-ajutorul-keyframe-urilor-tutorial-video/>
- RU - <http://videovegas.ru/>, <https://www.youtube.com/playlist?list=PLVnWwC9HOZ6Q0DNUjnXmAefmQ7iEwbYRC>

**5.7. Crearea și redactarea audioresurselor cu Adobe Audition**

**a. Lecții textuale**

- EN - <https://helpx.adobe.com/support.html#/product/audition>, <https://helpx.adobe.com/audition/tutorials.html>

**b. Lecții în format video**

- EN - <https://helpx.adobe.com/audition/how-to/what-is-audition-cc.html?set=audition--get-started--overview>, <https://helpx.adobe.com/audition/how-to/audition-import-audio-browse-cc.html?set=audition--get-started--essential-beginners>
- RO - <https://www.youtube.com/watch?v=kq69zrMtrkU>
- RU - <https://www.youtube.com/watch?v=8He1mQQOtf8>

**5.8. Crearea și redactarea audioresurselor cu Audacity**

**a. Lecții textuale**

- EN - <http://audacityteam.org/about/features>, <http://manual.audacityteam.org/o/man/tutorials.html>
- RU - <http://audacity.ru/p29aa1.html>

**b. Lecții în format video**

- EN - <http://www.freeaudacitytutorials.com/tutorials-for-audacity-beginner-1-screen-and-basic-setup/>
- RO - [https://www.youtube.com/watch?v=X\\_QF0bd3bRg](https://www.youtube.com/watch?v=X_QF0bd3bRg)
- RU - <https://www.youtube.com/watch?v=szSRAIWdble>

## 6. Concluzii finale

Resursele didactice în format electronic, în virtutea deschiderii lor (*accesibilității de oriunde, de către oricine și oricând*), câștigă tot mai mult teren față de cele tradiționale, fiind mai preferate de către studenți. Acest fapt este binecunoscut și acceptat de toată lumea. Însă, există și anumite probleme în dezvoltarea resurselor educaționale multimedia de către mase largi de autori, cauzate de marea diversitate a instrumentelor specifice potrivite cazului.

Studiul efectuat ghidează autorii începători în identificarea instrumentelor potrivite de creare/redactare a diverselor tipuri de resurse multimedia *pentru a începe rapid*. Evident, nu pot exista rețete universale, deoarece în afară de cerințele și tradițiile organizației, cel mai bun instrument este și în contextul depinderilor, preferințelor, abilităților individuale. Anume din această cauză sunt prezentate și recomandate câte două instrumente specifice pentru *crearea prezentărilor, audio- și videoresurselor*, lăsând utilizatorul final să decidă conform propriilor necesități, preferințe, deprinderi.

Pentru *elaborarea prezentărilor* sunt recomandate *Microsoft Power Point* și *Prezi*, posibilitățile programelor fiind aproximativ egale. Totuși, mai potrivit este MSPP, care este deja instalat pe majoritatea calculatoarelor, este cunoscut și folosit de majoritatea utilizatorilor. Mai nou, universal, progresist, deschis, adesea gratuit, este Prezi, care este mai puțin familiar pentru utilizatori, însă acest neajuns poate fi depășit în cel mai scurt timp.

*MSPP* este o aplicație clasică, care poate fi însușită relativ ușor, mai ales de către utilizatorii care au deja experiența de lucru cu alte produse Microsoft. Însă, prezentările de acest tip *sunt doar parțial portabile* între versiuni, necesitând instalarea MSPP pe *dispozitivul client* înainte ca acestea să poată fi afișate. În acest sens, *Prezi*, fiind total portabil, este cu mult mai preferabil. Deoarece Prezi este online, pentru elaborarea prezentărilor este suficientă doar o conexiune la Internet și un browser. Evident, alegerea între aceste aplicații depinde de utilizator, scop și resursele disponibile. Dacă trebuie de realizat operativ și simplu o prezentare, este recomandat MSPP. Dacă este necesară o prezentare mai stilată și absolut portabilă pe multiple dispozitive de afișare, inclusiv mobile, mai recomandat este Prezi.

*Dezvoltarea videoresurselor educaționale* necesită înscrierea inițială cu dispozitive speciale, așa ca camera de luat vederi, web cameră, telefon mobil dotat cu cameră și/sau captarea video de pe ecranul unui calculator. Tehnic vorbind, înscrierea inițială rezumă în pornirea dispozitivului. Iar pentru captarea video de pe ecranul calculatorului sunt recomandate *Cam Screen Recorder* și *Icecream Screen Recorder*.

*Cam Screen Recorder* este un produs *open source*, are totul pentru a înscrie imaginea de pe ecran împreună cu pista sonoră. Aplicația are interfața relativ transparentă, abilitățile necesare se învață ușor. *Icecream* este mai modern, are o versiune gratuită ce oferă comparativ mai puține posibilități. *Versiunea profesională Icecream* permite mai multe servicii decât *Cam Screen Recorder*, de exemplu: înscrierea comentariilor pe ecran și instalarea diverselor alarme în *regimul live*. Pentru a începe rapid confecționarea unor „*screencasts*”, se poate utiliza *Cam Screen Recorder*.

Adesea videoresursele deja elaborate necesită a fi redactate: unele cadre trebuiesc adăugate, altele șterse și/sau înlocuite, inclusiv pista sonoră. Pentru aceasta sunt recomandate instrumentele software *Windows Movie Maker* și *Sony Vegas*.

*Movie Maker* este simplu în utilizare și învățare, are o gamă destul de largă de posibilități. Redactarea videoresurselor se face relativ simplu. Doar adăugarea titlurilor este puțin mai complicată.

*Sony Vegas* este o aplicație pentru profesioniști. Evident, aceasta permite orice manipulari cu cadrele deja înscrise, doar că necesită ceva mai mult timp de învățare. Pentru început mai recomandată este *Movie Maker*, iar pentru dezvoltarea lecțiilor sofisticate se recomandă *Sony Vegas*. Oricum, cunoștințele obținute în timpul lucrului cu *Movie Maker* sunt utile și la operarea cu *Sony Vegas*.

În anumite condiții, audioresursele educaționale sunt mai eficiente. Evident, doar cele de calitate înaltă, a căror dezvoltare necesită instrumente pe măsură. În urma cercetărilor s-a stabilit că *Adobe Audition* și *Audacity* sunt dintre cele mai potrivite instrumente din această categorie. Ele satisfac toate necesitățile de creare și redactare a fișierelor audio. Selectarea dintre *Adobe Audition* și *Audacity* depinde de tradițiile interne ale organizației, sistemele de operare utilizate și de preferințele/abilitățile utilizatorului final. În cadrul USM mai potrivită ar fi *Audacity* datorită completitudinii sale funcționale, funcționării pe cele mai răspândite sisteme de operare și deoarece este gratuită.

Cu o mare doză de siguranță putem afirma că există și alte aplicații utile pentru dezvoltarea resurselor educaționale multimedia. Principalul este ca cursurile să devină mai interesante, mai atractive și eficiente, ceea ce poate motiva studenții să învețe cu mai multă dorință. Însă, pentru ca resursele educaționale multimedia să fie cu adevărat calitative, în afară de instrumentele potrivite, mai este necesară și abordarea poliprofesională a acestora, de pe *poziții pedagogice, psihologice, design, sistemo-tehnice* etc., care constituie obiectul unor cercetări aparte.

#### Bibliografie \*

1. William Glasser quotes. [http://thinkexist.com/quotes/william\\_glasser/](http://thinkexist.com/quotes/william_glasser/)
2. R.Karnikau, F.McElroy, Communication for the Safety Professional, Chicago 1975
3. Site oficial Microsoft Power Point. <https://products.office.com/ru-ru/powerpoint>
4. Site oficial PowToon. <http://www.powtoon.com/>
5. Site oficial Prezi. <https://prezi.com/>
6. Pagina oficială KeyNote, producător Apple. <http://www.apple.com/mac/keynote/>
7. Site oficial Prezentit. <http://www.prezentit.com/>
8. Site oficial SlideRocket. <http://www.sliderocket.com/>
9. Definiția „cloud”. <http://searchcloudapplications.techtarget.com/definition/cloud-application>
10. Date statistice Prezi. <http://www.businessinsider.com/prezi-reaches-30-million-users-2013-11>
11. Site oficial Movavi Screen Capture Studio. <http://www.movavi.ru/screen-capture/>
12. Site oficial Wink. <http://www.debugmode.com/wink/>
13. Site oficial Screencast-O-Matic. <http://www.screencast-o-matic.com/>
14. Pagina oficială Jing, producător TechSmith. <https://www.techsmith.com/jing.html>
15. Pagina de apreciere și descărcare a aplicației copernicus. <http://copernicus.en.softonic.com/mac>
16. Pagina oficială Camtasia, producător TechSmith. <https://www.techsmith.com/camtasia.html>
17. Site oficial Open Broadcaster Software (OBS). <https://obsproject.com/>
18. Pagina oficială Icecream Screen Recorder, producător Icecream Apps. <http://icecreamapps.com/ru/Screen-Recorder/>
19. Site oficial CamStudio. <http://camstudio.org/>
20. Web serviciu pentru convertirea fișierelor video în format MP4. <http://video.online-convert.com/ru/convert-to-mp4>

**Notă:** *Lucrarea a fost realizată în cadrul Proiectului „Dezvoltarea sistemelor informatice inteligente orientate pe familia de probleme decizionale cu aplicare în educație și cercetare”, cifrul 15.817.02.38A.*

\*Toate sursele Internet citate în text și prezentate în bibliografie au fost accesate în noiembrie 2015.

*Prezentat la 15.12.2015*



## IMPACTUL DATELOR CONTABILE ÎN PRACTICA FISCALĂ

*Maia BAJAN, Alexandrina CIORCHINĂ, Nicoleta TRUDOV**Academia de Studii Economice din Moldova*

Popularitatea dezbaterilor privind relațiile dintre contabilitate și fiscalitate a căpătat noi dimensiuni în contextul globalizării, deschiderii piețelor și necesității de racordare la anumite cadre. Întrucât fiscalitatea și contabilitatea sunt două științe independente una de cealaltă, activitatea economico-financiară a entităților, instituțiilor de stat sau altor regii autonome este într-un final reflectată în documentele contabile și în cele fiscale. În acest context, este necesar ca ele să fie analizate în ansamblu. Totuși, dintotdeauna a existat problema concilierii celor două domenii, geneza acesteia fiind diferențele dintre principiile contabile și cele fiscale privind evaluarea și calculul economic. Acestea din urmă urmăresc stimularea sau inhibarea unor activități; respectiv, este de înțeles că principiile fiscale nu vor prezenta mereu imaginea fidelă a operațiilor ce au loc în cadrul entității.

**Cuvinte-cheie:** contabilitate, fiscalitate, Cod fiscal, Standarde Naționale de Contabilitate, impozit, venituri, cheltuieli, deduceri, ajustări.

**THE IMPACT OF ACCOUNTING INFORMATION ON TAX PURPOSES**

The degree of awareness towards the relationships between accounting and taxation has reached as new level in the context of the actual deep globalization process, the open markets and the need for connection to certain frames. Given that accountancy and taxation are two independent sciences, the economic activity of entities, state institutions or other autonomous administrative bodies is in the end reflected both in accounting and tax documents. Therefore, it is necessary to analyze them as a whole. Nonetheless, there has always existed the issue of conciliating the two domains, because of the differences among accounting and tax principles for evaluation and economic calculation. Tax principles are generally set as to stimulate or inhibit certain activities. It is obvious that they will not always reflect the true and fair view of the operations taking place within the entity.

**Keywords:** accountancy, taxation, Tax Code, National Accounting Standards, tax, earnings, expenditures, deductions, adjustments.

Contabilitatea și fiscalitatea constituie două științe independente una de alta. Or, entitățile și alte instituții de stat prezintă un ansamblu de documente contabile și fiscale care trebuie analizate în ansamblu și nu independent unul de altul. Contabilitatea răspunde în plan informațional și decizional la problematica gestiunii valorilor economice separate patrimonial. Totodată, printre cele mai importante scopuri pe care le realizează contabilitatea este oferirea de informații pentru întocmirea documentelor fiscale; astfel, se subînțelege impactul și necesitatea datelor contabile.

Dintotdeauna, pentru contabilitate a existat problema concilierii sale cu fiscalitatea. Cauza perpetuă a unei asemenea situații a fost generată de faptul că nu în toate cazurile principiile contabile privind evaluarea și calculul economic sunt convergente cu cele fiscale, care nu se subordonează prezentării unei imagini fidele a operațiilor ce au loc la entitate, pe când principiile fiscale urmăresc fie stimularea, sau chiar inhibarea unor activități.

În ultimele decenii, discuțiile privind relațiile dintre contabilitate și fiscalitate au devenit tot mai populare, întrucât există un număr mare de aspecte ce vizează convergențele și divergențele dintre aceste două domenii. Acestea nu au o arie limitată de existență, ci se referă la practicile naționale și internaționale, la mediul micro- și macroeconomic. Dacă ne referim la geneza acestor diferențe, sunt de menționat cele două sisteme contabile: continental-european și anglo-saxon, fiecare având propriile reguli de funcționare, care implicit duc la o mai mare corelare sau la lipsa acesteia între fiscalitate și contabilitate și, respectiv, la diferențe între venitul contabil și cel fiscal.

Analizând nemijlocit legătura contabilitate-fiscalitate prin prisma celor două concepte, este de remarcat că în cazul conceptului european-continental este nevoie de un amplu complex de cunoștințe fiscale, pe când al doilea concept al contabilității nu este dependent de cunoașterea fiscalității.

Entitățile care utilizează sistemul continental își finanțează activitatea în principal pe calea împrumuturilor bancare, iar procesul de normalizare este de origine publică. Sistemul de drept este cel scris, regulile contabile fiind prezentate prin acte normative (legi) detaliate. Fiscalitatea este prezentă în procesul contabil, dată fiind

natura publică a normalizării contabile; respectiv, statul este interesat de informații privind nivelul masei impozabile și al impozitelor, precum și al taxelor aferente. Principalele țări în care funcționează un astfel de sistem de contabilitate sunt: Franța, Germania, Elveția, Belgia, Italia, Portugalia, Grecia, Japonia etc.

Pe de altă parte, entitățile care utilizează sistemul de contabilitate anglo-saxon își realizează finanțarea în principal prin intermediul capitalurilor proprii (piețele financiare de capital), iar cultura contabilă are un caracter individualist. Regulile contabile sunt elaborate de organisme profesionale (particulare), acestea fiind dominate de jurisprudență. Astfel s-a realizat procesul de separare a contabilității de fiscalitate, deoarece principalii beneficiari ai informațiilor financiare sunt investitorii. Deducem că acest model este orientat către interesele acționarilor, fără vreo legătură cu fiscalitatea și reglementate, în general, de contabilitate, aceasta fiind o profesie liberală. Țările ce se conduc de sistemul anglo-saxon sunt mai puțin conservative și se consideră că au un sistem contabil mai bun, care oferă o mai bună protecție investitorilor. Principalele țări care utilizează acest sistem de contabilitate sunt: Regatul Unit al Marii Britanii și Irlandei de Nord, SUA, Australia, Noua Zeelandă, Singapore etc.

În condițiile creșterii vertiginoase a pieței de capital și, implicit, a companiilor transnaționale, a apărut necesitatea tot mai stringentă pentru obținerea informației financiare clare și de calitate. Totuși, în contextul existenței a două sisteme distincte menționate mai sus, există destul de multe diferențe și tocmai de aceea se tinde spre conciliere și găsirea unor metode oportune pentru toate părțile implicate. În acest context, adoptarea Sistemului Internațional de Raportare Financiară (SIRF) a venit ca o soluție din partea Uniunii Europene, având ca bază ideologică gradul sporit de transparență și comparabilitate a situațiilor financiare.

Adoptarea acestor referințe internaționale în contabilitate, numite, de altfel, o reformă a contabilității, este rezultatul unei mișcări strategice, care, deși implică anumite constrângeri temporale și de resurse, contribuie la atingerea convergențelor în raportarea contabilă.

Republica Moldova este unul din statele care au adoptat practica continental-europeană. Potrivit Legii contabilității, nr.113-XVI din 27.04.2007, contabilitatea reprezintă un sistem complex de colectare, identificare, grupare, prelucrare, înregistrare, generalizare a elementelor contabile și de raportare financiară [4, art.3]. Conform Codului fiscal, sistemul fiscal reprezintă totalitatea impozitelor și taxelor, a principiilor, formelor și metodelor de stabilire, modificare și anulare a acestora, prevăzute de acest cod, precum și totalitatea măsurilor ce asigură achitarea lor [2, art.2]. Deosebirile generale dintre cele două sisteme sunt prezentate în Tabelul 1.

