Universitatea de Stat din Tiraspol

ISSN 2537-6284

ACTA
ET
COMMENTATIONES

Ştiinţe Naturale şi Exacte

REVISTĂ ŞTIINŢIFICĂ

Nr. 2(4), 2017

Chişinău 2017

Fondator: **UNIVERSITATEA DE STAT DIN TIRASPOL, cu sediul la CHIȘINĂU**

Adresa redacției: str. Gh. Iablocikin, 5 Tel. (373) 22 754924
Mun. Chişinău, MD2069, Republica Moldova (373) 22 244085
e-mail: reviste@ust.md Fax: (373) 22 754924

Tiparul: Tipografia Universității de Stat din Tiraspol, 100 ex.

ISSN 2537-6284

CUPRINS

PICARD ORBITS OF LIPSCHITZIAN TYPE MAPPINGS AND THEIR ACCUMULATION POINTS ON DISTANCE SPACES

Vasile BERINDE[1], prof. PhD

Mitrofan M. CHOBAN[2], academician, full prof.

[1]Technical University of Cluj-Napoca, North University Center at Baia Mare, Romania

[2]Tiraspol State University, Republic of Moldova

Abstract. We give a new example which illustrates the fact that some Picard orbits may have n distinct accumulation points, where n is a given natural number.

Keywords: distance space, N-distance space, F-distance space, H-distance space, quasi-metric space, contraction mapping, fixed point.

ORBITELE PICARD ALE APLICAŢIILOR DE TIP LIPSCHITZIAN ŞI PUNCTELE LOR DE ACUMULARE PE SPAŢII CU DISTANŢĂ

Rezumat. Construim un nou exemplu care ilustrează faptul că unele orbite Picard pot avea n puncte de acumulare distincte, unde n este un numar natural dat.

Cuvinte cheie: Spaţiu cu distanţă, spaţiu cu N-distanţă, spaţiu cu F-distanţă, spaţiu cu H-distanţă, spaţiu quasimetric, contracţie, punct fix.

1. Preliminaries

In [2] the authors proposed the following two problems.

Problem 1. *Let $g : X \longrightarrow X$ be a contraction of a complete quasimetric sace (X, d). Is it true that g have fixed points?*

Problem 2. *Let $g : X \longrightarrow X$ be a contraction of a complete F-symmetric sace (X, d). Is it true that g have fixed points?*

These two problems were solved in [8]. Our aim in the present paper is to present an example that illuminates the results in [2] and [8] to some extent. Distinct variants of the fixed point problem in general distance spaces were examined in [1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 15] and other articles.

Throughout the paper, by a space we understand a topological T_0-space, and we use the terminology from [9, 10, 14].

Let X be a non-empty set and $d : X \times X \to \mathbb{R}$ be a mapping such that for all $x, y \in X$ we have:

(i_m) $d(x, y) \geq 0$;

(ii_m) $d(x, y) + d(y, x) = 0$ if and only if $x = y$.

Then (X, d) is called a *distance space* and d is called a *distance* on X.

Let d be distance on X and let $B(x, d, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ be the *ball* with the center x and radius $r > 0$. The set $U \subset X$ is called *d-open* if for any $x \in U$ there exists $r > 0$ such that $B(x, d, r) \subset U$. The family $\mathcal{T}(d)$ of all d-open subsets is the topology on X generated by d. The space $(X, \mathcal{T}(d))$ is a T_0-space.

A distance space is a *sequential space*, i.e., a set $B \subseteq X$ is closed if and only if for any sequence $\{x_n\}$ in B, all limits of $\{x_n\}$ are in B [9].

Let (X, d) be a distance space, $\{x_n : n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}\}$ be a sequence in X and $x \in X$. We say that the sequence $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$:

1) is *convergent* to x if and only if $\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$. We denote this by $x_n \to x$ or $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

2) is *Cauchy* or fundamental if $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$.

We say that a distance space (X, d) is *complete* if every Cauchy sequence in X converges to some point in X.

Let d be a distance on X such that for all $x, y \in X$ we have:

(iii_m) $d(x, y) = d(y, x)$.

Then (X, d) is called a *symmetric space* and d is called a *symmetric* on X.

Let d be a distance on X such that for all $x, y, z \in X$ we have:

(iv_m) $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$.

Then (X, d) is called a *quasimetric space* and d is called a *quasimetric* on X.