Tabelul 1

## Criterii de comparație între contabilitate și fiscalitate

Criterii	Sistemul contabil	Sistemul fiscal
<b>Reglementat de</b>	Ministerul Finanțelor și Guvernul Republicii Moldova	
<b>Sarcinile de bază</b>	Înregistrarea, prelucrarea și păstrarea informației cu privire la patrimoniu; furnizarea informației necesare pentru determinarea patrimoniului, executarea bugetului	Colectarea, reflectarea și prelucrarea informației privind datoriile fiscale ale entităților; prezentarea informației privind soldul creanțelor/datoriilor fiscale ale entităților
<b>Baza normativă</b>	Legea contabilității; Codul fiscal; Instrucțiuni și scrisori elaborate de Ministerul Finanțelor sau IFRS privind aplicarea impozitelor și taxelor	Legea privind bazele sistemului fiscal; Codul fiscal; Legea bugetului
<b>Utilizatorii de informație</b>	Interni: administrația, economiștii, contabilii externi: fondatorii, clienții, furnizorii, băncile, organele fiscale etc.	Organele fiscale, instituțiile financiar-credite, Inspectoratul Fiscal de Stat
<b>Reflectarea oper. econ.</b>	Sistemul de înregistrare dublă în conturile contabile	Ținerea evidenței analitice în registre speciale fără utilizarea dublei înregistrări

Sursa: elaborat de autori

Deoarece aceste sisteme se deosebesc atât de mult, se subînțelege că și rezultatele lor vor fi diferite. În acest context, venitul este definit în SNC „Venituri” drept creșteri ale beneficiilor economice înregistrate în

cursul perioadei de gestiune, sub forma intrărilor de active sau majorării valorii acestora, sau a diminuării datoriilor care au drept rezultat creșteri ale capitalului propriu, cu excepția creșterilor legate de contribuțiile proprietarilor [8, pct.5]. În același timp, venitul impozabil, conform Codului fiscal, este venitul brut, inclusiv facilitățile acordate de patron, obținut de contribuabil din toate sursele într-o anumită perioadă fiscală, cu excepția deducerilor și scutirilor, la care are dreptul contribuabilul conform legislației fiscale [2, art.12]. Cel din urmă se determină aplicând venitul contabil, ajustările veniturilor și ale cheltuielilor; respectiv, neconcordanța dintre venitul impozabil și cel contabil este determinată de diferențele apărute în legătură cu constatarea veniturilor și cheltuielilor în contabilitatea financiară și în scopuri de impozitare, care sunt prezentate în Tabelul 2.

Tabelul 2

### Cauzele divergențelor la constatarea veniturilor și cheltuielilor

Cauzele divergențelor	
La constatarea veniturilor	La constatarea cheltuielilor
Incoincidența perioadei de gestiune în care este constatat	
Deosebirea dintre metodele de calculare și măsurare a veniturilor/cheltuielilor	
Componența și structura veniturilor impozabile și neimpozabile (art.18, 20 din Codul fiscal)	Limitarea sumei cheltuielilor constatate în scopul impozitării (art.31 din Codul fiscal)
Diferite surse de obținere a venitului (art.18, 20 din Codul fiscal)	Componența și structura cheltuielilor nedeductibile fiscale (art.24-30 din Codul fiscal)

Sursa: elaborat de autori

Divergențele dintre regulile de constatare și măsurare a cheltuielilor și veniturilor condiționează apariția unor diferențe dintre sumele veniturilor și cheltuielilor recunoscute de legislația fiscală față de cele constatate în contabilitate.

*Diferențele* apărute reprezintă suma abaterilor dintre mărimea veniturilor/cheltuielilor, reflectate în contabilitatea financiară, și mărimea acelorași venituri/cheltuieli, constatate în scopul impozitării.

Până la 31.12.2014, la nivel național a fost utilizat SNC 12 „Contabilitatea impozitului pe venit”. De la 1 ianuarie 2015, însă, în pachetul de standarde nu există un standard analog. Legea contabilității prevede că în cazul când nu există standard similar, să se facă apel la standardele internaționale. De aceea, la constatarea veniturilor în scopuri fiscale, precum și la determinarea impozitului pe venit, entitățile ar trebui să se conducă și de standardele internaționale.

În practica internațională, conform IAS 12 „Impozitul pe profit”, *diferențele temporare* reprezintă diferențele dintre valoarea contabilă a unui activ sau a unei datorii din bilanț și baza lor de impozitare [6, pct.5]. Aceste diferențe temporare pot fi impozabile, care conduc la creșterea venitului impozabil și, respectiv, deductibile, care conduc la micșorarea venitului impozabil.

În scopul demonstrării impactului pe care îl au divergențele dintre constatarea rezultatului contabil și a celui fiscal, am analizat următoarele cazuri:

- 1) *Rezultatul contabil > Rezultatul fiscal*,
- 2) *Rezultatul contabil < Rezultatul fiscal*.

În situația când rezultatul contabil este mai mare decât cel fiscal, entitatea în aceeași perioadă fiscală poate înregistra profit până la impozitare, demonstrând eficiența activității entității, dar un rezultat fiscal egal cu 0, care se soldează cu obligații fiscale nule ale entității în cauză.

*Exemplu:* în anul 2014 entitatea a obținut venit contabil în mărime de 9000 lei, reflectat în rd. 100 din Situația de profit și pierderi. Ajustări aferente veniturilor în această perioadă nu au fost înregistrate, în timp ce ajustările cheltuielilor sunt de 16500 lei. În urma ajustării venitului contabil entitatea a obținut pierdere fiscală.

Iar în anul 2015 entitatea a obținut un venit contabil în sumă de 27900 lei, ajustări de venituri de 4800 lei și ajustări de cheltuieli în valoare de 9300 lei. Totodată, pierderile fiscale ale ultimilor 3 ani pot fi acoperite de venitul impozabil obținut în 2015. Rezultatele entității sunt analizate în Tabelul 3.

Tabelul 3

## Datele privind situația de profit și pierdere a entității

Nr. crt.	Indicatorii	Anul	
		2014	2015
1	Profitul (pierderea) până la impozitare (rd. 100 din Situația de profit și pierdere; rd. 010 din VEN 12)	9000	27900
2	Ajustări de venituri în scopuri de impozitare (rd. 020 din VEN)	-	4800
3	Ajustări de cheltuieli în scopuri de impozitare (rd. 030 din VEN)	16500	9300
4	Venit impozabil (pierdere fiscală) (rd. 040 din VEN) [1+2-3]	(7500)	23400
5	Suma pierderii fiscale utilizate (rd. 080 din VEN)	-	2500
6	Venit impozabil după utilizarea pierderii fiscale (rd. 0901 din VEN) [4-5]		20900
7	Cheltuieli (economii) privind impozitul pe venit (rd. 110 din Situația de profit și pierderi) (rd. 120 din VEN) [6·12%]	-	2508

Sursa: elaborat de autori

Conform art.32 din Codul fiscal, dacă entitățile înregistrează pierderi fiscale, atunci suma pierderilor rezultate va fi reportată eșalonat, în părți egale, pe durata următorilor trei ani. Pierderea fiscală înregistrată în anul 2014, în mărime de 7500 lei, se ia la evidență în Debitul contului 924 „Pierderi fiscale”. În anul 2015, venitul impozabil înregistrat ne permite acoperirea a 1/3 din pierderea fiscală din anul 2014. Respectiv, suma 2500 lei se trece la Creditul contului 924 „Pierderi fiscale”. În urma celor menționate, baza impozabilă în anul 2015 va fi mai mică cu suma pierderii utilizate aferente anului 2014.

În situația în care rezultatul contabil este mai mic decât rezultatul fiscal, entitatea înregistrează într-o perioadă fiscală venit contabil, însă în urma ajustărilor obține o bază impozabilă mai mare, din care trebuie să achite ulterior o valoare mai mare a impozitului pe venit.

*Exemplu:* entitatea în anul 2015 a înregistrat venit contabil în sumă totală de 114000 lei. Pe parcursul perioadei s-au înregistrat următoarele date (extras):

- ✓ despăgubirile primite pentru prejudiciul cauzat de inundațiile abundente 3120 lei;
- ✓ pentru înlăturarea pagubei entitatea a recuperat bunurile pierdute cu 2900 lei;
- ✓ s-au înregistrat cheltuieli neconfirmate documentar în valoare de 370 lei;
- ✓ penalități aferente taxelor la buget 195 lei;
- ✓ a fost sponsorizată Conferința organizată cu ocazia Zilei Contabilului cu 680 lei;
- ✓ au fost donate produse unei case de copii, valoarea contabilă a produselor donate 4340 lei, valoarea justă a acestora 4760 lei.

Pentru stabilirea venitului impozabil în ambele cazuri (în contabilitate și fiscalitate), s-au înregistrat venituri și cheltuieli obținute în Declarația cu privire la impozitul pe venit VEN 12:

Tabelul 4

## Declarația cu privire la impozitul pe venit VEN 12 (extras)

<i>Extras din Anexa 1D Ajustarea (majorarea/ micșorarea) veniturilor conform prevederilor legislației fiscale</i>			
Indicatori	Constatat în:		Diferența dintre scopuri fiscale și contabilitatea financiară
	contabilitatea financiară	scopuri fiscale	
0207 Venitul obținut din donarea activelor, cu excepția activelor de capital	X	4760	+4760
02041 Venitul obținut din înlocuirea proprietății	3120	0	-3120
02042 Venitul obținut ca rezultat al neînlocuirii sau înlocuirii parțiale a proprietății	X	220	+220
<b>În total 020</b>	-	-	<b>+1860</b>

<i>Extras din Anexa 2D Ajustarea (majorarea/ micșorarea) cheltuielilor conform prevederilor legislației fiscale</i>			
<b>03019</b> Penalități, amenzi și alte sancțiuni aplicate pentru încălcarea actelor normative	195	0	-195
<b>03025</b> Suma contribuțiilor bănești efectuate în scopuri filantropice și de sponsorizare	680	0	-680
<b>03026</b> Suma cheltuielilor neconfirmate documentar	370	0	-370
<b>În total 030</b>	-	-	<b>-1245</b>

Sursa: elaborat de autori

În scopul impozitării, venitul contabil e corectat cu suma ajustărilor determinate, conform anexelor 1D și 2D din VEN 12. În urma ajustărilor privind veniturile și cheltuielile, venitul impozabil va constitui *117105 lei* ( $114000+1850+1245$ ). În continuare, în Declarația propriu-zisă venitul impozabil este ajustat după anumiți indicatori, precum filantropie și sponsorizare și cheltuieli neconfirmate documentar. În baza datelor prezentate obținem un venit impozabil în valoare de 117090,66 lei ( $117105-680 \cdot 2\%-370 \cdot 0,2\%$ ). Așadar, observăm că în contabilitate venitul constituie 114000 lei, iar în fiscalitate acest indicator constituie 117090,66 lei.

În urma analizării informației prezentate anterior, atât sub aspect teoretic, cât și practic, se ajunge la concluzia că este necesar a fi înfăptuite anumite acțiuni pentru concilierea fiscalitate-contabilitate. În acest sens, punctul de pornire ar fi armonizarea terminologiei fiscale cu cea contabilă, pentru a evita distorsiunile lexicale și a permite o interpretare univocă.

Totuși, întrucât contabilitatea servește intereselor proprietarilor/acționarilor, iar fiscalitatea – statului, imposibilitatea unei armonizări totale este de la sine înțeleasă. Acest lucru însă nu exclude necesitatea existenței unei relații funcționale între contabilitate și fiscalitate. Astfel, apare necesitatea respectării principiilor de bază ale contabilității și, implicit, ale fiscalității, precum și funcționarea rezonabilă la nivel de entitate. Acest lucru poate fi realizat prin acceptarea paralelismelor, sau, în unele cazuri, prin integrarea valorilor contabile și fiscale din raportările contabile și fiscale.

Pentru aprecierea performanței financiare a entității, este important să se tindă spre o viziune comună asupra situațiilor financiare, ce ar oferi investitorilor posibilitatea să vadă atât performanțele normale, cât și variațiile ce nu sunt, în mod normal, incluse în contul de profit și pierdere. În acest mod se merge spre înlocuirea rezultatului contabil cu un indicator ce ar reflecta cât mai autentic performanțele entității prin rezultatul global.

#### **Bibliografie:**

1. BUCUR, V., ȚURCANU, V., GRAUR, A. *Contabilitatea impozitelor*. Chișinău: Editura ASEM, 2005, 564 p.
2. Codul fiscal al Republicii Moldova. Disponibil: [www.fisc.md](http://www.fisc.md)
3. Completarea Declarației cu privire la impozitul pe venit VEN 12. Disponibil: [www.contabilsef.md/libview.php?l=ro&id=9213&idc=290](http://www.contabilsef.md/libview.php?l=ro&id=9213&idc=290)
4. Legea contabilității, nr.113-XVI din 27.04.2007. Disponibil: [www.mf.gov.md](http://www.mf.gov.md)
5. POPA, A.F. *Contabilitatea și fiscalitatea rezultatului întreprinderii*. București: CECCAR, 2011, 390 p.
6. IAS 12 „Impozitul pe profit”. Disponibil: [www.mf.gov.md](http://www.mf.gov.md)
7. Standardul Național de Contabilitate „Cheltuieli”. Disponibil: [www.mf.gov.md](http://www.mf.gov.md)
8. Standardul Național de Contabilitate „Venituri”. Disponibil: [www.mf.gov.md](http://www.mf.gov.md)

Prezentat la 30.11.2015



## PARTICULARITĂȚILE BAZEI INFORMAȚIONALE AFERENTE ANALIZEI CAPITALULUI PROPRIU AL SOCIETĂȚILOR PE ACȚIUNI

*Nelea CHIRILOV*

*Academia de Studii Economice din Moldova*

În acest articol sunt prezentate particularitățile bazei informaționale aferente analizei capitalului propriu al societăților pe acțiuni. O atenție deosebită s-a acordat grupării surselor informaționale după diverse criterii, care prezintă interes deosebit în analiza capitalului propriu. În scopul aprofundării cercetării, au fost examinate trăsăturile caracteristice specifice bazei informaționale, aferente analizei capitalului propriu al societăților pe acțiuni, fiind prezentate și caracterizate cerințele acesteia.

**Cuvinte-cheie:** *capital propriu, societate pe acțiuni, bază informațională, utilizatori de informații.*

### THE FEATURES OF INFORMATION DATABASE RELATED TO THE ANALYSIS OF THE EQUITY OF JOINT-STOCK COMPANIES

This article tackles the features of information database related to the analysis of the equity of joint-stock companies. A special emphasis is placed on grouping information sources according to various criteria, which draw a particular interest in the process of analyzing the equity. With the aim of having a thorough research, information database-related characteristics have been considered. Moreover, the requirements of this database are identified and characterized.

**Keywords:** *equity, joint-stock company, information database, information users.*

În condițiile evoluției actuale a societăților pe acțiuni autohtone se impune cunoașterea bazei informaționale a analizei capitalului propriu, care trebuie să răspundă atât cerințelor conducerii și acționarilor, cât și necesităților informaționale ale celorlalți utilizatori.

Luând în considerare acest deziderat, considerăm că pentru analiza capitalului propriu al societăților pe acțiuni este necesară o bază specifică de informație, care să facă legătură între procesul de colectare a datelor inițiale și cel analitic. O bază informațională veridică, completă și pusă la dispoziție, la momentul oportun, influențează, în mod direct, calitatea deciziilor economice privind formarea și utilizarea capitalului propriu.

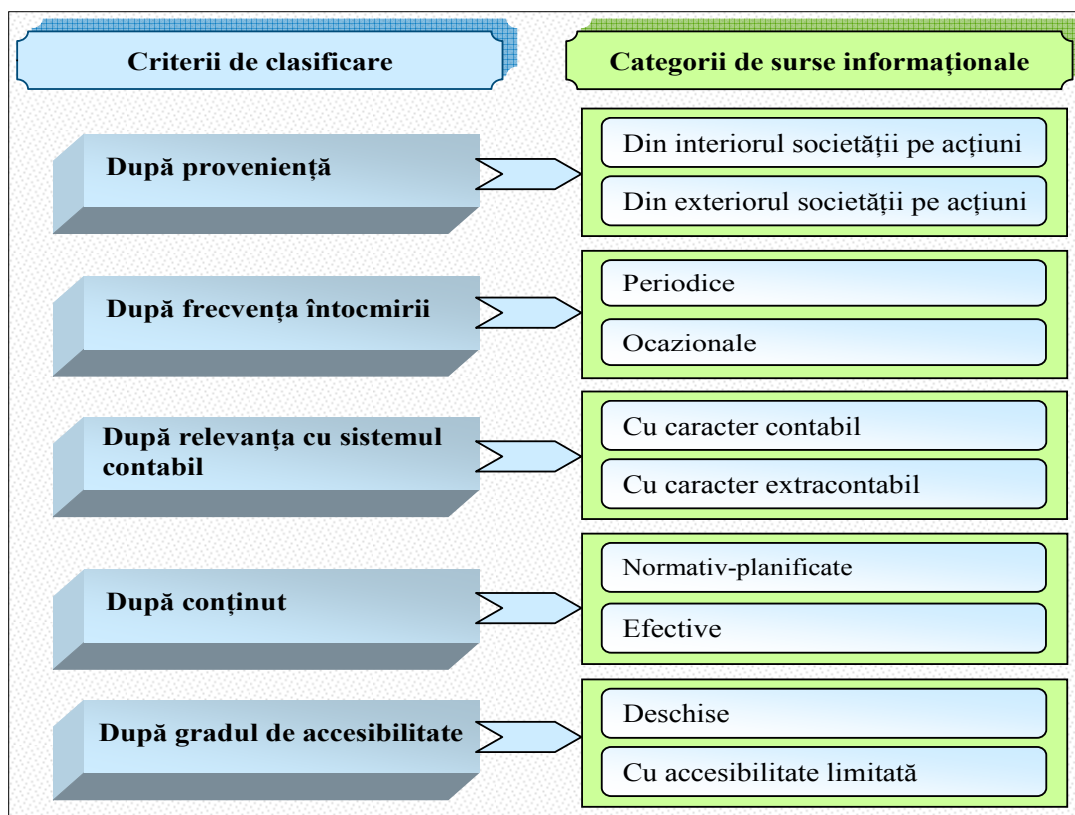
Este important să remarcăm faptul că, în procesul decizional, informația privind formarea și utilizarea capitalului propriu reprezintă un punct de pornire pentru elaborarea măsurilor de rigoare în condițiile concrete ale oricărei societăți pe acțiuni și este esențială pentru rezolvarea numeroaselor probleme. Prin urmare, se impune existența unei baze informaționale raționale și operative, care să aibă capacitatea de a asigura furnizarea datelor inițiale pentru analiza capitalului propriu și fundamentarea deciziilor economice optime.