A distance d on a set X is called a *metric* if it is simultaneously a symmetric and a quasimetric.

2. Conditions of existence of fixed points

Let X be a non-empty set and $d(x, y)$ be a distance on X with the following property:

(N) for each point $x \in X$ and any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$ such that from $d(x, y) \le \delta$ and $d(y, z) \le \delta$ it follows $d(x, z) \le \varepsilon$.

Then (X, d) is called an *N-distance space* and d is called an *N-distance* on X. If d is a symmetric, then we say that d is an D-symmetric (see [11, 12, 13, 16, 17]).

If d satisfy the condition

(F) for any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ such that from $d(x, y) \le \delta$ and $d(y, z) \le \delta$ it follows $d(x, z) \le \varepsilon$,

then d is called an *F-distance* or a *Fréchet distance* and (X, d) is called an *F-distance space* (see [3, 11]).

Remark. Any F-distance is an N-distance.

A distance space (X, d) is called an *H-distance space* if for any two distinct points $x, y \in X$ there exists $\delta = \delta(x, y) > 0$ such that $d(x, z) +$ $d(y, z) \ge \delta$ for each point $z \in X$, i.e., $B(x, d, \delta) \cap B(y, d, \delta) = \varnothing$.

Remark. Any N-symmetric is an H-distance.

A space (X, d) is a H-distance space if and only if any convergent sequence has a unique limit point (see [11], Theorem 3).

Consider the mapping $\varphi : X \longrightarrow X$. and let $\varphi^1 = \varphi$ and $\varphi^{n+1} = \varphi \circ \varphi^n$ for each $n \in \mathbb{N}$ $= \{1, 2, ...\}$ be its iterates. If $x \in X$, then put $x_0 = x$ and consider $x_n = \varphi^n(x_0)$, for every $n \in \mathbb{N}$. The set $O(x, \varphi) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ is called the Picard orbit of the point x.

In the paper [8] the following assertions were established.

Theorem 2.1. Let d be an N-distance and an H-distance on a space X and let $\varphi : X \longrightarrow X$ be a mapping with the following properties:

(i) the mapping φ is continuous or there exists a number $\lambda > 0$ such that $d(\varphi(x), \varphi(y)) \le \lambda \cdot d(x, y)$ for all points $x, y \in X$;

(ii) for some point $e \in X$ the Picard orbit $O(e, \varphi) = \{e_n = \varphi^n(e) : n \in \mathbb{N}\}$ has an accumulation point and $\lim_{n\to\infty} d(e_n, e_{n+1}) = 0$.

Then:

1. The mapping φ has fixed points. Any accumulation point of the orbit $O(e, \varphi)$ is a fixed point of φ.

2. The orbit of the point e has not periodic points.

3. If $\lim_{n\to\infty} d(g^n(y), g^{n+1}(y)) = 0$, for each point $y \in X$, then any periodic point of the mapping φ is a fixed point of φ.

4. The space $(X, \mathcal{T}(d))$ is first-countable and Hausdorff.

Corrolary 2.2. Let d be a quasimetric and an H-distance on a space X and let $\varphi : X \longrightarrow X$ be a mapping with properties:

(i) the mapping φ is continuous or there exists a number $\lambda > 0$ such that $d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y)$ for all points $x, y \in X$;

(ii) for some point $e \in X$ the Picard orbit $O(e, \varphi) = \{e_n = \varphi^n(e) : n \in \mathbb{N}\}$ has an accumulation point and $\lim_{n\to\infty} d(e_n, e_{n+1}) = 0$ and $\lim_{n\to\infty} d(e_n, e_{n+1}) = 0$.

Then:

1. The mapping φ has fixed points. Any accumulation point of the orbit $O(e, \varphi)$ is a fixed point of φ.

2. The orbit of the point e has no periodic points.

3. If $\lim_{n\to\infty} d(g^n(y), g^{n+1}(y)) = 0$ for each point $y \in X$, then any periodic point of the mapping φ is a fixed point of φ.