De precizat că baza informațională a analizei capitalului propriu cuprinde un ansamblu de surse informaționale, care au drept scop asigurarea suportului necesar pentru atingerea obiectivelor analizei. În legătură cu diversitatea surselor informaționale ale analizei capitalului propriu se propune gruparea acestora după anumite criterii. În continuare, facem o prezentare schematică a criteriilor de grupare a surselor informaționale, care prezintă interes deosebit în analiza capitalului propriu al societăților pe acțiuni (Fig.1). Unele dintre criteriile indicate în Figura 1 sunt evidente și nu necesită explicații suplimentare, altele cer lămuriri și exemplificări.

În literatura de specialitate, mulți economiști (Gh.Vâlceanu [3, p.40], L.Spătaru [1, p.43], N.Tabără [2, p.17], N.A. Nichiforova, V.N. Tafințeva [5, p.38] etc.) clasifică informațiile *după proveniența* lor. Conform acestui criteriu, sursele informaționale ale analizei capitalului propriu pot fi clasificate astfel: *provenite din interiorul societății pe acțiuni*, precum situațiile financiare, raportul conducerii, rapoartele statistice, documentele primare și registrele centralizatoare contabile aferente capitalului propriu, hotărârile și deciziile organelor de conducere ale societății pe acțiuni etc.; *provenite din exteriorul societăților pe acțiuni*, ca, de exemplu, deciziile Consiliului de administrație al Comisiei Naționale a Pieței Financiare, publicațiile Comisiei Naționale a Pieței Financiare, informațiile bursiere etc.

*După frecvența întocmirii*, baza informațională se clasifică în: *surse informaționale periodice*, care se întocmesc obligatoriu la anumite intervale și includ: raportul anual, documentele primare și registrele centralizatoare contabile aferente capitalului propriu, dările de seamă specializate prezentate la Comisia Națională a Pieței Financiare, rapoartele statistice etc.; *surse informaționale ocazionale*, care au frecvență aleatorie și se

elaborează pe baza situațiilor inedite ale societății pe acțiuni, în particular: prospectul ofertei publice de valori mobiliare, darea de seamă asupra rezultatelor emisiunii de acțiuni etc.



**Fig.1.** Clasificarea surselor informaționale ale analizei capitalului propriu al societăților pe acțiuni.

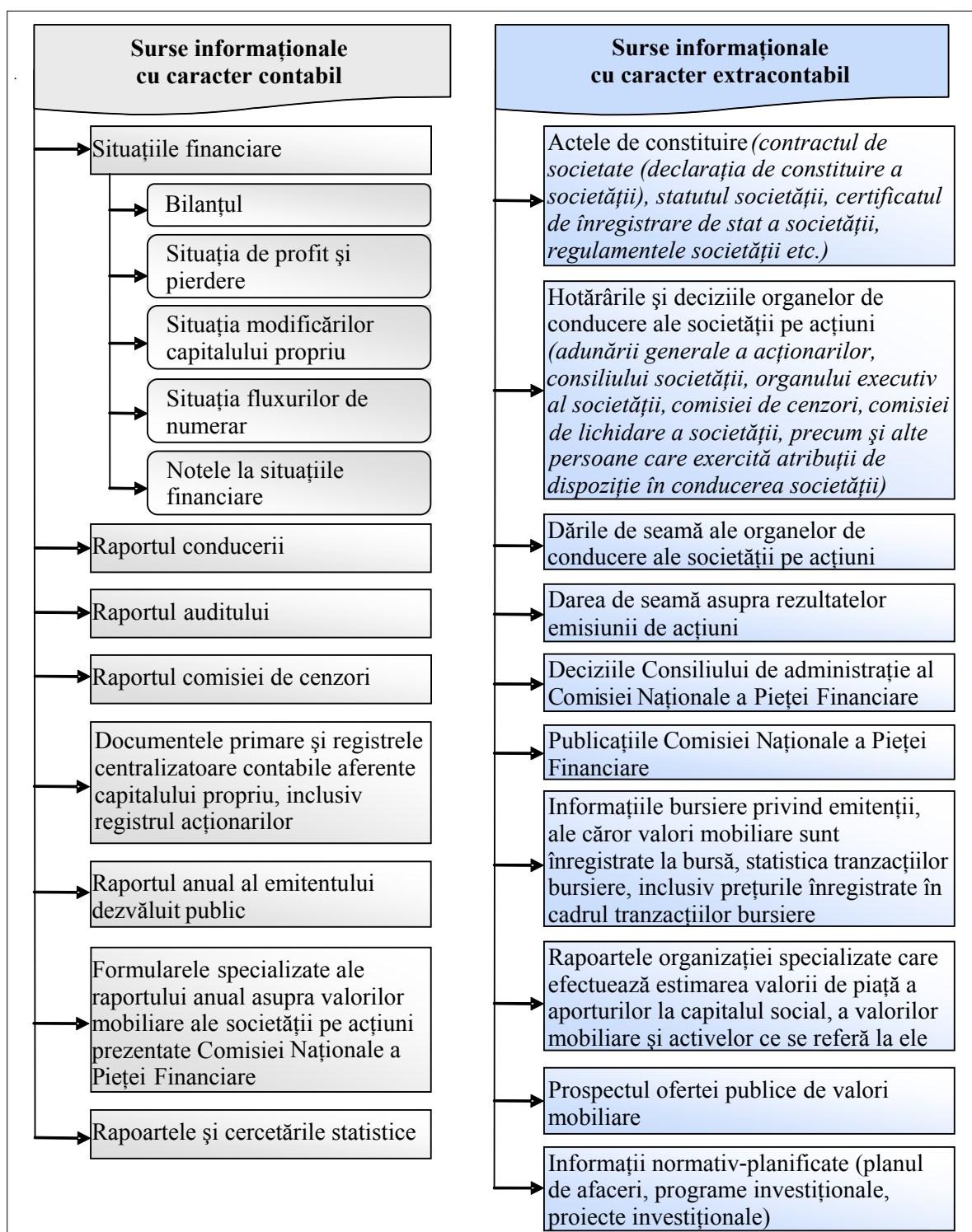
Sursa: elaborată de autor

Alt criteriu de clasificare constă în *relevanța cu sistemul contabil*, care grupează baza informațională a analizei capitalului propriu în *surse cu caracter contabil* și *extracontabil*. O sinteză generalizată a structurii bazei informaționale a analizei capitalului propriu al societăților pe acțiuni, după acest criteriu, este prezentată în Figura 2. Din punctul nostru de vedere, această clasificare scoate în evidență complexitatea bazei informaționale, precum și legăturile ce se stabilesc între emitent și Comisia Națională a Pieței Financiare, Bursa de Valori a Moldovei, Biroul Național de Statistică, societatea de registru etc.

Cea mai cuprinzătoare sursă informațională cu caracter contabil, care oferă informații pentru analiza capitalului propriu al societăților pe acțiuni, este *raportul anual*, care, potrivit art.3 alin.(1) al Legii contabilității, nr.113-XVI din 27.04.2007, cuprinde „*situațiile financiare anuale, raportul conducerii și raportul auditorului*, în cazul în care auditul este obligatoriu”. În prezent, legislația Republica Moldova impune o anumită formă standard a situațiilor financiare prevăzută de noul Standard Național de Contabilitate „Prezentarea situațiilor financiare” elaborat în baza Directivelor UE, Cadrului general conceptual pentru raportarea financiară și Standardelor Internaționale de Contabilitate, deoarece se adresează atât utilizatorilor autohtoni, cât și străini.

Potrivit prevederilor Standardelor Naționale de Contabilitate, în componența situațiilor financiare se cere prezentarea anumitor informații specifice. În particular, în *datele generale din Anexa 6 a notelor la situațiile financiare* se cere prezentarea indicatorului 10 „numărul acțiunilor ordinare la finele perioadei de gestiune”. După părerea noastră, este necesară precizarea denumirii acestui indicator, întrucât trebuie să fie concretizat dacă acestea sunt acțiunile ordinare aflate în circulație, cu excepția acțiunilor de tezaur (răscumpărate, achiziționate) sau toate acțiunile plasate, inclusiv cele de tezaur. Deoarece gradul de retragere a capitalului social influențează stabilitatea financiară a societății pe acțiuni și deciziile economice ale utilizatorilor situațiilor financiare (acționari, investitori potențiali, creditori etc.), considerăm că în notele la situațiile financiare trebuie prezentat atât numărul acțiunilor aflate în circulație la finele perioadei de gestiune, cât și numărul acțiunilor de tezaur.





**Fig.2.** Structurarea bazei informaționale aferente analizei capitalului propriu al societăților pe acțiuni după relevanța cu sistemul contabil.

Sursa: elaborată de autor

În datele generale din Anexa 6 a notelor la situațiile financiare se prezintă, de asemenea, indicatorul 11 „profit net (pierdere netă) al perioadei de gestiune pentru o acțiune ordinară”. Este de subliniat că, actualmente, în practica economică autohtonă apar deficiențe legate de calculul rezultatului pe acțiune, fiindcă nici Standardul Național de Contabilitate „Prezentarea situațiilor financiare” și nici alt act normativ nu reglementează

determinarea acestui indicator. Din punctul nostru de vedere, pentru asigurarea utilizatorilor cu date inițiale veridice, sunt necesare explicații suplimentare și investigații mai profunde privind calculul și analiza rezultatului pe acțiune.

În cadrul analizei capitalului propriu nu trebuie neglijate informațiile oferite de *raportul auditorului*. În viziunea noastră, auditul situațiilor financiare conferă rezultatelor analizei capitalului propriu al societăților pe acțiuni un grad înalt de exactitate, veridicitate și siguranță.

Necesitatea întocmirii *raportului conducerii* este prevăzută în art.29 alin.(5) al Legii contabilității, nr.113-XVI din 27.04.2007, a cărei structură este reglementată de art.31 al legii nominalizate. Savanții A.Nederița și N.Țiriulnicova au elaborat modelul acestui raport, în cadrul căruia figurează capitolul „Informații privind răscumpărarea părților sociale și a acțiunilor proprii” [4, p.13-19].

Pentru a satisface, într-o măsură cât mai mare, cerințele de informare ale acționarilor, în cadrul procesului de analiză a capitalului propriu se aplică *raportul comisiei de cenzori*. Această sursă poate oferi analizei capitalului propriu date inițiale privind: plenitudinea și autenticitatea datelor reflectate în documentele primare, registrele contabile și situațiile financiare, respectarea prevederilor legislației, a statutului și regulamentelor societății pe acțiuni de către persoanele cu funcție de răspundere ale societății, precum și propuneri cu privire la formarea și utilizarea capitalului propriu.

Pe piața de capital din Republica Moldova respectarea cerințelor privind transparența și furnizarea de informații este asigurată de emitenți prin intermediul *raportului anual al societății pe acțiuni aferent publicării*. Conținutul informațional minim al raportului menționat este stabilit prin Hotărârea Comisiei Naționale a Pieței Financiare privind instrucțiunea cu privire la conținutul, modul de întocmire, prezentare și publicare a raportului anual asupra valorilor mobiliare al societății pe acțiuni, nr.18/10 din 14.05.2010. De remarcat că Legea privind societățile pe acțiuni, nr.1134-XIII din 02.04.97, prin cerințele stabilite la art.91, cuprinde obligații minimale în acest sens, iar articolele 118-126 din Legea privind piața de capital, nr.171 din 11.07.2012, impun standarde mai ridicate privind furnizarea de informații de către emitenții care întrunesc criteriile unei societăți pe acțiuni de interes public.

Emitenții din Republica Moldova sunt obligați, de asemenea, să asigure întocmirea și prezentarea la Comisia Națională a Pieței Financiare a unor *formulare* în componența *raportului anual asupra valorilor mobiliare al societății pe acțiuni*. În vederea accentuării conținutului informațional bogat al formularelor pentru analiza capitalului propriu, subliniem importanța *formularului EM-1* „Informația privind insiderii și persoanele afiliate emitentului, circulația valorilor mobiliare ale emitentului care aparțin acestora”, *formularului EM-2* „Lista acționarilor care dețin cel puțin 5% din numărul total de acțiuni cu drept de vot plasate ale emitentului”, *formularului EM-3* „Informația privind valorile mobiliare emise, răscumpărate, achiziționate ale emitentului”, *formularului EM-4* „Informația privind dividendele și dobânzile aferente valorilor mobiliare”.

Menționăm că analiștii financiari ai pieței de capital și participanții profesioniști la ea monitorizează și evaluează permanent performanțele societăților pe acțiuni cotate și au o influență puternică asupra investitorilor în procesul de cumpărare, păstrare sau vânzare a acțiunilor și, implicit, asupra nivelului prețurilor bursiere. Astfel, pe lângă sursele informaționale financiar-contabile, în procesul analizei capitalului propriu frecvent se folosesc *informațiile bursiere* privind emitenții, ale căror valori mobiliare sunt înregistrate la bursă, statistica tranzacțiilor bursiere, inclusiv prețurile înregistrate în cadrul tranzacțiilor bursiere care sunt dezvăluite în Buletinul informativ „Bursa de Valori a Moldovei” și pe pagina web a Bursei de Valori a Moldovei.

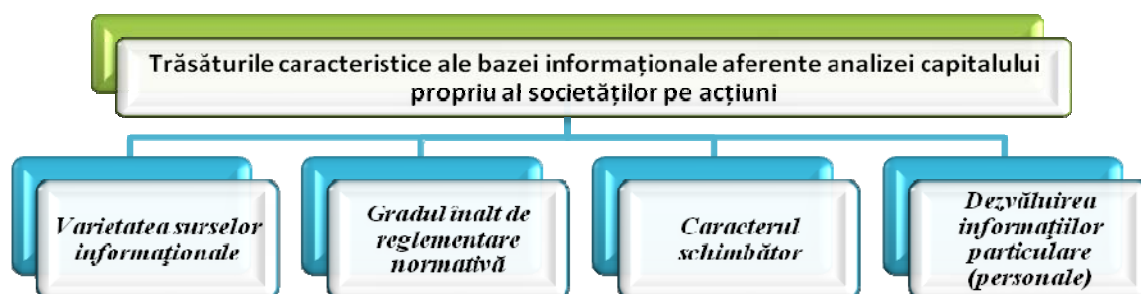
Cu toate acestea, investitorii reali și potențiali în procesul achiziționării acțiunilor nu pot neglija datele din *prospectul ofertei publice*, care este reglementat de dispozițiile secțiunii a 3-a din Legea privind piața de capital. Prin urmare, procesul analitic al capitalului propriu este valorificat cu informații privind: tipul acțiunilor oferite public sau care urmează să fie admise spre tranzacționare pe o piață reglementată, riscurile esențiale referitoare la emitent și la acțiunile în cauză, situația financiară și perspectivele emitentului emisiunii etc.

Trebuie remarcat faptul că, în procesul analizei capitalului propriu, sunt foarte utile *hotărârile și deciziile organelor de conducere ale societății pe acțiuni*, deoarece oferă informații privind: modificările și completările operate în statut, inclusiv cele ce țin de schimbarea claselor și numărului de acțiuni, de convertirea, consolidarea sau fracționarea acțiunilor societății; hotărârile cu privire la modificarea capitalului social, repartizarea profitului net, folosirea capitalului de rezervă, plata dividendelor anuale și intermediare, prospectul ofertei publice de valori mobiliare; precum și strategiile și perspectivele de dezvoltare a societății pe acțiuni etc.