4. The space $(X, \mathcal{T}(d))$ is first-countable and Hausdorff.

Corrolary 2.3. Let d be a complete quasimetric and an H-distance on a space X and $\varphi : X \longrightarrow X$ be a mapping with properties:

(i) the mapping φ is continuous or there exists a number $\lambda > 0$ such that $d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y)$ for all points $x, y \in X$;

(ii) for each point $x \in X$ and the Picard orbit $O(x, \varphi) = \{x_n = \varphi^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ there exists a non-negative number $\mu(x) < 1$ such that $d(\varphi(x_n), \varphi(x_m)) \leq \mu(x) \cdot d(x_n, x_m)$ for all $n, m \in \mathbb{N}$.

Then:

1.The mapping φ has fixed points.

2.Any periodic point of the mapping φ is a fixed point of φ.

3.Any Picard orbit is a Cauchy convergent sequence to some fixed point of the mapping φ.

4.The space $(X, \mathcal{T}(d))$ is first-countable and Hausdorff.

Remark. The condition that d is an H-distance on X is essential (see [8]).

In connection with the above results it is important to answer the following question.

Problem 3. *Let (X, d) be a complete quasimetric space, where d is an H-quasimetric, $a \in X$ and let $g : X \longrightarrow X$ be a mapping such that $d(g^n(a), g^{n+1}(a)) > d(g^{n+1}(a), g^{n+2}(a))$ and $\lim_{n\to\infty} d(g^n(a), g^{n+1}(a)) = 0$.*

How many accumulations points does have the orbit of g at the point a?

In [8] it was constructed an example to answer Problem 3, where the orbit of g at the point a has two accumulation points.

The main aim of the next section is to show, by virtue of an appropriate example, that the orbit of a point may have actually m distinct accumulation points, where m is a given natural number.

3. An example of a Picard orbit possessing $m \geq 2$ accumulation points

Example 3.1. Let $m \geq 2$ and consider a set $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ with m distinct points. Assume that $B \cap \mathbb{N} = \varnothing$ and let $X = \mathbb{N} \cup B$. In $\mathbb{N}$ consider a sequence $\{i_{(n,1)}, i_{(n,2)}, ..., i_{(n,m)}, i_{(n,m+1)} : n \in \mathbb{N}\}$ such that:

(i) $4 = i_{(1,1)} < ... < i_{(1,m+1)} < i_{(2,1)} < ... < i_{(n-1,m+1)} < i_{(n,1)} < i_{(n,2)} < ... < i_{(n,m)} < i_{(n,m+1)} < i_{(n+1,1)} < ...$;

(ii) $\Sigma\{m^{-1} : m \in \mathbb{N}, i_{(n,i)} \leq m < i_{(n,i+1)}\} < 2$, $\Sigma\{m^{-1} : m \in \mathbb{N}, i_{(n,i)} \leq m \leq i_{(n,i+1)}\} \geq 2$ for each $n \in \mathbb{N}$ and $i \leq m$;

(iii) $\Sigma\{m^{-1} : m \in \mathbb{N}, i_{(n,m+1)} \leq m < i_{(n+1,1)}\} < 2$, $\Sigma\{m^{-1} : m \in \mathbb{N}, i_{(n,m+1)} \leq m \leq i_{(n+1,1)}\} \geq 2$, for each $n \in \mathbb{N}$.

Since $0 \notin \mathbb{N}$ and we need the numbers $i_{(n-1,m+1)}$ and $i_{(n,0)}$ for each $n \in \mathbb{N}$, it is convenient to put $i_{(0,m+1)} = 1$ and $i_{(n,0)} = i_{(n-1,m+1)}$.

Consider on $\mathbb{N}$ the function $f(n) = \Sigma\{m^{-1} : m \in \mathbb{N}, m \leq n\}$. The sets $I_{(n,i)} = \{k \in \mathbb{N} : i_{(n,i)} \leq k \leq i_{(n,i+1)}\}$, $I_{(n,m+1)} = \{k \in \mathbb{N} : i_{(n,m+1)} \leq k \leq i_{(n+1,1)}\}$ are called the m-intervals of integers of the rank n.

Now we construct on X the distance d with the conditions:

(C1) $d(x,x) = 0$ for each $x \in X$;

(C2) $d(b_i, b_j) = 1$ for all distinct $i, j \in \{1, 2, ..., m\}$;

(C3) $d(n, b_i) = 1$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $i \in \{1, 2, ..., m\}$;

(C4) $d(n,m) = \min\{1, |f(n) - f(m)|\}$, for all $n, m \in \mathbb{N}$;

(C5) If $y, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m$, $x = b_i$ and $i_{(n-1,m+1)} \leq y \leq i_{(n,m+1)}$, then $d(x,y) = d(b_i, y)$ $= (i_{(n,i)})^{-1} + |f(y) - f(i_{(n,i)})|$.