Putem spune că sunt extrem de importante, în procesul analizei capitalului propriu, și *rapoartele statistice*. În particular, societățile pe acțiuni mixte prezintă, actualmente, Biroului Național de Statistică raportul statistic trimestrial nr.1-invest „Investițiile străine, alocate de către întreprinderile cu capital străin în economia Moldovei”, care oferă procesului analitic date inițiale privind capitalul plasat de către investitorii străini în acțiuni, mărimea capitalului propriu și elementele componente ale acestuia, precum și rezultatele financiare ale societății pe acțiuni.

Generalizând cele expuse mai sus, putem conchide că complexitatea bazei informaționale aferente analizei capitalului propriu al societăților pe acțiuni depinde de obiectivele și necesitățile utilizatorilor informațiilor furnizate de analiză.

Din punctul nostru de vedere, bazei informaționale, aferente analizei capitalului propriu al societăților pe acțiuni, îi sunt inerente următoarele *trăsături caracteristice* care sunt prezentate în Figura 3.



**Fig.3.** Trăsăturile caracteristice ale bazei informaționale ale analizei capitalului propriu.

Sursa: elaborată de autor

- **Varietatea surselor informaționale.** Caracteristic pentru baza informațională a analizei capitalului propriu al unei societăți pe acțiuni este faptul că ea are o structură diversificată și un caracter neomogen. De menționat că diversitatea bazei informaționale aferente analizei capitalului propriu este determinată de reglementările contabile naționale și internaționale, precum și de nevoile diferite ale utilizatorilor de informații. Prin urmare, fiind complexă după conținut și eterogenă în ce privește natura și originea surselor informaționale, baza informațională permite aprecierea multilaterală a formării și utilizării capitalului propriu.

- **Gradul înalt de reglementare normativă.** În Republica Moldova, modul de înființare, organizare și funcționare a societăților pe acțiuni, drepturile și obligațiile acționarilor, precum și formarea și utilizarea capitalului propriu sunt stabilite de legislație, iar activitatea societăților pe acțiuni este supravegheată de către Comisia Națională a Pieței Financiare. Aici este important să remarcăm că, spre deosebire de entitățile cu altă formă organizatorico-juridică, societățile pe acțiuni sunt obligate să întocmească un set distinct de rapoarte, precum: raportul anual aferent publicării, darea de seamă asupra rezultatelor emisiunii de acțiuni, dările de seamă specializate prezentate Comisiei Naționale a Pieței Financiare etc. Pe lângă aceasta, trebuie specificat faptul că sunt reglementate și datele oferite pentru analiza capitalului propriu de Comisia Națională a Pieței Financiare, Bursa de Valori a Moldovei, organizațiile specializate în estimarea valorii de piață a acțiunilor și activelor etc. Ca urmare a celor menționate, baza informațională a analizei capitalului propriu al societăților pe acțiuni este determinată de legislație și se regăsește într-o conexiune strânsă cu reglementările normative.

- **Caracterul schimbător.** Constatăm că legislația care reglementează baza informațională a analizei capitalului propriu se schimbă relativ des. De exemplu, art.91 al Legii privind societățile pe acțiuni, care reglementează publicarea informației despre activitatea societății pe acțiuni, s-a modificat în decursul a 11 ani de șase ori, iar art.66 al legii nominalizate, ce reglementează alegerea consiliului societății și încetarea împuternicirilor lui, s-a modificat de șapte ori. De asemenea, frecvent se schimbă și formatul surselor informaționale, precum și conținutul indicatorilor respectivi: capitalul social, capitalul neînregistrat, capitalul de rezervă etc. Astfel, baza informațională a analizei capitalului propriu al societăților pe acțiuni se perfecționează permanent, adică ea, încontinuu, se revizuieste și se adaptează noilor cerințe care sunt într-o continuă modificare. Totodată, schimbările prea dese ale reglementărilor normative conduc la creșterea gradului de incertitudine și la instabilitatea bazei informaționale a analizei capitalului propriu, fapt ce are efecte directe asupra procesului analitic și asupra calității deciziilor economice adoptate.

- **Dezvăluirea informațiilor particulare (personale).** Această trăsătură rezultă din obligația societății pe acțiuni de a dezvălui în raportul anual asupra valorilor mobiliare aferent publicării datelor personale ale

acționarilor, care dețin 5% și mai mult din acțiunile cu drept de vot plasate, și anume: denumirea completă a acționarilor, numărul de acțiuni cu drept de vot deținute, cota deținută în numărul total de acțiuni cu drept de vot ale emitentului etc. De asemenea, sunt cerute dezvăluirile informațiilor privind persoanele cu funcție de răspundere ale societății pe acțiuni (președintele consiliului societății, membrii consiliului societății, organul executiv al societății și comisia de cenzori), societatea de registru și auditorul emitentului.

Datorită faptului că informațiile pe care le furnizează baza informațională a analizei capitalului propriu influențează comportamentul utilizatorilor în procesul analitic și decizional, este clar că fiecare utilizator dorește să dispună de date inițiale care să-i diminueze incertitudinile și să-i ofere posibilitatea de a fundamenta cele mai optime decizii. Prin urmare, baza informațională a analizei capitalului propriu trebuie să satisfacă următoarele cerințe (Fig.4):



**Fig.4.** Cerințele bazei informaționale ale analizei capitalului propriu.

Sursa: elaborată de autor

✓ **Utilitatea.** Această cerință se atestă prin importanța informației privind formarea și utilizarea capitalului propriu la elaborarea, fundamentarea și adoptarea deciziilor economice de către utilizatorii de informații. De remarcat faptul că utilitatea informațiilor oferite de baza informațională a analizei capitalului propriu depinde foarte mult de caracteristicile calitative ale acestora, precum: inteligibilitatea, relevanța, credibilitatea și comparabilitatea în același timp.

În opinia noastră, baza informațională a analizei capitalului propriu are o *utilitate internă*, în scopul conducerii și gestionării societății pe acțiuni, și o *utilitate externă*, de informare a utilizatorilor (acționari, investitori potențiali, clienți, furnizori, creditorii etc.), în scopul protejării intereselor acestora și asigurării credibilității informațiilor privind formarea și utilizarea capitalului propriu.

✓ **Veridicitatea.** Pentru a se asigura această cerință, este necesar ca informația să fie reflectată și prelucrată corect, adică să lipsească erorile esențiale și neobiectivitățile. Verificarea datelor privind formarea și utilizarea capitalului propriu în cadrul societăților pe acțiuni este realizată de contabili profesioniști (comisia de cenzori și auditul), care au rolul de a spori credibilitatea informației contabile. Trebuie remarcat faptul că, în majoritatea societăților pe acțiuni, verificarea informației privind capitalul propriu nu prezintă dificultăți, deoarece în cursul unui an contabil se produc foarte puține operațiuni legate de capitalul propriu; de regulă, singurele operațiuni înregistrate în componența capitalului propriu corespund modificării profitului net sau pierderii nete ale perioadei de gestiune și utilizării profitului. Verificarea bazei informaționale a analizei capitalului propriu este mai complexă în cazul societăților pe acțiuni cotate la bursă din cauza numărului mare de acționari și a schimbării frecvente a deținătorilor de acțiuni.

✓ **Oportunitatea prezentării.** Presupune să nu ducă la pierderea relevanței informațiilor prin întârzierea prezentării lor, dar nici la pierderea credibilității, printr-o prezentare prea rapidă, pentru că poate sta la baza unor conflicte. Asemenea conflicte pot să survină, de exemplu, în cadrul adunării generale a acționarilor la adoptarea hotărârilor privind majorarea sau diminuarea capitalului social, stabilirea mărimii dividendelor etc. Soluționarea acestora presupune asigurarea cu o bază informațională care să ofere date inițiale credibile și relevante. Totodată, trebuie menționat faptul că sunt cazuri în care informația cea mai relevantă nu este și cea mai credibilă, sau invers. Deși datele inițiale privind capitalul propriu trebuie utilizate după ce este verificată credibilitatea lor, procesul nu trebuie întârziat, deoarece există riscul să se ajungă la situația când informația nu mai prezintă relevanță la momentul analizei. Este important să distingem că oportunitatea bazei informaționale a analizei capitalului propriu poate fi determinată de perioada dintre data prezentării surselor informaționale (situațiile financiare, raportul de audit, raportul comisiei de cenzori, hotărârile adunărilor generale a acționarilor etc.) și momentul în care sunt publicate, dar și de diferențele temporale dintre publicarea surselor informaționale și utilizarea informațiilor în procesul analitic și decizional.

✓ **Temeinicia costului.** Presupune că asigurarea unei baze informaționale de calitate are anumit cost. Costul bazei informaționale a analizei capitalului propriu este reprezentat de totalitatea cheltuielilor efectuate pentru a obține date inițiale despre formarea și utilizarea capitalului propriu. Este evident că avantajele obținute

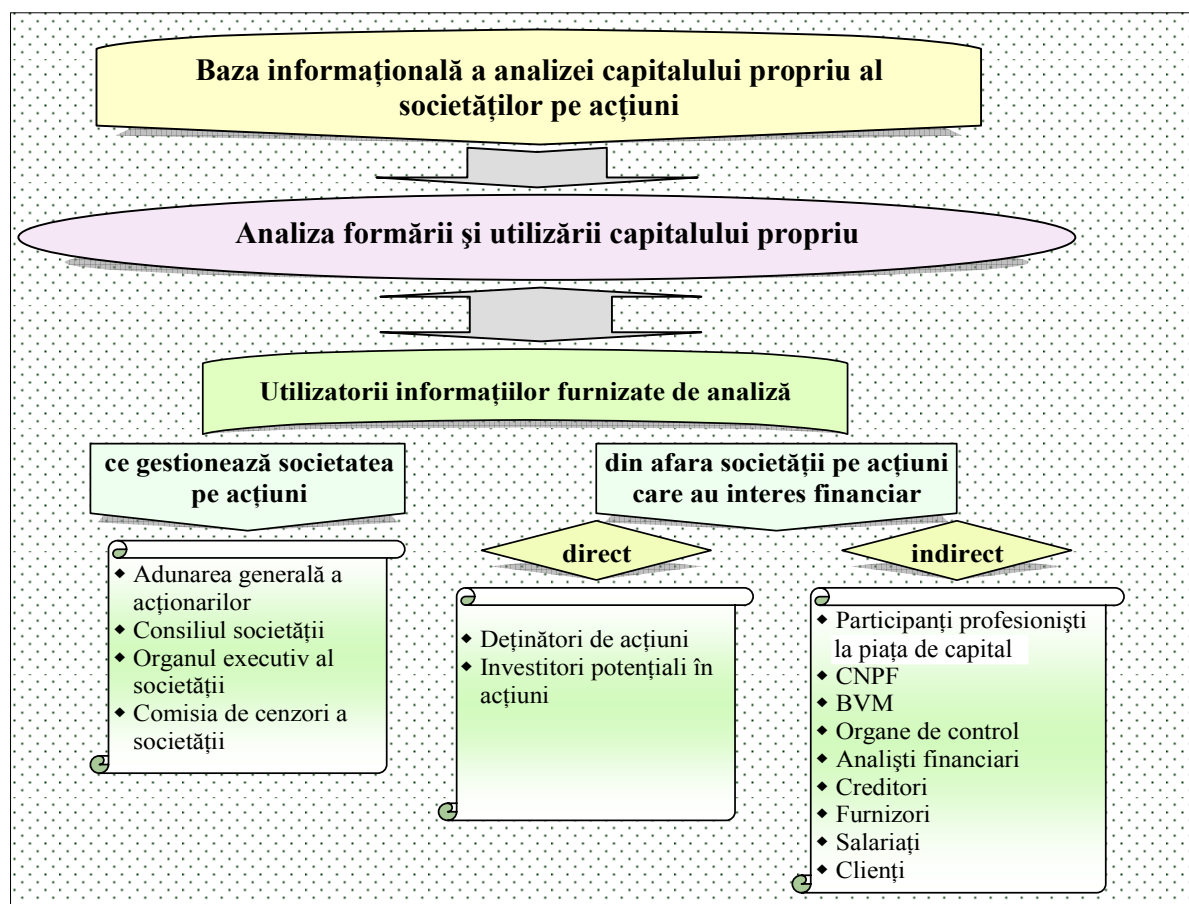


din utilizarea informației trebuie să fie mai mari decât costurile acesteia; totodată, nu este indiferent cât costă obținerea datelor inițiale necesare pentru analiză, întrucât aceeași informație poate să aibă costuri diferite, iar utilitatea ei să fie aceeași. De exemplu, costul informației furnizate de raportul auditului poate fi diferit, fiindcă auditul capitalului propriu poate fi organizat la nivelul societății pe acțiuni, în cadrul funcției de audit intern, precum și sub forma auditului extern realizat de persoane din afara societății pe acțiuni. De asemenea, apar divergențe și la costul datelor inițiale din registrul acționarilor, deoarece acesta depinde de cine ține registrul acționarilor (societatea de registru sau emitentul). Evident, dacă auditul capitalului propriu este organizat la nivelul societății pe acțiuni, iar registrul acționarilor este ținut de emitent, atunci costul va fi mult mai redus față de costul informației oferite de organizația de audit și societatea de registru.

Din cele prezentate mai sus rezultă că respectarea cerințelor menționate va crea o bază informațională valorificată, care va asigura procesul analitic cu informații relevante, credibile, veridice și clare privind formarea și utilizarea capitalului propriu al societăților pe acțiuni.

În opinia noastră, obiectivul cercetării bazei informaționale a analizei capitalului propriu al societăților pe acțiuni constă în sporirea gradului de asigurare a utilizatorilor cu informații integrale și în îmbunătățirea calității deciziilor economice adoptate. Aici este important să adăugăm că calitatea deciziilor depinde de precizia cu care sunt interpretate datele inițiale, de gradul de modernitate a metodelor, procedeele și tehnicilor de analiză, precum și de nivelul de pregătire profesională a utilizatorilor de informații. În contextul celor menționate, se recomandă ca utilizatorii informațiilor analitice privind formarea și utilizarea capitalului propriu să fie clasificați, după proveniență, în trei grupuri: 1) *cei ce gestionează societatea pe acțiuni*; 2) *cei din afara societății pe acțiuni, care au un interes financiar direct* în aceasta din urmă și 3) *persoane fizice și juridice, care au un interes financiar indirect în societatea pe acțiuni*.

Schematic, intercon condiționarea dintre baza informațională a analizei capitalului propriu și utilizatorii de informații este prezentată în Figura 5.



**Fig.5.** Concordanța dintre baza informațională a analizei capitalului propriu al societăților pe acțiuni și utilizatorii de informații.

Sursa: elaborată de autor

Din cele ilustrate mai sus reiese că există o gamă foarte largă de utilizatori ai informației oferite de baza informațională privind capitalul propriu al societăților pe acțiuni. Prin urmare, rolul bazei informaționale este decisiv, deoarece datele inițiale oferite influențează comportamentul utilizatorilor în procesul analitico-decizional și vizează următoarele aspecte:

- ◆ satisfacerea îndatoririlor legale, și anume: pregătirea și prezentarea unor informații care să răspundă cerințelor impuse de acționari, Comisia Națională a Pieței Financiare, participanții profesioniști la piața de capital, creditorii etc.;
- ◆ nevoia de coordonare a adunării generale a acționarilor, consiliului societății, organului executiv, comisiei de cenzori, precum și a altor utilizatori de informații;
- ◆ elaborarea, fundamentarea și adoptarea deciziilor economice.

În final subliniem că în procesul alegerii strategiei de dezvoltare a societății pe acțiuni, căutării surselor de finanțare a activității economico-financiare trebuie profund conștientizată importanța obținerii informațiilor adecvate privind formarea și utilizarea capitalului propriu.

#### **Bibliografie:**

1. SPĂTARU, L. *Analiza economico-financiară. Instrument al managementului întreprinderilor*. Ediția a II-a. București: Editura Economică, 2010. 600 p.
2. TABĂRĂ, N., HOROMNEA, E., TOMA, C. *Analiza contabil-financiară*. Iași: Tipografia Moldova, 2002. 350 p.
3. VÂLCEANU, Gh., ROBU, V., GEORGESCU, N. *Analiză economico-financiară*. Ediția a 2-a. București: Editura Economică, 2005. 448 p.
4. НЕДЕРИЦА, А., ЦИРЮЛЬНИКОВА, Н. О порядке составления пояснительных записок и отчета руководства за 2008 год. В: *Contabilitate și audit*, 2009, № 2, с.9-19.
5. НИКИФОРОВА, Н.А., ТАФИНЦЕВА, В.Н. *Управленческий анализ: Учебник для магистров*. Москва: Юрайт, 2013. 442 с.

*Prezentat la 20.11.2015*



## НОВЫЙ ПОДХОД К КЛАССИФИКАЦИИ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ В СООТВЕТСТВИИ С МСФО

*Наталья ДРАГОМИР*

*Молдавская экономическая академия*

В статье рассмотрен подход к классификации финансовых активов в соответствии с финальной версией МСФО (IFRS)-9 «Финансовые инструменты», опубликованного Советом по МСФО в июле 2014 года, и проанализированы его принципиальные изменения по сравнению с требованиями как предыдущих версий указанного стандарта, так и действующего МСФО (IAS)-39 «Финансовые инструменты: признание и оценка».