By construction, $0 \leq d(x,y) \leq 1$, for all $x, y \in X$. Moreover, if $x, y \in \mathbb{N} \subset X$ and $d(x,y) < 1$, then we have three possibilities:

(i) There exists $n = n(x,y) \in \mathbb{N}$ such that $x, y \in [i_{(n-1,m+1)}, i_{(n,2)}]$;

(ii) There exists $n = n(x,y) \in \mathbb{N}$ such that $x, y \in [i_{(n,m)}, i_{(n+1,1)}]$;

(iii) There exists $n = n(x,y) \in \mathbb{N}$ and $i \leq m$ such that $i \geq 2$ and $x, y \in [i_{(n,i-1)}, i_{(n,i+1)}]$.

In the above cases, x, y are numbers belonging to an m-interval or to the union of two adjacent m-intervals.

We put $\varphi(b_i) = b_i$, for each $i \leq m$ and $\varphi(n) = n + 1$, for each $n \in \mathbb{N}$. By construction, $Fix\,(\varphi) = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$. We prove the following claims.

Property 1. (X,d) *is a complete distance space.*

Proof. The space (X,d) has no non-trivial Cauchy sequences, i.e., if $\{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$ is a Cauchy sequence, then there exists $k \in \mathbb{N}$ such that $x_k = x_n$ for all $n \geq k$ and $\lim_{n\to\infty} x_n = x_k$.

Property 2. (X,d) *is a quasimetric space.*

Proof. Fix three distinct points $x, y, z \in X$.

Case 1. $x, y, z \in \mathbb{N}$.

On $\mathbb{N}$ the distance d is a metric. Hence $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Case 2. $x, y, z \in B$.

On M the distance d is a discrete metric. Hence $1 = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = 2$.

Case 3. $x, y \in B$ and $z \in \mathbb{N}$.

In this case $d(x, z) \leq 1 = d(x, y) < d(x, y) + d(y, z)$.

Case 4. $x, z \in B$ and $y \in \mathbb{N}$.

In this case $d(x, z) \leq 1 = d(y, z) < d(x, y) + d(y, z)$.

Case 5. $y, z \in B$ and $x \in \mathbb{N}$.

In this case $d(x, z) \leq 1 = d(y, z) < d(x, y) + d(y, z) = 2$.

Case 6. $y \in B$ and $x, z \in \mathbb{N}$.

In this case $d(x, z) \leq 1 = d(x, y) < d(x, y) + d(y, z)$.

Case 7. $z \in B$ and $x, y \in \mathbb{N}$.

In this case $d(x, z) = 1 = d(y, z) < d(x, y) + d(y, z)$.

For $x \in B$ and $y, z \in \mathbb{N}$ we consider the following cases.

Case 8. $x \in B$, $y, z \in \mathbb{N}$ and $d(y, z) = 1$.

In this case $d(x, z) \leq 1$, $d(x, y) \leq 1$ and $d(x, z) < d(x, y) + d(y, z)$.

Case 9. $x = b_i \in B$, $y, z \in \mathbb{N}$, $d(y, z) < 1$, $n \in \mathbb{N}$ and $y, z \in [i_{(n-1,m+1)}, \leq i_{(n,m+1)}]$.

In this case $d(x, z) = d(b_i, z) = min\{1, (i_{(n,1)})^{-1} + |f(z) - f(i_{(n,i)})|\} = .\ min\{1, (i_{(n,1)})^{-1} + |(f(z) - f(y)) + (f(y) - f(i_{(n,i)}))|\} \leq min\{1, (i_{(n,1)})^{-1} + |f(z) - f(y)| + |f(y) - f(i_{(n,i)})|\} \leq min\{1, (i_{(n,1)})^{-1} + |f(y) - f(i_{(n,i)})|\} + |f(z) - f(y)| = d(x, y) + d(y, z)$.

Property 3. *The mapping φ has the following properties:*

1) $d(\varphi(x), \varphi(y)) < 2d(x, y)$, for all distinct points $x, y \in X$;

2) if $x, y \in X$ and $d(x, y) = 1$, then $d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq d(x, y)$;

3) if $x, y \in \mathbb{N}$ and $x \neq y$, then $d(\varphi(x), \varphi(y)) < d(x, y)$;

4) φ is a continuous mapping.