**Ключевые слова:** *финансовые активы, бизнес-модель, контрактные денежные потоки, амортизированная стоимость, справедливая стоимость, временная стоимость денег, базовый кредитный договор, кредитный риск.*

### O NOUĂ ABORDARE A CLASIFICĂRII ACTIVELOR FINANCIARE ÎN CONFORMITATE CU IFRS

În articol este descris modul de abordare a clasificării activelor financiare în conformitate cu versiunea finală a SIRF (IFRS)-9 „Instrumente financiare”, publicat de IASB în iulie 2014. Sunt analizate modificările fundamentale ale acestui standard în comparație cu versiunile lui anterioare și cu cea actuală IFRS (IAS)-39 „Instrumente financiare: recunoaștere și evaluare”.

**Cuvinte-cheie:** *active financiare, model de afaceri, fluxuri de trezorerie contractuale, cost amortizat, valoare justă, valoarea în timp a banilor, contract de credit de bază, risc de credit.*

### THE NEW APPROACH TO CLASSIFICATION OF FINANCIAL ASSETS ACCORDING TO IFRS

In this paper we analyse the approach to classification of financial assets according to the final version of IFRS-9 "Financial Instruments", published by the IFRS council in July 2014.

Specifically, we examine the IFRS-9 in terms of the key changes and differences with respect to both the previous version of IFRS standards and the current IAS-39 "Financial Instruments: recognition and measurement" standard.

**Keywords:** *financial assets, business model, the contractual cash flows, amortized cost, fair value, time value of money, the basic credit agreement, the credit risk.*

При классификации финансовых активов субъектов национальной экономики, обязанных организовать ведение бухгалтерского учета и представление финансовых отчетов на основе МСФО, неуко- снительным является применение требований МСФО (IAS)-39 «Финансовые инструменты: призна- ние и оценка». Между тем 12 ноября 2009 года Советом по МСФО был выпущен стандарт МСФО (IFRS)-9 «Финансовые инструменты», который должен был полностью заменить действующие требо- вания к классификации активов, установленные МСФО-39. Он являлся первой частью (из трех) нового стандарта по бухгалтерскому учету финансовых инструментов. Этим документом была введена новая модель классификации финансовых активов, более логичная и последовательная, чем в действующем МСФО-39. Полную версию стандарта с обязательной заменой МСФО-39 планировалось выпустить до конца 2010 года, а с 1 января 2013 года он предполагался к обязательному применению. Однако в 2010 году была опубликована только вторая часть МСФО-9, дополненная новыми требованиями по учету финансовых обязательств и перенесенными из МСФО (IAS)-39 требованиями прекращения признания финансовых активов и финансовых обязательств. И в декабре 2012 года дата обязательного применения стандарта была изменена на 1 января 2015 года. Версия МСФО-9, включавшая новую модель хеджирования, была выпущена в 2013 году. А в феврале 2014 года Советом по международ- ным стандартам финансовой отчетности вновь было принято решение о переносе даты введения в действие МСФО-9 на 1 января 2018 года.

Полностью работа над стандартом была завершена в 2014 году. И 24 июля 2014 года Совет по МСФО опубликовал окончательную версию стандарта, которая заменяет более раннюю версию МСФО-9, а также требования действующего МСФО-39 [1]. При этом новый МСФО-9 2014 года со- держит подход к классификации финансовых активов, отличающийся от подхода, не только установ- ленного в МСФО-39, но и от предложенного МСФО-9 выпуска 2009 года. Так как классификация

финансовых инструментов и, в частности, финансовых активов, по сути, определяет весь процесс их бухгалтерского учета и содержание информации, раскрываемой в финансовых отчетах, остановимся на ее изменениях, внесенных новой версией МСФО-9 выпуска 2014 года.

Финальной версией МСФО-9 были сохранены установленные его предыдущей версией единые принципы подхода к классификации всех финансовых активов вместо существующих правил на основе совокупности требований по их отнесению к оценочным категориям, предусмотренным действующим МСФО-39. Таковыми являются два условия отнесения финансовых активов к оценочным категориям, а именно: **1)** бизнес-модель по управлению финансовыми активами и **2)** характеристики денежных потоков, предусмотренных договором по финансовому активу. При этом бизнес-модель «... описывает способ, которым предприятие управляет своими финансовыми активами с целью генерирования денежных потоков» [3, п.В4.1.2.А].

Условия, установленные МСФО-9 2009 года в отношении определения бизнес-модели, в финальной версии стандарта сохранены, в большей степени конкретизированы и сводятся к следующим:

- бизнес-модель определяется высшим управленческим звеном предприятия (руководством);
- бизнес-модель не зависит от намерений руководства в отношении отдельного финансового актива, а устанавливается на более высоком уровне агрегирования, то есть по портфелю инвестиций;
- предприятие может использовать более чем одну бизнес-модель для управления финансовыми инструментами, то есть может иметь несколько портфелей инвестиций с разными целями управления ими: например, портфель инвестиций для получения денежных потоков, установленных договором, и портфель инвестиций в целях торговли для реализации справедливой стоимости;
- реализация денежных потоков способом, отличающимся от обоснованно ожидаемого на момент классификации финансовых инструментов, не меняет бизнес-модель управления оставшимися в портфеле инвестиций финансовыми инструментами.

Бизнес-модель управления финансовыми активами определяется не одним, а всей совокупностью факторов на момент ее определения.

В новом МСФО-9 приведены ключевые вопросы, которые следует подвергнуть анализу при оценке бизнес-модели предприятия, а именно:

- как оценивается доходность финансовых активов;
- какие существуют риски, влияющие на доходность финансовых активов, и каков способ управления данными рисками;
- каков порядок определения вознаграждения менеджеров (зависит от справедливой стоимости управляемых активов или от полученных денежных потоков, предусмотренных договором).

Следует отметить, что в МСФО-9 2009 года для целей классификации предусматривалась одна базовая бизнес-модель управления активами, целью которой являлось удержание активов для получения предусмотренных договором потоков денежных средств и, соответственно, две бизнес-модели, определяющие оценочные категории финансовых активов, а именно:

- бизнес-модель, целью которой являлось удержание активов для получения предусмотренных договором потоков денежных средств;
- бизнес-модель, целью которой не являлось удержание инструментов для получения предусмотренных договором потоков денежных средств.

В финальной версии МСФО-9 бизнес-моделей управления активами уже две. То есть, помимо бизнес-модели, установленной МСФО-9 2009 года, не претерпевшей изменений, была введена еще одна бизнес-модель, являющаяся базовой для классификации финансовых активов, целью которой – удержание активов для получения предусмотренных договором потоков денежных средств и их продажа. Таким образом, финальная версия МСФО-9 предусматривает следующие бизнес-модели управления активами:

- бизнес-модель, целью которой является удержание активов для получения предусмотренных договором денежных потоков;
- бизнес-модель, целью которой достигается посредством получения предусмотренных договором денежных потоков и продаж финансовых активов;
- другая бизнес-модель.

Остановимся на их сравнительной характеристике. В рамках бизнес-модели, которая предусматривает удержание финансовых активов для получения предусмотренных договором денежных потоков, цель управления активами заключается в реализации потоков денежных средств посредством получения контрактных платежей в течение срока действия инструмента. При этом продажи финансовых активов могут не противоречить указанной цели управления финансовыми активами, если они

- обусловлены увеличением кредитного риска;
- происходят по другим причинам и являются редкими или незначительными;
- осуществляются незадолго до срока погашения финансовых активов, а полученные денежные средства приблизительно равны сумме оставшихся контрактных денежных потоков;
- являются частыми или значительными в определенный период, но предприятие может объяснить, почему такие продажи не являются отражением изменения его бизнес-модели.

Управление активами в рамках бизнес-модели, цель которой – получение предусмотренных договором денежных потоков и продажи финансовых активов, осуществляется предприятием для обеспечения ежедневных потребностей в ликвидности, поддержания определенного уровня доходности по процентам, обеспечения соответствия сроков действия финансовых активов срокам действия обязательств, финансируемых данными активами. Этот тип бизнес-модели предусматривает более частые продажи активов и в больших объемах, по сравнению с бизнес-моделью, целью которой является удержание финансовых активов для получения предусмотренных договором денежных потоков. При этом стандартом не установлено какого-либо порогового значения частоты или объемов продаж финансовых активов, так как и получение предусмотренных договором денежных потоков, и продажи финансовых активов являются неотъемлемой частью инвестиционной стратегии предприятия.

В категорию «другая бизнес-модель» новым стандартом объединены все бизнес-модели управления финансовыми активами, целью которых не является ни получение предусмотренных договором денежных потоков, ни получение предусмотренных договором денежных потоков от финансовых активов с одновременной возможностью их продажи. В рамках таких бизнес-моделей предприятие управляет финансовыми активами с целью реализации их справедливой стоимости. Следствием обозначенной цели предприятия являются активные покупки и продажи финансовых инструментов для получения дохода от изменения справедливой стоимости этих активов. При этом получение предусмотренных договором денежных потоков от таких активов на протяжении периода их нахождения в портфеле предприятия не противоречит цели указанной бизнес-модели, так как и оценка доходности, и принятие управленческих решений в отношении портфелей таких активов осуществляется на основе информации об их справедливой стоимости. *Таким образом, при анализе бизнес-моделей управления финансовыми активами предприятия для целей их классификации определяющим является способ реализации денежных потоков, планируемых к получению от этих активов.*

Согласно требованиям финальной версии МСФО-9, в случае если финансовый актив удерживается в рамках бизнес-модели, целью которой является удержание финансовых активов для получения предусмотренных договором денежных потоков, или в рамках бизнес-модели, цель которой – как получение предусмотренных договором потоков денежных средств, так и продажа финансовых активов, то для целей их классификации необходимо подвергнуть анализу характеристики договорных денежных потоков. А именно: являются ли указанные денежные потоки исключительно платежами в счет основного долга и процентами на непогашенную сумму основного долга. В предыдущей версии МСФО-9 денежные потоки, предусмотренные договором, подвергались анализу для финансовых активов, удерживаемых в рамках бизнес-модели, цель которой – получение договорных денежных потоков.

При этом, согласно обеим версиям стандарта, если процентные платежи включают в себя только возмещение за временную стоимость денег, за кредитный риск по непогашенной основной сумме долга и другие обычные риски и затраты, связанные с кредитованием, то эти договорные денежные потоки рассматриваются как проценты на непогашенную часть основной суммы долга. Финальная версия МСФО-9 содержит более полную характеристику денежных потоков, являющихся процентными платежами, которая, помимо перечисленных выше составляющих, включает и сумму маржи прибыли по удерживаемому финансовому активу. Указанная версия стандарта, помимо характеристики денежных потоков, представляющих собой процентные платежи, уточняет понятие основной

суммы долга, которая представляет собой справедливую стоимость финансового актива при первоначальном признании. Дополнительно уточнено, что она может изменяться в течение срока действия финансового актива [3, п.п.4.1.3(а); В 4.1.7.В]. Кроме того, дополнена характеристика такого понятия, как базовый кредитный договор. Под базовым кредитным договором понимается созданный или приобретенный финансовый актив независимо от того, является он займом по своей юридической форме или нет, а характеристики денежных потоков рассматриваются в рамках указанного договора. Подчеркнуто, что договорные условия, предопределяющие подверженность рискам или изменчивость договорных денежных потоков, не связанную с базовым кредитным договором, не приводят к возникновению договорных денежных потоков, являющихся исключительно платежами в счет основного долга и процентами на непогашенную часть основной суммы долга [3, В 4.1.7А]. В качестве примера стандарт приводит подверженность изменениям котировок акций или изменение цен на товар. Особое внимание в финальной версии стандарта, в отличие от его предыдущей версии, уделено возмещению за временную стоимость денег и условиям договора, изменяющим сроки и сумму договорных денежных потоков.

Классификация финансовых активов производится в момент их первоначального признания, то есть, когда предприятие становится стороной договорных положений инструмента. Согласно действующей классификации, установленной МСФО-39, финансовые активы объединяются в четыре оценочных категории:

- оцениваемые по справедливой стоимости через прибыль или убыток;
- инвестиции, удерживаемые до погашения;
- займы и дебиторская задолженность;
- финансовые активы, имеющиеся в наличии для продажи.

Версия МСФО-9 2009 года вместо четырех предусматривала две основные оценочные категории финансовых активов:

- оцениваемые по амортизированной стоимости;
- оцениваемые по справедливой стоимости через прибыли и убытки.

Согласно требованиям МСФО-39, активы, классифицированные в категории «инвестиции, удерживаемые до погашения», и «займы и дебиторская задолженность», оцениваются по амортизированной стоимости. Однако не является очевидным, почему их следует разделять. В МСФО-9 2009 года эти оценочные категории финансовых активов были объединены в одну – «оцениваемые по амортизированной стоимости». Эта категория финансовых активов сохранена и в финальной версии МСФО-9. Но если, в соответствии с действующим подходом, по классификации МСФО-39 предприятие на свое усмотрение может отнести к категории «инвестиции, удерживаемые до погашения», и «займы и дебиторская задолженность» любые активы, отвечающие установленным характеристикам, то классификация активов в категорию «оцениваемые по амортизированной стоимости», согласно МСФО-9, осуществляется только если они управляются в рамках бизнес-модели, целью которой является получение предусмотренных договором потоков денежных средств, а указанные денежные потоки являются исключительно платежами основного долга и процентов на непогашенную часть основного долга.

При этом, согласно требованиям МСФО-9 2009 года, если упомянутый анализ не позволял классифицировать финансовый актив как оцениваемый впоследствии по амортизированной стоимости, то он подлежал отнесению к категории «оцениваемые по справедливой стоимости». Согласно упомянутой версии стандарта, изменения справедливой стоимости финансовых активов, оцениваемых по справедливой стоимости, предполагалось отражать в составе прибыли или убытков. Исключение составляли только отдельные инвестиции в долевые инструменты, не предназначенные для торговли. По таким инструментам МСФО-9 2009 года предприятию было предоставлено право отражать изменения их справедливой стоимости в составе прочего совокупного дохода. Но такое решение должно быть принято на момент первоначального признания инструмента и в дальнейшем пересмотру не должно подлежать.

Указанный подход при классификации долевых инструментов сохранен и в МСФО-9 2014 года. При этом существенные изменения произошли в отношении классификации долговых финансовых активов, для которых финальной версией стандарта введена дополнительная оценочная категория «оцениваемые по справедливой стоимости через прочий совокупный доход». МСФО-39 содержит



категорию «финансовые активы, имеющиеся в наличии для продажи», которые подлежат последующей оценке по справедливой стоимости с отражением ее изменений в составе прочего совокупного дохода. Но по МСФО-39 в состав указанной категории предприятие может отнести непроизводные финансовые активы, которые не классифицируются как займы и дебиторская задолженность, инвестиции, удерживаемые до погашения, или финансовые активы, оцениваемые по справедливой стоимости, изменения которой отражаются в составе прибыли или убытка [4, п.9], в то время как в МСФО-9 2014 года финансовые активы оцениваются по справедливой стоимости через прочий совокупный доход только при соблюдении следующих условий:

- финансовый актив удерживается в рамках бизнес-модели, цель которой достигается как посредством получения предусмотренных договором денежных потоков, так и за счёт продажи финансовых активов;
- договорные условия финансового актива определяют получение в указанные даты денежных потоков, являющихся исключительно платежами в счет основной суммы долга и процентов на непогашенную часть основной суммы долга.

Если финансовый актив не соответствует условиям оценки по амортизированной стоимости или по справедливой стоимости через прочий совокупный доход, он, согласно требованиям МСФО-9 2014 года, подлежит оценке по справедливой стоимости через прибыль или убыток. При этом сохранена возможность классификации по усмотрению предприятия финансового актива как оцениваемого по справедливой стоимости через прибыль или убыток (без права последующей реклассификации), если это позволит устранить либо значительно уменьшить непоследовательность в подходах к оценке или признанию данного актива и связанного с ним обязательства.

Таким образом, в финальной версии МСФО-9 финансовые активы классифицируются не в две, как в МСФО-9 2009 года, а в три оценочные категории, а именно:

- оцениваемые по амортизированной стоимости;
- оцениваемые по справедливой стоимости через прочий совокупный доход;
- оцениваемые по справедливой стоимости через прибыль или убыток.

При этом следует подчеркнуть, что в финальной версии стандарта, как и в МСФО-9 2009 года, отсутствуют какие-либо правила запрета на классификацию финансовых активов, предусмотренные МСФО-39. Напомним, что, согласно требованиям МСФО-39, предприятие не имеет права классифицировать какой-либо финансовый актив по категории «удерживаемые до погашения», если в течение текущего финансового года или двух предшествующих финансовым годам оно продавало или реклассифицировало до наступления срока погашения инвестиции, удерживаемые до погашения, на более чем незначительную сумму.

Рассмотренный подход к классификации финансовых активов, основанный на анализе бизнес-модели управления ими, а также на природе договорных денежных потоков, и являющийся обязательным к применению с января 2018 года, призван обеспечить улучшение качества информации финансовых отчетов, предоставляемых хозяйствующими субъектами, обязанными применять требования МСФО.