Proof. Let $x, y \in X$ and $x \neq y$.

If $d(x, y) = 1$, then $d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq 1 = d(x, y)$. Assertion 2 is proved.

Assume that $d(x, y) < 1$. We have the following two cases:

Case 1. $x, y \in \mathbb{N}$.

Assume that $x < y$. In this case $d(\varphi(x), \varphi(y)) = \Sigma\{m^{-1} : x + 1 < m \leq y + 1\}$ ¡ $\Sigma\{m^{-1} : x < m \leq y\} \leq d(x, y)$. Moreover, $d(x, y) - d(\varphi(x), \varphi(y)) = |(x + 1)^{-1} - (y + 1)^{-1}|$. Assertion 3 is proved.

Case 2. $x \in B$ *and* $y \in \mathbb{N}$.

Let $x = b_i$, $1 \leq i \leq m$. In this case there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $i_{(n-1,m+1)} \leq y \leq i_{(n,m+1)}$ and $d(x, y) = d(b_i, y) = (i_{(n,1)})^{-1} + |f(y) - f(i_{(n,i)})|$.

If $y < i_{(n,i)}$, then $d(\varphi(x), \varphi(y)) = (i_{(n,1)})^{-1} + f(i_{(n,i)}) - f(y+1)$ ¡ $(i_{(n,1)})^{-1} + f(i_{(n,i)}) - f(y)$ $= d(x, y)$.

If $y \geq i_{(n,i)}$, then $d(\varphi(x), \varphi(y)) = i_{(n,1)})^{-1} + f(y + 1) - f(i_{(n,i)} = i_{(n,1)})^{-1} + f(y) - f(i_{(n,i)}) + (y + 1)^{-1} = d(x, y) + (y + 1)^{-1}$. Since $(y + 1)^{-1} < (i_{(n,i)})^{-1} \leq d(x, y)$, we have $d(\varphi(x), \varphi(y)) < 2d(x, y)$. Assertion 1 is proved. Assertion 4 follows from Assertion 1.

Property 4. *If $x \in X$, then* $\lim_{n\to\infty} d(\varphi^n(x), \varphi^{n+1}(x)) = 0$.

Proof. If $x \in B$, then $\varphi(x) = x$ and the assertion is proved. If $x \in \mathbb{N}$, then $d(\varphi^n(x), \varphi^{n+1}(x)) = \Sigma\{z^{-1} : z \leq x+n+1\} - \Sigma\{z^{-1} : z \leq x+n\} = (x+n+1)^{-1}$. Hence $\lim_{n\to\infty} d(\varphi^n(x), \varphi^{n+1}(x)) = \lim_{n\to\infty} (x+n+1)^{-1} = 0$.

Property 5. *The space $(X, \mathcal{T}(d))$ is complete metrizable.*

Proof. If $x \in \mathbb{N}$, then $N_n x = \{x\}$ for each $n \in \mathbb{N}$. If $x = b_i \in B$ and $n \in \mathbb{N}$, then $N_n x = \{x\} \cup \{y \in N : d(x,y) < 2^{-n}\}$. For any $\leq i < j \leq m$ we have $N_1 b_i \cap N_1 b_j = \varnothing$. Then $\mathcal{B} = \{N_n x : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ is a base of open-and-closed subsets of the space $(X, \mathcal{T}(d))$. The proof is complete.

Property 6. *If $x \in \mathbb{N} \subset X$, then $O(x, \varphi) = \{n \in \mathbb{N} : x \leq n\}$. Moreover, if $x, y \in \mathbb{N} \subset X$ and $x < y$, then $O(y, \varphi) \subset O(x, \varphi) \subset O(1, \varphi)$.*

Property 7. *Let $i \leq m$. Then* $\lim_{n\to\infty} d(b_i, i_{(n,i)}) = \lim_{n\to\infty} (i_{(n,i)})^{-1} = 0$.

Property 8. *The space $(X, T(d))$ is not locally compact.*

Proof. Fix $i \leq m$. Assume that U is an open neighbourhood of the point b_i in X. There exists $k \in \mathbb{N}$ such that $\{x \in X : d(b_i, x) < 2k^{-1}\} \subset U$. For each $n \geq k$, fix $x_n \in I_{(n,i)}$ such that $k^{-1} \leq d(i_{(n,i)}, x_n) < 2k^{-1}$. Then $\{x_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}, n \geq k\}$ is a closed discrete sequence of the space $(X, \mathcal{T}(d))$ such that $x_n \in U$ and $x_n < x_{n+1}$ for each $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$.

Property 9. *All points $x \in B$ are points of accumulation of the Picard orbit $O(n, \varphi)$, $n \in \mathbb{N}$.*

Property 10. *The Picard orbit $O(x, \varphi)$ is not convergent in (X, d), for any $x \in \mathbb{N}$.*

Bibliography

1. Berinde V. and Choban M. Remarks on some completeness conditions involved in several common fixed point theorems. Creat. Math. Inform. 19, no. 1, 2010. p. 1–10.
2. Berinde V. and Choban M. Generalized distances and their associate metrics. Impact on fixed point theory. Creat. Math. Inform. 22, no. 1, 2013. p. 23–32.
3. Chittenden E. W. On the equivalence of écart and voisinage. Trans. Amer. Math. Soc. 18, 1917. p. 161–166.
4. Choban M. Fixed points for mappings defined on pseudometric spaces. Creat. Math. Inform. 22, no. 2, 2013. p. 173–184.
5. Choban M. Selections and fixed points theorems for mapping defined on convex spaces. ROMAI J. 10, no. 2, 2014. p. 11–44.
6. Choban M. Fixed points for mappings defined on generalized gauge spaces. Carpathian J. Math. 31, no. 3, 2015. p. 313–324.
7. Choban M. Fixed points of mappings defined on spaces with distance. Carpathian J. Math. 32, no. 2, 2016. p. 173–188.
8. Choban M. and Berinde V. Two open problems in the fixed point theory of contractive type mappings on quasimetric spaces. Carpathian J. Math. 33, No. 2, 2017. p. 169–180.
9. Engelking R. General Topology. PWN, Warszawa, 1977.
10. Granas A. and Dugundji J. Fixed Point Theory. Berlin: Springer, 2003.

11. Nedev S. Y. O-metrizable spaces. (Russian) Trudy Moskov. Mat. Ob-va 24, 1971. p. 201–236. (English translation: Trans. Moscow Math. Soc. 24, 1974. p. 213–247).
12. Niemytzki V. On the third axiom of metric spaces. Trans Amer. Math. Soc. 29, 1927. p. 507–513.
13. Niemytzki V. Über die Axiome des metrischen Raumes. Math. Ann. 104, 1931. p. 666–671.
14. Rus I. A., Petruşel A. and Petruşel G. Fixed Point Theory. Cluj-Napoca: Cluj University Press, 2008.
15. Shrivastava R., Ansari Z. K. and Sharma M. Some results on fixed points in dislocated quasi-metric spaces. J. Adv. Stud. Topol. 3, no. 1, 2012. p. 25–31.
16. Wilson W. A. On semi-metric spaces. Amer. J. Math. 53, no. 2, 1931. p. 361–373.
17. Wilson W.A. On quasi-metric spaces. Amer J. Math. 53, no. 6, 1931. p. 675–684.

SOUSCATÉGORIES $\mathcal{L}$-SEMI-REFLEXIVES

Dumitru BOTNARU, prof. univ., dr. hab.
Universitatea de Stat din Tiraspol

Résumé. Dans la catégorie des espaces localement convexes, on démontre que, si $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ est une paire de souscatégories conjuguées, alors les latices $\mathbb{R}(\mathcal{K})$, $\mathbb{R}(\mathcal{L})$ et $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ sont isomorphes, où $\mathbb{R}(\mathcal{K})$ et $\mathbb{R}(\mathcal{L})$ sont les classes des souscatégories reflectives des catégories $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$, et $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ est la classe des souscatégories $\mathcal{L}$-semi-reflexives.

Mots clés: souscatégories reflectives, coreflectives, $\mathcal{L}$-semi-reflexives, espaces semi-reflexifs, inductif semi-reflectif.