#### Литература:

1. IFRS 9 – *Financial Instruments*. [изучено 25 сентября 2015]. Доступно: <http://iasplus.com/en/standards/ifrs/ifrs9>
2. *Международный стандарт финансовой отчетности (IFRS) 9 «Финансовые инструменты» (2013 год)*. [изучено 25 сентября 2015]. Доступно: [http://online.zakon.kz/Document?doc\\_id=31026893](http://online.zakon.kz/Document?doc_id=31026893)
3. *Международный стандарт финансовой отчетности (IFRS) 9 «Финансовые инструменты» (2014 год)*. [изучено 25 сентября 2015]. Доступно: <http://minfin.md>
4. *Международный стандарт финансовой отчетности (IAS) 39 «Финансовые инструменты» (2013 год)*. [изучено 25 сентября 2015]. Доступно: <http://minfin.md>

Prezentat la 30.11.2015

## FORMELE DE TURISM CARE VALORIFICĂ COMPONENTELE ATRACTIVE ALE DESTINAȚIEI

*Ina CAVCALIUC, Sergiu CAVCALIUC*

*Universitatea de Stat din Moldova*

Atractivitatea unei destinații depinde de resursele turistice existente și de modul în care acestea sunt percepute de turiști. Componentele ofertei turistice nu au aceeași importanță în cadrul ierarhiei stabilite de consumatori în vederea satisfacerii motivațiilor turistice, deoarece permanent există posibilitatea de a le completa, substitui sau compensa unele cu altele, de a modifica ponderea importanței fiecăruia în cadrul consumului turistic. Componentele de atractivitate a teritoriului stimulează interesul potențialilor turiști, pentru a le vizita, satisfăcând diferite motivații turistice.

**Cuvinte-cheie:** *produs turistic, ecoturism, turismul grădinilor, turism speologic, dezvoltare durabilă, motivație turistică, atractivitatea destinației, resurse naturale, turism de circumstanță.*

### FORMS OF TOURISM THAT IMPROVE ATTRACTIVE COMPONENTS OF THE DESTINATION

The attractiveness of a destination depends on the existing tourism resources and how they are perceived by tourists. Tourism supply components have not the same importance in the hierarchy established by consumer in order to satisfy its travel motivations, because there is the possibility of complete, substitute or offset each other, to modify the importance of each in the share of tourism consumption. Attractive components of the territory stimulate interest of potential tourists to visit them, satisfying different travel motivations.

**Keywords:** *tourism product, ecotourism, garden tourism, speleological tourism, sustainable development, tourist motivation, destination attractiveness, natural resources, event tourism.*

Lumea este o carte, iar cei care nu călătoresc nu pot citi decât o pagină din ea. Din cele mai vechi timpuri, omul a fost atras de frumos, de artă, cultură, civilizație, iar odată cu dezvoltarea turismului omului i s-a creat posibilitatea de a se deplasa pentru orice motivație, fie descoperire, destindere, cunoaștere, aventură etc. Atractivitatea unei destinații depinde de resursele turistice existente și de modul în care acestea sunt percepute de turiști. La început, în cel mai intens mod, erau valorificate resursele naturale, iar odată cu antropizarea spațiului natural lumea a devenit atrasă atât de resursele turistice naturale, cât și de cele antropice. Făcând o comparație cu procesul de producție industrial, conchidem că potențialul turistic natural reprezintă materia primă, iar baza tehnico-materială a turismului (unitățile de cazare, restaurare, agrement, infrastructura etc.) reprezintă tehnologii de producție, pe care forța de muncă le transformă în produse turistice, propuse consumatorilor turistici. La rândul lor, cantitatea și calitatea produselor turistice depind nu doar de materia primă (varietatea resurselor turistice în teritoriu, naturale și antropice), ci și de dezvoltarea tehnologiilor de producție și, în cea mai mare măsură, de efectivul și calificarea personalului din sectorul turistic. Oferta este premisa producției turistice, iar producția reprezintă un factor mobilizator al ofertei turistice. Potențialul turistic natural reprezintă totalitatea resurselor turistice pe care le oferă cadrul natural al țării prin componentele sale: configurația variată a reliefului, reprezentată prin peisaje spectaculoase, condiții climaterice, hidrografia, flora și fauna [1]. Componentele ofertei turistice nu au aceeași importanță în cadrul ierarhiei stabilite de consumatori în vederea satisfacerii nevoilor lor în turism, deoarece permanent există posibilitatea de a le completa, substitui, influența sau compensa unele cu altele, de a modifica ponderea importanței fiecăreia în cadrul consumului turistic [2]. Este cert faptul că componentele de atractivitate stimulează interesul potențialilor turiști, pentru a le vizita, satisfăcând diferite motivații turistice, cum ar fi petrecerea timpului liber, odihnă, recreere sau admirarea frumuseții care ne înconjoară. În acest sens, sunt dezvoltate diferite forme de turism care valorifică componentele atractive ale destinației satisfăcând diferite motivații turistice.

O formă de turism care pune în valoare componentele naturale reprezintă **ecoturismul**, care asigură valorificarea și utilizarea adecvată a resurselor turistice și păstrarea integrității ecologice a destinației. Practicarea ecoturismului impune protejarea zonelor sau resurselor turistice destinate studierii, admirației, recreării, refacerii potențialului fizic și psihic într-un mediu agreabil, nepoluat, cu priveliști reconfortante și nealterate.



Republica Moldova este bogată în resurse ce pot fi valorificate prin dezvoltarea turismului ecologic, deținând rezervații științifice, peisagistice, monumente botanice și parcuri naturale destinate menținerii echilibrului ecologic al țării. Unul dintre cele mai mari și peisagistice parcuri din țară, situat la circa 200 km de Chișinău, în centrul satului Țaul, raionul Dondușeni, este Parcul din Țaul, creat la începutul secolului XX, în jurul conacului familiei Pommer. Fiind cel mai mare din Moldova, cu suprafața de 46 ha, Parcul din Țaul are o mulțime impunătoare de alei, cărări și cărărușe a căror lungime este de peste 12,5 km. În parc sunt 128 de specii și 24 forme unicate de arbori și arbuști, reprezentând una dintre valoroasele comori dendrologice din partea de nord-est a țării. Intrarea este liberă pentru toți vizitatorii, de aceea parcul rămâne un loc preferat de către vizitatorii din diverse colțuri ale republicii și de peste hotarele ei, fiind deosebit de frumos primăvara, în perioada înfloririi, și toamna târziu. În acest sens, promovarea și dezvoltarea ecoturismului în cadrul ariilor naturale va permite valorificarea potențialului natural al țării și, totodată, conservarea acestuia.

O altă formă de turism bazat pe resursele naturale din teritoriu este **turismul grădinilor**, care presupune vizitarea grădinilor botanice sau a unor locuri celebre din perspectiva activității de grădinărit. Turiștii aferenți acestei forme se deplasează (individual sau în grupuri organizate) în țările deținătoare de astfel de resurse turistice. Totodată, turismul grădinilor se referă la activitatea de vizitare a unor parcuri celebre cu participarea la cursuri de peisagistică (ex.: Ikebama, Bonsai etc.). Turismul grădinilor, numit și peisajer, se bazează pe două resurse importante, respectiv: grădinile botanice existente în marile orașe, care reliefează cele mai reprezentative elemente floristice și vegetale existente la nivel mondial și parcurile prezente în orașe și în anumite localități rurale. Menționăm că, din punct de vedere financiar, importante sunt doar grădinile botanice, accesul în interiorul lor făcându-se pe baza unui bilet de intrare, în timp ce parcurile pot fi accesate gratuit de către orice vizitator. În acest sens, poate fi activ promovată Grădina Botanică din Chișinău, peisajul căreia reprezintă în miniatură relieful Republicii Moldova grație alternanței podișurilor cu depresiunile, lacurilor de acumulare și tipurilor de soluri, existând și specii rare din floră. Grădina este împărțită în mai multe sectoare – dendrariul (arbori, arbuști, liane), elemente ale florei din Moldovei (Codri), sectorul de floricultură, sectorul de plante tehnice, medicinale, alimentare și furajere, sectorul de hibridi, sectorul experimental, sectorul cu plante tropicale și subtropicale cu seră și miniexpoziții. În prezentul articol această formă a turismului este analizată pe baza evidențierii valențelor turistice ale principalelor monumente botanice și ale parcurilor naturale din Republica Moldova, respectiv Parcul din Ivancea, Parcul Lipcani, Parcul din Milești, Parcul lui Ștefan cel Mare de la Scuarul catedralei, Dendrariu, Parcul „Valea Morilor”, Parcul „Alunelul”, Parcul „La Izvor”, Parcul „Valea Trandafirilor” și alte parcuri, fiecare fiind reprezentativ și unic fie prin modul de amenajare, fie prin prezența speciilor rare și unicate, fie prin frumusețea peisajului. Parcul lui Ștefan cel Mare de la Scuarul catedralei este considerat cel mai bine îngrijit, fiind renovat de mai multe ori și reprezintă un monument de artă peisagistică din capitală, datând din sec. XIX. Pe când Parcul „La Izvor” este considerat unul dintre cele mai tinere parcuri din capitală, fiind fondat în 1972. În acest caz, avem oportunitatea de a include turismul cognitiv în cel ecologic, cu referință la acele activități de cunoaștere, care implică parcurgerea unui traseu cu vizitarea mai multor parcuri. Drept exemplu aducem traseele turistice ce presupun vizitarea tuturor parcurilor din capitală sau țara de referință, aceasta fiind la discreția turistului; astfel se satisface nevoia formativ-cognitivă a turistului. Totodată, grădinile botanice atrag, pe lângă turiștii autohtoni, și turiști străini, în timp ce parcurile sunt vizitate, aproape în totalitate, doar de către localnici, cu diferite motivații ale vizitei.

O altă formă de turism care valorifică resursele naturale ale țării reprezintă **turismul speologic**, care presupune vizitarea, cu ghid specializat, a peșterilor neamenajate. Peșterile vizitate au caracter sportiv (ex.: mers prin apă, cascade, probleme de orientare etc.) și sunt bogate în formațiuni de tip speleoteme (ex.: coloane, stalactite, stalagmite, draperii, tuburi de orgă, pisolite etc.). Turismul speologic urmărește explorarea în necunoscut, activitatea echipei în condiții imprevizibile și stresante, gestionarea lipsei de informații și identificarea soluțiilor, luarea deciziilor și managementul crizei, dominarea emoțiilor și adrenalină. În acest sens se promovează itinerar turistic spre Peștera Emil Racoviță, cea mai mare peșteră carstică din Republica Moldova, a 13-a ca lungime în Europa și a 26-a în lume. Este situată în apropierea localității Criva, raionul Briceni, și prin peșterile sale de ghips atrage turiști din întreaga lume. La ora actuală sunt cercetați cca 90 km de labirinturi și tuneluri, situate în 3 și 4 niveluri. Tunelurile se lărgesc pe alocuri, formând săli mari, cele mai remarcabile fiind „Sala celor o sută de metri”, „Sala așteptării” și „Soborul”. Încă una dintre caracteristicile inexplicabile ale peșterii Emil Racoviță constă în faptul că toate sălile și galeriile subterane sunt acoperite abundant cu un

strat de lut gingaș de cele mai diferite nuanțe: verde, albastru, roșu, negru, alb etc. Pe unele traseuri subterane speologii-amatori au confecționat niște figurine neobișnuite din lut, care servesc în același timp și drept indicatoare spre cele mai interesante săli și galerii. Vizitarea peșterii este posibilă în grupuri mici, însoțite de un ghid-speolog experimentat, fiecare participant fiind dotat cu echipament speologic necesar.

În vederea dezvoltării și promovării turismului în Republica Moldova urmează a fi elaborat un nou concept de produs turistic, care nu se limitează doar la promovarea resurselor din teritoriu, dar se axează pe o activitate motrice în cadrul destinației. Această activitate motrice poate lua mai multe forme: fie organizarea unui eveniment, fie participarea la un festival tematic sau organizarea unei expoziții tematice în aer liber, sau o altă idee bine concepută, care, fiind implementată corect, se va bucura de succes în rândul turiștilor. Apariția acestor produse este determinată de faptul că turistul modern nu mai vrea pur și simplu „să meargă undeva” sau „să vadă ceva”, dar dorește să dea un conținut vacanței sale, să-și îmbogățească experiența, să obțină amintiri și emoții.

În situația în care oferta turistică a destinației este relativ rigidă, combinația formelor de turism, precum și activitățile de animație (agrement, distracții, excursii etc.) pot fi îmbunătățite și adaptate la exigențele manifestate de turiști:

- Promovarea circuitelor cultural-recreative: manifestări cultural-artistice, sărbătorile naționale, hramul regiunii, excursii tematice cu valențe științifice sau istorice – toate pot acapara atenția unui număr sporit de turiști potențiali, care la moment sunt atrași de circuitele externe. În Republica Moldova, spre exemplu, cultura medievală a prins culoare prin organizarea în premieră absolută a Primului Festival Medieval la Complexul Etno-Cultural Vatra. Evenimentul s-a bucurat de un succes enorm, adunând zeci de mii de vizitatori în cele două zile ale evenimentului. Cluburi istorice din Europă au realizat spectacole teatralizate cu trubaduri, cavaleri și tabere medievale, au teatralizat cele mai aprige bătălii istorice, trageri cu arcul, dueluri cu săbii și au organizat o paradă de excepție [4].
- Conceperea unui nou produs turistic pe baza amplificării rolului educațional sau cognitiv (în funcție de motivația turistică, să se aleagă acele activități turistice care au tangență cu educația și dezvoltarea). Drept exemplu pentru țara noastră poate servi evenimentul organizat „Filmul în aer liber”, care promovează un concept popular peste hotare, destinat amatorilor de filme de calitate, dar fiind accesibil publicului larg. La Muzeul Național de Istorie a Moldovei au derulat diverse secvențe din filme sub genericul „Noaptea filmelor sub stele”.
- Amenajarea corespunzătoare în vederea valorificării prin turism intern a potențialului turistic natural cu valoare cognitivă (rezervații științifice, monumente ale naturii, parcuri etc.).

Diversificarea produselor turistice presupune asigurarea unor servicii de calitate prestate de un personal competent și calificat. În acest sens pot fi oferite mai multe produse turistice, care vor corespunde în cea mai mare măsură exigențelor și specificului mai multor segmente de turiști, cu scopul maximei valorificări a potențialului disponibil și al asigurării competitivității produsului turistic autohton. Satisfacerea nevoii în turism este însoțită de cumpărarea de bunuri și servicii, unele aflate în legătură directă cu produsul turistic, altele determinate de acesta. Mai mult, orice activitate motrice este sprijinită de servicii suplimentare și cu cât numărul acestora este mai mare, cu atât oferta de produse turistice este mai diversificată și flexibilă, ceea ce oferă cea mai mare parte de plusvaloare produsului turistic, în particular, și destinației turistice, în general. În acest sens, în calitate de servicii suplimentare, care să acopere o paletă largă a motivațiilor și preferințelor turistice, pot fi oferite: organizarea expozițiilor artizanale (cu vânzare), amenajarea muzeelor etnografice în aer liber, inițierea în meșteșuguri tradiționale (sculptură în lemn și piatră, țesătorie populară, confecții și cusături populare, ceramică, împletitul de lozie), excursii tematice, înscenări teatrale, cântece, dansuri, șezători, studierea îndeletnicirilor țărănești etc. De asemenea, în acest sens, este obligatoriu ca, alături de echipamentele permanente destinate satisfacerii nevoilor fundamentale de consum turistic, să existe și echipamente ocazionale folosite cu ocazia unor manifestări cu caracter artistic sau cultural, care să constituie elemente fundamentale de atracție.

În concluzie, putem afirma că dezvoltarea unei destinații depinde de principalele obiective atractive de care dispune, aceasta însemnând, totodată, un punct de atracție puternic pentru turiștii autohtoni și din toată lumea.

#### **Bibliografie:**

1. BRAN, F. *Ecoturism*. București: Editura Economică, 2000.

2. CAVCALIUC, I., MOLDOVAN-BATRÎNAC, V. *Marketingul turismului intern*. Chișinău: Crio SA, 2010.
3. NEACȘU, N. *Turismul și dezvoltarea durabilă*. București, 1999.
4. [www.vatrafest.com](http://www.vatrafest.com)

*Prezentat la 09.12.2015*

## FORMELE DE TURISM PRACTICATE ÎN CADRUL TURISMULUI NOMAD

Ina CAVCALIUC

Universitatea de Stat din Moldova

La nivel mondial există multe forme turistice, aferente turismului nomad, dezvoltate independent sau complementar care promovează toleranța și înțelegerea turistică. Aceste forme apar ca rezultat al individualizării serviciilor turistice, determinate atât de motivațiile, cât și de comportamentul diferit al turiștilor față de fiecare component al produsului turistic oferit. O asemenea individualizare devine tot mai obiectivă, reclamând eforturi considerabile de adaptare a ofertei turistice la cererea actuală și la cea potențială.

**Cuvinte-cheie:** *turism nomad, motivații turistice, tendințele pieței turistice, segment-țintă, turism de circumstanță, drumeții, pelerinaje, turism de vizitare, turism rătăcitor.*

### FORMS OF TOURISM IN THE NOMAD TOURISM

There are many forms of tourism related to grey nomad tourism, developed independently or complementary, in order to promote tourism tolerance and understanding. These forms appear as a result of personalization of tourism services, determined by different motivations and tourist behavior to each element of tourism product. Such individualization of tourism products is becoming more objective in order to adjust efforts of tourism supply to the potential demand.

**Keywords:** *tourism grey nomad (hobby-hobo), travel motivations, tourism market trends, target market, event tourism, hiking, pilgrimage, sightseeing tourism, vacilando.*

În sfera consumului de servicii, în general, și al celor turistice, în particular, segmentarea pieței este un instrument obligatoriu pentru atenuarea efectelor inseparabilității cererii turistice manifestate prin conflictele posibile dintre consumatorii cu diferite caractere și așteptări, care consumă concomitent servicii turistice similare. Actualmente, prestatorii de servicii turistice atribuie tipului comportamental o importanță mai mare decât criteriilor agregate de segmentare, deoarece, spre deosebire de segmentare, care este, de regulă, omogenă, tipul poate avea structură eterogenă, ceea ce simplifică alegerea segmentelor-țintă. Cererea turistică este generată de motivația turistică, care este subiectivă și orientează persoana spre realizarea unor acțiuni. Motivațiile consumatorului turistic sunt atât de individualizate, încât, practic, nu există doi turiști care să solicite un produs turistic similar, fiind necesare eforturi permanente de adaptare a ofertei pentru servicii turistice la tendințele pieței turistice.

Turismul hobby-hobo, cunoscut în statele occidentale ca turism nomad sau turism după bunul plac, presupune uitarea oricăror bariere și adoptarea unui stil de viață non-conformist, cel puțin pe durata vacanței cu amprente vagabondistice. Termenul *hobo* se referă, în principiu, la viața celor fără adăpost. Acești turiști preferă călătoriile cu rulota sau cazarea în aer liber. Chiar dacă își permit un alt gen de vacanță mai organizată și mult mai exclusivistă, preferă să-și ia rucsacul și să pornească în aventura vieții sale, să călătorească urcând dintr-un tren în altul (uneori chiar trenuri de marfă), fără să achite costurile biletului. Acest tip de turism implică o serie de activități, care pentru un turist avizat pot fi o adevărată experiență de viață, un stil de viață fără griji și stereotipuri, care este de cele mai multe ori abandonat după terminarea vacanței, turiștii întorcându-se la casele și la serviciile lor. În statele occidentale acest gen de turism mai poate lua forma turismului nomad. Prin caracteristica sa, turismul nomad presupune un grad înalt de mobilitate a turistului, implică imaginație și setea acută de cunoaștere. Astfel, criteriile definiției ale unui turist ce intenționează să practice turismul nomad sunt: stil de viață activ, nonconformism, curiozitate, acceptarea provocărilor.

Segmentul-țintă al turistului hobby-hobo este turistul cu vârsta între 20 și 70 de ani, deci de la tineret la pensionari, care călătorește în grupuri mici sau individual, vizitează tot, petrece vacanțe mai lungi decât ceilalți turiști, consumă produse locale, călătorește în orice perioadă a anului și explorează locuri care nu prezintă interes pentru alte persoane.

Turismul nomad deține atribute interesante și este caracterizat prin motivația de a evada din rutină și prin dorința permanentă de a explora, de a construi experiențe de viață sau de a beneficia de oportunități de învățare formale sau non-formale, în afara mediului obișnuit. Turismul nomad este bazat pe ideea, motivația și deplasarea pentru a descoperi locuri noi, culturi și oameni noi, bucătării noi, urmele unor civilizații dispărute, modele de viață, mentalități etc. implicând contacte cu aceste elemente.

Formele de turism ce pot fi practicate în cadrul turismului nomad sunt cele pe care le putem personaliza la un nivel înalt și cele ce se abat uneori de la regulă, fiind specifice prin caracteristica lor ori diferențiindu-se prin exclusivitate. În acest sens, turismul nomad poate căpăta diferite forme, precum: turismul de tranzit, turismul de vizitare, turismul vacilando, drumeții, turismul de aventură, de circumstanță, de pelerinaj, cultural, artistic, artizanal, deoarece este amator de experiențe.

Din motivul că turistul devine tot mai mobil, se tinde către un turism de vizitare, cuprinzând vizitarea într-o singură vacanță a mai multor localități sau țări. În cazul turismului internațional se desprinde și turismul de tranzit, legat de traversarea unor țări, cu oprire sau fără, pentru a ajunge la destinații concrete.

Turismul vacilando este considerat o formă a turismului de nișă, axată pe segmentul concret de consumatori turistici, în care procesul de deplasare este mult mai important decât destinația în sine. Segmentul-țintă reprezintă un tip special de turist rătăcitor, pentru care contează prioritar procesul de călătorie și secundar – destinația selectată.

Tot aici putem menționa și drumețiile, care de asemenea presupun mobilitate din partea turistului și care reprezintă o modalitate eficientă de a combina vizitarea mai multor atracții turistice cu mersul pe jos, în arii naturale, de multe ori în zone pitorești. Adesea oamenii fac astfel de drumeții pe trasee special concepute pentru acest gen de recreere, numite trasee de drumeție. Astfel, drumețiile montane sunt o atracție pentru turiștii studenți din România, care pot petrece până la 7 zile de drumeții prin munții Bucegi și Piatra Craiului, având la îndemână corturi, saci de dormit și mult entuziasm. Beneficiile diferitelor tipuri de drumeții asupra sănătății au fost confirmate în numeroase studii.

Turismul de aventură în niciun caz nu se include în forma sedentară; din contra, se bazează pe schimbarea continuă a destinației turistice: de la dormitul în peșteri, săritul cu paraplanda, excursii în zone neexploatate și nepoluate la practicarea drumețiilor în locuri greu accesibile, practicarea alpinismului sau scufundărilor. În acest sens, turismul de aventură implică explorarea unui loc mai puțin frecventat de către turiștii de masă, având un nivel de risc mediu, necesitând, în anumite cazuri, abilități speciale și o pregătire fizică bună. Una dintre caracteristicile de bază asociate turismului de aventură este „căutarea” intenționată a situațiilor de risc, care implică o doză de adrenalină datorită caracterului lor periculos, organizând astfel o vacanță în mod unic. Activitățile au loc în natură, principalele motivații (riscul, aventură) pot fi combinate cu distracția, natura și peisajul etc. Există o multitudine de sporturi de aventură și tot atât de multe posibilități de a le combina. Un exemplu autohton de itinerar de aventură ar include vizitarea peșterii Emil Racoviță, săritul în gol de pe clădirea din Ialoveni, vizitarea celui mai mare cimitir evreiesc din Vadul lui Rașcu. Un itinerar turistic de aventură conceput și promovat în România reprezintă rafting-ul pe râurile Bistrița, Mureș, Buzău, care presupun coborârea pe râuri repezi de munte cu bărci pneumatice în echipe de două sau mai multe persoane. În Brașov se practică raid-off-road, unde turiștii sunt conduși cu mașina de șoferi specializați pe drumuri și pante aparent inabordabile, locuri unde nicidecum nu te poți deplasa cu automobilul.

O altă formă practică în cadrul turismului nomad este turismul cognitiv, care se manifestă sub diverse aspecte, acestea fiind influențate de varietatea motivațiilor turistice și de interesul fiecărui turist în parte. În acest caz, dat fiind faptul că includem turismul cognitiv în cel nomad, trebuie să ne referim la acele activități de cunoaștere, care implică parcurgerea unui traseu cu vizitarea mai multor obiective sau destinații. Drept exemplu servesc traseele turistice ce presupun vizitarea tuturor universităților din Europa sau vizitarea doar universităților vechi din lume, aceasta fiind la discreția turistului; astfel, se satisface nevoia formativ-cognitivă sau de autorealizare a turistului. Un alt exemplu ar fi vizitarea parcurilor industriale, cum este cel din Turcia – Ostim sau din Elveția – CERN (Organizație Europeană pentru Cercetare Nucleară). Turul Europei ar fi și el un traseu de cunoaștere a culturii, societății și tradițiilor din cadrul fiecărei țări incluse în itinerar. Să zicem, luni suntem la Viena, marți la Bruxelles, miercuri admirăm Parisul, joi la Barcelona, vineri la Lisabona, sâmbătă potrivim ceasul în Elveția, iar duminică facem plajă în Italia. În aceste condiții, în vederea promovării turismului nomad și stimulării consumului turistic, căile ferate din Europa oferă abonamente forfetare la tren, în special pentru studenți, care doresc să călătorească oriunde în Europa, cheltuind sume mai modeste pe parcursul circuitului turistic.

O altă formă de turism cu tangențe evidente cu turismul nomad reprezintă pelerinajul, deoarece credințioșii urmează un traseu religios pe jos, fiind o deplasare fizică ca expresie a unei mișcări sufletești. Rutele pelerinilor clasici au fost stabilite încă din cele mai vechi timpuri: de la Karnak la Teba, în Egiptul Antic, de la



Efes la Bizanț și Delphi, plus, o dată la patru ani, în timpul Jocurilor Olimpice, până la templul lui Zeus din Olimpia, în Grecia Antică. Cu toate acestea, creștinismul a pus bazele adevăratului pelerinaj. Pelerinajul este, de regulă, o călătorie spirituală care implică ajungerea la locuri sacre, acestea fiind de cele mai multe ori temple sau locuri cu importanță mistică și religioasă. Azi exista câteva rute tradiționale de pelerinaj: măcar o dată în viață un musulman ar trebui să ajungă la Mecca și Medina, budiștii japonezi – la muntele Fuji, cei din India fac pelerinaje la sanctuarele indiene, o altă rută religioasă este cea care urmează pașii lui Buddha, catolicii merg cu miile pe El Camino sau la Santiago (în Spania) sau la Lourdes (în Franța), hindușii au Chardham-ul, iar evreii merg la Zidul Plângerii din Ierusalim. Fiecare dintre aceste trasee au particularitățile lor, însă toate au punctul comun al vacanței spirituale, rămânând experiențe de neuitat.

Tururile tematice de pelerinaj se extind spre diverse destinații turistice: de la pelerinajul muzical (exemplu la Graceland, pe urmele lui Elvis, sau la Abbey Road, pentru cercetarea istoriei trupei Beatles, sau croaziera Jazzului) până la pelerinajul care aduce literatura la viață. Astfel, locuri precum mausoleul lui Lenin din Piața Roșie din Moscova sau Piața Tienanmen din Beijing se transformă în motive de pelerinaj tematic.

Turismul genealogic este o formă a turismului cultural, având ca scop principal vizitarea unor locuri de origine, legate de istoricul familiei (identificarea arborelui genealogic), de strămoși și de evenimente din viața acestora. Această formă de turism apare ca consecință a procesului de globalizare; astfel, întâlnim persoane cu istorii de viață de invidiat (originar din Mexic, căsătorit în Ucraina, făcând studii superioare în Republica Moldova și, ulterior, stabilit în Canada, pentru o perioadă nedeterminată de timp...). De aici și apare necesitatea de a vizita și, uneori, de a cunoaște locuri de origine, rude îndepărtate etc.

Shopping-ul este acțiunea care ne dictează viața. Toată lumea face cumpărături și am ajuns să depindem foarte mult de acestea. Acest sector se îmbină în prezent cu turismul, rezultând o activitate cu forme multiple de manifestare. Shopping-ul este o activitate generalizată la nivel mondial. Principalele locații pentru turismul de shopping sunt situate în state precum China, Thailanda, Statele Unite ale Americii, Emiratele Arabe Unite, Malaysia etc.

Turismul cultural de asemenea îl putem include în formele de turism ce pot fi practicate în cadrul turismului nomad, doar că îi oferim caracteristica de continuă mobilitate a turistului. Astfel, participarea la evenimentul organizat anual „Nomad International Film Festival” poate fi o modalitate de satisfacere a nevoilor culturale, practicând, în același timp, turismul nomad. Festivalul în cauză presupune un traseu în cadrul a cinci orașe mari din două țări diferite. În general, evenimentele reprezintă una dintre cele mai importante elemente motivaționale ale activității turistice. În unele cazuri, turiștii sunt dispuși să străbată distanțe mari, doar să poată participa la un anumit eveniment. Atractivitatea evenimentelor constă în faptul că acestea nu sunt niciodată la fel și niciodată nu pot fi reproduse cu exactitate, din motivul variabilității serviciilor turistice. De asemenea, este necesară prezența persoanei pentru a se putea bucura pe deplin de experiență. Turismul de evenimente, numit și turismul de circumstanță, se bazează pe organizarea concertelor, carnavalurilor și paradelor, evenimentelor sportive, artistice, organizarea hramurilor localităților etc. O ramură distinctă a turismului cultural reprezintă turismul de patrimoniu (memorial-istoric), care presupune vizitarea teatrelor celebre, muzeelor și galeriilor de artă, atelierelor și studiourilor de artă; participarea la activități culturale, la festivaluri, concerte și expoziții de artă; vizitarea locurilor istorice (ex.: antice, medievale, destinații cu o istorie bogată, locuri industriale celebre, vechi canale, căi ferate, câmpuri de luptă etc.), astfel satisfăcându-se motivația culturală și estetică a turistului.

În concluzie, putem afirma că la nivel mondial există un număr mare de forme turistice, aferente turismului nomad, dezvoltate independent sau complementar, care generează, anual, indicatori importanți în ceea ce privește circulația turistică și nivelul încasărilor din turism, contribuind decisiv la dezvoltarea socioculturală și economică a țărilor de referință. Turismul nomad are vocația de a unii oamenii din culturi diferite, promovând astfel toleranța și înțelegerea reciprocă dintre oamenii din diferite culturi, religii și țări. Din punct de vedere sociocultural, turismul nomad ajută la înțelegerea propriei culturi, a culturilor străine și la dezvoltarea personală a călătorilor. Acești turiști aduc cu ei energie pozitivă și creativă și noutate locurilor pe care le vizitează, fiind dornici să cunoască, să înțeleagă și să ajute, dacă acest lucru este posibil. În acest sens, există premise reale pentru ca pe viitor să apară și să se dezvolte și celelalte forme ale turismului nomad, inexistente sau puțin reprezentative în prezent.



**Bibliografie:**

1. CAVCALIUC, I., MOLDOVAN-BATRÎNAC, V. *Marketingul turismului intern*. Chișinău: Crio SA, 2010.
2. SNAK, O., BARON, P., NEACSU, N. *Economia turismului*. București: Prouniversitaria, 2009.
3. NEACȘU, N. *Turismul și dezvoltarea durabilă*. București, 1999.
4. CRISTUREANU, C. *Strategii și tranzacții în turismul internațional*. București: C.H. Beck, 2006.
5. TOFFLER, A. *Consumatorii de cultură*. București, 1997.

*Prezentat la 04.11.2015*

## MANAGEMENTUL RISCURILOR ÎN CADRUL CONTRACTELOR DE OUTSOURCING

*Roman ZUBCO*

*Academia de Studii Economice din Moldova*

În articol sunt evidențiate trăsăturile specifice ale cadrului contractual al outsourcing-ului și măsurile de atenuare a riscurilor aferente. Autorul descrie efectele generate de transferul de active în cadrul externalizării proceselor de producere și argumentează atât laturile pozitive ale acestui fenomen, cât și constrângerile ce pot rezulta. De asemenea, sunt menționate elementele-cheie ale unui acord de outsourcing, care, în viziunea autorului, reprezintă precondițiile unui parteneriat de succes în domeniul externalizării business-proceselor.

**Cuvinte-cheie:** furnizor, acord de parteneriat, activități de externalizare, subcontractare, risc.

### THE RISK MANAGEMENT OF OUTSOURCING CONTRACTS

The article highlights the special features of the contractual framework of the outsourcing and measures to mitigate the risks. The author describes the effects generated by the transfer of assets within the outsourcing of production processes and argues both positive sides of this phenomenon and constraints that may result. Also in the article are mentioned the key elements of an outsourcing agreement which in the author's vision represents a successful partnership in the field of outsourcing business processes.

**Keywords:** supplier, partnership agreement, outsourcing, subcontracting, risk.

**Introducere.** Concurența, care în condițiile de constituire a economiei globale nu cunoaște hotare și devine atotcuprinzătoare și acerbă, incită ca întreprinderile să inoveze permanent în domeniul tehnologiilor, produsele, metodelor de fabricație, să reducă costurile, să gestioneze mai eficient resursele.