SUBCATEGORIILE $\mathcal{L}$-SEMI-REFLEXIVE

Rezumat. În categoria spaţiilor local convexe, s-a demonstrat că, dacă $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ este o pereche de subcategorii conjugate, atunci laticele $\mathbb{R}(\mathcal{K})$, $\mathbb{R}(\mathcal{L})$ şi $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ sunt isomorfe, unde $\mathbb{R}(\mathcal{K})$ şi $\mathbb{R}(\mathcal{L})$ sunt clase de subcategorii reflective de categorii $\mathcal{K}$ şi $\mathcal{L}$, şi $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ este clasa de subcategorii $\mathcal{L}$-semi-reflexive.

Cuvinte cheie: subcategorii reflective, coreflective, $\mathcal{L}$-semi-reflexive, spaţii semi-reflexive, inductiv semi-reflectiv.

200 Mathematics subject classification: 46 M 15; 18 B 30.

1. Introduction

Notons avec $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ la catégorie des espaces localement convexes topologiques vectoriels Hausdorff (voir [14, 20, 21]).

Dans cet article on va définir plusieurs notions. Nous utiliserons les notations suivantes.

Structures de factorisation:

$(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$ = (la classe des épimorphismes, la classe des noyaux) = (la classe des morphismes à image dense, les inclusions topologiques à image fermée);

$(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ = (la classe des épimorphismes universels, la classe des monomorphismes précis)=(la classe des morphismes surjectifs, la classe des inclusions topologiques);

$(\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u)$ = (la classe des épimorphismes précis, la classe des monomorphismes universels) (voir [4, 6]);

$(\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono)$ =(la classe des conoyaux, la classe des monomorphismes)=(la classe des morphismes factoriels, la classe des morphismes injectifs).

Souscatégories coreflectives et reflectives:

Σ = la souscatégorie coreflective des espaces avec la plus fine topologie localement convexe [20];

$\widetilde{\mathcal{M}}$ = la souscatégorie coreflective des espaces avec la topologie Mackey [20];

$\mathcal{S}$ = la souscatégorie reflective des espaces avec la topologie faible [20];

Π = la souscatégorie reflective des espaces complets avec la topologie faible [14];

$u\mathcal{N}$ = la souscatégorie reflective des espaces ultranucléaires [8, 15];

$\mathcal{N}$ = la souscatégorie reflective des espaces nucléaires [16];

$\mathcal{S}h$ = la souscatégorie reflective des espaces Schwartz [14];

$i\mathcal{R}$ = la souscatégorie reflective des espaces inductifs semi-reflexifs [2];

$s\mathcal{R}$ = la souscatégorie reflective des espaces semi-reflexifs [14, 21];

Γ_0 = la souscatégorie reflective des espaces complets;

$l\Gamma_0$ = la souscatégorie reflective des espaces localement complets [19,24];

$p\Gamma_0$ = la souscatégorie reflective des espaces p-complets [12];

$q\Gamma_0$ = la souscatégorie reflective des espaces quasicomplets [21].

$\mathbb{K}$ la classe des souscatégories coreflectives non nulles;

$\mathbb{R}$ la classe des souscatégories reflectives non nulles;

$\mathbb{R}(\mathcal{A})$ la classe des souscatégories reflectives de la catégorie $\mathcal{A}$, où $\mathcal{A} \in \mathbb{K}$, ou $\mathcal{A} \in \mathbb{R}$;

$\mathbb{K}(\mathcal{A})$ la classe des souscatégories coreflectives de la catégorie $\mathcal{A}$;

$\mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$ la classe des souscatégories reflectives qui sont fermée par rapport aux $\mathcal{B}$-sousobjects et $\mathcal{B}$-facteurobjects (voir [5]), où $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$;

$\mathbb{K}(\mathcal{B})$ (respectivement $\mathbb{R}(\mathcal{B})$) la classe des souscatégories $\mathcal{B}$-coreflectives (respectivement $\mathcal{B}$-reflectives);

$\mathbb{R}_{ex}$ (respectivement $\mathbb{R}_{ex}(\mathcal{E}_u)$) la classe des souscatégories reflectives (respectivement $\mathcal{E}_u$-reflectives) fermée par rapport aux extensions: $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p)$-facteurobjets.

1.1. Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux classes de morphismes. Alors:

1. $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \{a \cdot b | a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ et la composition $a \cdot b$ existe$\}$.

2. La classe $\mathcal{A}$ se nomme $\mathcal{B}$-héréditaire, si du fait que $f \cdot g \in \mathcal{A}$ et $f \in \mathcal{B}$, il résulte que $g \in \mathcal{A}$.