O componentă indispensabilă a activității fiecărei întreprinderi reprezintă cheltuielile legate nu doar de businessul de bază, ci și de gestiunea activelor ce nu țin de profilul companiei, dar sunt necesare pentru funcționarea normală a întreprinderii. Cu cât este mai mare acest sector, cu atât mai mari sunt cheltuielile, numărul de angajați și presiunea în legătură cu activitățile secundare. Eforturile menite să asigure calitatea înaltă a activelor ce nu țin de activitatea de bază sunt adesea exagerate. Apare obiectivul simplificării gestiunii întreprinderii și limitării diversității activelor. Și, ca urmare, un număr tot mai mare de întreprinderi utilizează outsourcing-ul, adică transmiterea activelor și proceselor interne în gestiunea sub-producătorilor sau întreprinderilor specializate [1, p.249].

**Material și metodă.** Pe de o parte, outsourcing-ul este o tranzacție definită ca rezultat al integrării unui ansamblu de servicii elementare, prin care unui prestator specializat i se încredințează o funcție a întreprinderii „client” sau o parte din aceasta, în cadrul unui contract multianual, fiind determinat nivelul și durata serviciului.

Pe e altă parte, outsourcing-ul este definit ca un proces prin care o întreprindere încredințează unui prestator exterior responsabilitatea gestiunii unui domeniu (sau unei funcții), pe care anterior o asuma în mod direct pe plan intern prin intermediul unei combinații specifice de resurse proprii. D.Zenkin consideră că dacă beneficiarul este în stare să-și presteze serviciul sau să-și producă bunul de sine stătător, dar totuși apelează din anumite motive la un terț – este vorba despre outsourcing. În cazul în care beneficiarul, din start, nu poate să-și satisfacă necesitățile de sine stătător, atunci vorbim despre achiziția de bunuri sau servicii [4, p.64-68].

În viziunea cercetătorului S.Serduni, conceptul de outsourcing se reduce la câteva principii de bază:

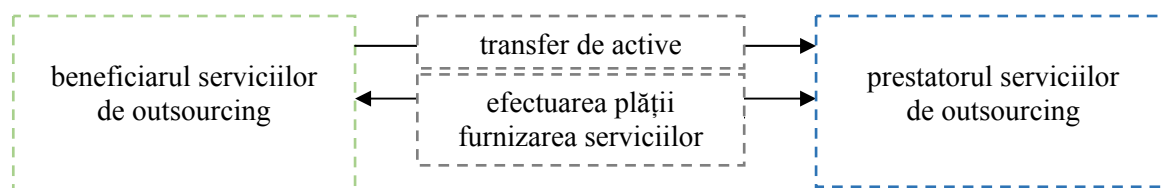
- 1) din moment ce una sau mai multe funcții ale companiei au fost externalizate, beneficiarul serviciilor de outsourcing nu mai trebuie să se implice în executarea lor sub nicio formă (cu excepția controlului calității), iar furnizorul serviciilor nu trebuie să intervină la etapele 'pre' sau 'post' mergătoare, fiecare trebuie să se concentreze exclusiv pe sarcinile sale;
- 2) sarcinile complementare trebuie încredințate celui care reușește să le facă cel mai bine;
- 3) externalizarea conduce la economia resurselor clientului și aduce venit executantului.

La sfârșitul secolului XX, în baza acestor principii, au început să se reorganizeze și să se creeze organizații, care cedau spre execuție companiilor de outsourcing toate sau, practic, toate funcțiile [2, p.113].

Activitatea de externalizare implică multe riscuri, precum selectarea unui furnizor nepotrivit, pierderea controlului asupra activității externalizate, riscul apariției unor costuri neprevăzute și, nu în ultimul rând, riscul legat de contractul de outsourcing.

Acordul de outsourcing trebuie abordat ca un parteneriat flexibil de lungă durată, succesul căruia depinde în mare măsură de existența unor reguli bine definite. Conținutul contractului de outsourcing poate oferi o bază puternică pentru un astfel de parteneriat, dar, în același timp, poate genera riscuri ambilor parteneri.

Structura contractului trebuie să fie determinată, în primul rând, de forma afacerii. Cea mai simplă structură a contractului presupune că există o singură companie care externalizează o funcție spre un singur furnizor. Pentru aceasta ar fi suficient un contract, dar, pentru comoditate, dispozițiile „one-off” în legătură cu transferul de active și persoane sunt, de obicei, divizate în acorduri/contracte diferite, așa cum este arătat în Figura 1.



**Fig.1.** Transferul de active și servicii în procesul de outsourcing.

Sursa: elaborată de autor în baza [3]

Prin dispoziția „one-off” se are în vedere că transferul de active și persoane are loc o singură dată, în timp ce serviciile și plățile au loc continuu pe durata contractului de outsourcing.

Ordonatorul în cadrul activității de outsourcing poate fi reprezentat de un grup de companii cu un set de contracte, care procură servicii în interesul acestui grup. Grupul poate să-și extindă activitatea într-un șir de țări. În plus, organizația de outsourcing poate achiziționa servicii pentru a satisface necesitățile clienților săi. De asemenea, furnizorul poate încheia contracte de prestare a serviciilor cu membrii din grupul său și concomitent cu subcontractanți din afara grupului. În final, acest grup ar putea forma și alte structuri, cum ar fi crearea unui joint-venture (întreprindere comună).

Joint-venture este un acord contractual prin care mai multe persoane convin să realizeze o activitate economică supusă unui control conjugat (concomitent). Controlul unei activități economice este conjugat atunci când el este exercitat, în mod colegial, în virtutea unui acord contractual. Niciunul dintre antreprenori nu este în măsură să controleze, în mod unilateral, activitatea întreprinderii de tip joint-venture. Un astfel de control nu poate să apară în societățile cu un acționar majoritar. Controlul conjugat nu presupune ca toate deciziile întreprinderii de tip joint-venture să fie luate în unanimitate de voturi. Acordul contractual poate să distingă decizii ce solicită aprobarea tuturor antreprenorilor și cele ce pot să fie luate cu o majoritate determinată [5].

Deoarece nu există un contract distinct pentru activitățile de externalizare, companiile utilizează o serie de contracte, care, ulterior, poartă denumirea „contracte de outsourcing”:

- *Contractul de subcontractare de servicii* este cel mai utilizat, deoarece subcontractarea este un contract prin care o parte își asumă, prin organizarea mijloacelor necesare și cu gestiunea propriului risc, efectuarea unei lucrări sau serviciu în schimbul unui corespondent în bani.
- *Contractele asociate* sunt utilizate atunci când externalizarea necesită efectuarea mai multor activități „legate” între ele. În acest caz întreprinderile client și furnizor pot stipula mai multe contracte asociate între ele. Fiecare contract are normele și efectele sale, însă ele nu sunt independente, nulitatea unui contract poate comporta abrogarea celorlalte.
- *Contractul mixt* presupune acumularea caracteristicilor diferitelor tipuri de contracte, fapt pentru care este mai dificil de stabilit normele de aplicare. În această situație, de obicei, se utilizează clauza „de absorbție” (fiind cea mai utilizată) prin norme contractuale prevalente. În alte cazuri poate fi utilizată și clauza „de combinare” a diferitelor normative, care să conducă către un contract unic.
- *Consortiul* reprezintă o „asociere de întreprinderi, în vederea cooperării pentru realizarea unor activități sau acțiuni determinate”. În această situație întreprinderile client sunt reunite într-un consorțiu, încredințând spre externalizare anumite activități către un furnizor. Alegerea acestui tip de contract este motivată de exigența de a controla mai bine furnizorul și de a garanta prestările necesare întreprinderilor din consorțiu [4].

Documentele care fac parte din acordul de outsourcing reflectă structura înțelegerii/afacerii. Există două contracte principale: acordul privind transferul de active și contractul privind furnizarea serviciilor de outsourcing.

Transferul activelor generează beneficii pentru ambele companii, atât pentru compania beneficiară, cât și pentru compania furnizoare de servicii. Din punctul de vedere al companiei care externalizează, aceasta devine capabilă să vândă anumite active la o valoare mult mai mare decât cea, pe care ar fi avut-o dacă ar vinde aceste active pe piață. Prin urmare, compania poate recupera anumite valori ale acestor active. Pe de altă parte, furnizorul serviciilor de outsourcing poate dobândi anumite active, pe care într-un mod normal nu le-ar fi putut obține. Însă, transmitând anumite active spre furnizor, compania devine vulnerabilă la amenințarea unor re-negocieri, deoarece furnizorul serviciilor de outsourcing și-ar putea suspenda prestațiile.

Contractul privind furnizarea serviciilor de outsourcing se încheie pentru parteneriatele de lungă durată. Din această cauză, el trebuie să realizeze următoarele sarcini:

- ✓ să definească serviciile furnizate și standardele cărora trebuie să corespundă;
- ✓ să descrie modul în care aceste servicii vor fi implementate;
- ✓ să definească cadrul de lucru în cazul schimbării serviciilor în timp;
- ✓ să prevadă partajarea riscurilor și recompensărilor;
- ✓ să stabilească o bază pentru soluționarea disputelor;
- ✓ să determine posesorul proprietății intelectuale create, ca parte a serviciilor furnizate;
- ✓ să ofere beneficiarului posibilitatea de a efectua verificări;
- ✓ să prevadă clauze clare și transparente privitor la rezilierea contractului atât din inițiativa beneficiarului, cât și a furnizorului de servicii de outsourcing.

Din punct de vedere structural, acordul de prestare a serviciilor constă din termeni, condiții și un plan, care conține detalii tehnice, comerciale și operaționale. Aceasta conferă o oarecare transparență contractului, dar și ajută procesului de negociere. Pericolul însă este că acest plan al prestării serviciilor este văzut ca un acord separat – o greșeală des încurajată de denumirea sa tipică – Service-Level Agreement (SLA). SLA trebuie privit ca parte integrală a documentației. Tipurile de risc, care sunt relevante pentru acordul de outsourcing, depind de natura serviciilor/produselor ce intră sub incidența acordului. Aceste riscuri sunt de obicei clasificate în:

- ✓ *Riscul financiar* se referă la posibilitatea pierderilor financiare.
- ✓ *Riscul sistemic* este riscul asociat proiectului în sine. Companiile mici și mijlocii nu sunt întotdeauna capabile să diversifice riscurile, de aceea, adesea, sunt motivate să apeleze la servicii de outsourcing, pentru a reduce riscurile asociate cu anumite proiecte.
- ✓ *Riscul tehnic* se referă la imposibilitatea creării unui sistem funcțional din punct de vedere tehnic. Utilizarea outsourcing-ului poate diminua riscul tehnic prin: a) furnizorul poate deține personal mai calificat, b) furnizorul deține experiență, el poate fi capabil să aplice o varietate de soluții tehnice, astfel ca dacă una din ele nu va funcționa, el va avea cel puțin încă o alternativă tehnologică. Totuși, riscul tehnologic nu poate fi eliminat complet, mai ales atunci când furnizorul trebuie să găsească soluții tehnologice de ultimă oră.

Printre alte riscuri ale externalizării serviciilor menționăm riscul de „învechire” a tehnologiilor, riscul de business și riscul de personal, care derivă din lipsa implicării adecvate în sarcinile primite sau lipsa remunerării relevante.

Durata contractului generează și ea unele riscuri. În linii generale, cu cât este mai mare durata contractului, cu atât este mai mare riscul că compania care externalizează să ajungă în impas, devenind vulnerabilă prin dependență. Principala explicație constă în faptul că existența unei asemenea amenințări, precum durata mare a contractului, poate discredita anumite obligațiuni reciproce, care sunt valoroase pentru ambele părți. O modalitate de diminuare a unui asemenea risc ar fi includerea în contract a clauzelor ce prevăd posibilitatea re-negocierii condițiilor de conlucrare în intervale de timp pe toată durata contractului. Cel mai mare dezavantaj al acestei modalități este faptul că flexibilitatea include costuri.

Stabilirea relațiilor de parteneriat între compania care externalizează și furnizor reduce necesitatea monitorizării detaliate a performanței furnizorului de outsourcing. Relațiile de lungă durată pot duce la încrederea între parteneri și la perceperea interesului comun. Pentru a facilita stabilirea intereselor comune și a unei mai bune înțelegeri, companiile care doresc să-și externalizeze serviciile deseori sunt în căutarea furnizorilor cu valori și cultură similară.

Totodată, este inevitabil faptul că vor exista dispute pe durata contractului. Procedurile de soluționare a disputelor sunt des analizate în detaliu în contractele de outsourcing.

Unul dintre mecanismele de soluționare a disputelor implică escaladarea procedurilor între diferiți reprezentanți ai părților. De exemplu, managerii responsabili de contractul în cauză pot fi cei care încearcă să rezolve problemele ce au apărut și, în cazul în care nu le reușește acest lucru, subiectul este transmis spre discuție și soluționare directorilor financiari sau chiar directorului executiv. Abordarea care justifică aceste proceduri este de a rezolva problemele la un nivel cât mai jos în cadrul organizațiilor, fără a căuta o soluție în afara prevederilor contractuale, cum ar fi, de exemplu, apelarea la instanța de judecată.

Însă, uneori, urmarea procedurilor de escaladare nu este cea mai bună soluție. Acesta este cazul în care neînțelegerile au pornit din cauza lipsei livrării serviciilor ce implică mari costuri pentru compania care și-a externalizat serviciile. Astfel, escaladarea poate să necesite prea mult timp. Pe de altă parte, există și pericolul unei reclame proaste, în cazul apelării directe la instanța de judecată. Mai mult, instanța de judecată implică și ea costuri și timp; iar în cazul în care disputa ține de domeniul tehnologic, judecătorul va trebui să angajeze un expert pentru înțelegerea disputei, ceea ce, la rândul său, iarăși lungeste timpul și din nou implică costuri.

O altă modalitate de rezolvare a disputelor ar fi un expert terț. Identitatea acestuia trebuie indicată în contract, astfel încât, la cerere, acesta ar putea lua o decizie pe baza informațiilor oferite de ambele părți. Acest expert de asemenea ar trebui să stabilească cine va suporta costurile procedurilor efectuate.

Arbitrajul este o altă metodă folosită în asemenea cazuri. Arbitrajul este o procedură care obligă la soluționarea disputei. Deciziile arbitralului nu pot fi contestate atâta timp cât nu s-a demonstrat că acesta a acționat neloial sau că decizia acestuia nu corespunde prevederilor legale.

Este important ca părțile să convină asupra metodelor de soluționare a posibilelor neînțelegeri care ar putea să apară în cadrul parteneriatului, asupra descrierii detaliate a transferului de active, duratei contractului și, nu în ultimul rând, asupra costurilor.

Un alt pericol al contractului de outsourcing sunt costurile „ascunse”. Compania care dorește să externalizeze anumite activități ar trebui să ia în considerare în primul rând costurile legate de încheierea contractului, precum negocierea și redactarea contractului. Unele companii încearcă să le reducă, minimizând activitățile de căutare a furnizorului potrivit. Însă, acest fapt, la rândul său, duce la încheierea unor contracte nefavorabile pentru respectivele companii care, ulterior, sunt nevoite să renegocieze contractul, cu noi costuri [3].

**Concluzii.** Pe plan mondial, întreprinderile tind să se axeze pe ceea ce este esențial în misiunea lor, pe ceea ce constituie „nucleul rigid al activităților lor”. Aceasta se justifică prin faptul că nicio întreprindere, indiferent de dimensiunile sale, nu poate să-și permită să consacre o parte semnificativă a mijloacelor sale unor sarcini operaționale curente care nu contribuie la avantajele sale concurențiale. Astfel, întreprinderile au început să externalizeze funcțiile de curățare, servicii generale, iar apoi funcții și mai importante, cum ar fi informatica, contabilitatea, finanțele, transportul, logistica, achizițiile. Negocierea și redactarea acordului de outsourcing bine puse la punct este o condiție esențială pentru un parteneriat de succes. De asemenea, este important de a fi abordate în contract toate situațiile sau rezultatele neplăcute ce pot să apară, modul în care disputele vor fi rezolvate și, nu în ultimul rând, asumarea riscurilor. În final, este important de a crea un parteneriat prin construirea unui cadru de lucru flexibil, decât prin limitare.

#### **Bibliografie:**

1. LOBANOV, N. *Tranzacțiile comerciale internaționale în condițiile de constituire a economiei globale postindustriale*. Chișinău, 2008.
2. ЗЕНКИН, Д. Аутсорсинг в сфере HR: Какой вариант выбрать? В: *Управление персоналом*, 2009, №12, с.64-68.
3. SERDUNI, S. Outsourcing – instrument de menținere și sporire a competitivității. În: *Politici economice de integrare europeană*. Chișinău, 2005, p.113-116.
4. ГОТТШАЛЬК, П., СОЛЛИ-СЕТЕР, Х. *ИТ-аутсорсинг – построение взаимовыгодных отношений*. Аудиокнига, 2007.
5. [http://www.contabilizat.ro/dictionar\\_economic\\_si\\_financiar~termen-joint\\_venture.html](http://www.contabilizat.ro/dictionar_economic_si_financiar~termen-joint_venture.html) (Accesat: 13.11.2013)
6. КОТЛЯРОВ, И. Современные формы аутсорсинга управления брэндом и сбытом. В: *Практический маркетинг*, 2010, №8 (162), с.12-16.

*Prezentat la 25.11.2015*