2^0. La classe $\mathcal{A}$ se nomme $\mathcal{B}$-cohéréditaire, si du fait que $f \cdot g \in \mathcal{A}$ et $f \in \mathcal{B}$, il résulte que $f \in \mathcal{A}$.

3. $\mathcal{A}^\top$ est la classe de tous les morphismes orthogonaux du dessus pour tout morphisme de $\mathcal{A}$, et $\mathcal{A}^{\urcorner} = \mathcal{A}^\top \cap \mathcal{E}pi$ (voir [1,4,6]).

3^0. $\mathcal{A}^\perp$ est la classe de tous les morphismes orthogonaux du bas pour tout morphisme de $\mathcal{A}$, et $\mathcal{A}^{\llcorner} = \mathcal{A}^\top \cap \mathcal{M}ono$.

4. La classe $\mathcal{A}$ se nomme stable à gauche, si pour tout carré cartésien

$$f \cdot g' = g \cdot f'$$

du fait que $f \in \mathcal{A}$, il résulte que $f' \in \mathcal{A}$ aussi.

4^0. La classe stable à droite.

Dans la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, les classes $\mathcal{E}_f$ et $\mathcal{E}_u$ sont stables à gauche, et les classes $\mathcal{M}_f$ et $\mathcal{M}_p$ et $\mathcal{M}_u$ sont stables à droite (voir [4]).

1.2. Pour $\mathcal{M}$ une classe de monomorphismes, et $\mathcal{A}$ une classe d'objets (une souscatégorie), notons par $\mathbf{S}_\mathcal{M}(\mathcal{A})$ la souscatégorie pleine de tous les $\mathcal{M}$-sousobjets des objets de $\mathcal{A}$.

Notation duale: $\mathbf{Q}_\mathcal{E}(\mathcal{A})$, où $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}pi$.

1.3. Couples de souscatégories conjuguées, souscatégories c-coreflective et c-reflective (voir [3]).

Soit $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ et $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ un foncteur coreflecteur et un foncteur reflecteur.

Notons $\mu\mathcal{K} = \{m \in \mathcal{M}ono|\ k(m) \in \mathcal{I}so\}$, $\varepsilon\mathcal{L} = \{e \in \mathcal{E}pi|\ l(e) \in \mathcal{I}so\}$.

Sot $b : X \to Y$, $Z \in |\mathcal{K}|$ et $r^X : X \to rX$ $\mathcal{R}$-replique de X. $b \in \varepsilon\mathcal{R}$, alors et seulement alors quand $b \in \mathcal{E}pi$ et

$$t^X = f \cdot b \tag{1}$$

pour un f (voir [4]).

Mentionons, si $b : X \to Y \in \mu\mathcal{K}$, $Z \in |\mathcal{K}|$, alors pour tout $f : Z \to Y$ a lieu

$$f = f \cdot b \tag{2}$$

pour un f (voir [4]).

Définition (voir [3,4]). Soit $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ se nomme un couple de souscatégories conjuguées de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, si $\mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$.

Soit $\mathbb{P}_c$ la classe des couples des souscatégories conjuguées. Chaque componente d'un couple de souscatégories conjuguées est unique déterminée. Si $(\mathcal{K}_1, \mathcal{L}_1)$ et $(\mathcal{K}_2, \mathcal{L}_2)$ appartiennent à la classe $\mathbb{P}_c$, alors

$$\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \Leftrightarrow \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2.$$

$(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{S})$ est le plus petit élément, et $(\mathcal{C}_2\mathcal{V}, \mathcal{C}_2\mathcal{V})$ le plus grand élément de la classe $\mathbb{P}_c$.

Si $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, alors $\mathcal{K}$ se nomme la souscatégorie c-coreflective, et $\mathcal{L}$ - la souscatégorie c-reflective. Soit $\mathbb{K}_c$ (respectivement $\mathbb{R}_c$) la classe des souscatégories c-coreflectives (respectivement souscatégories c-reflectives), et $\mathcal{B}ic = \{\varepsilon\mathcal{L} | \mathcal{L} \in \mathbb{R}_c\}$.

1.4. THÉORÈME ([4]). *Soit $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ un foncteur reflecteur. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

1. $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$.
2. *$\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ et le foncteur l est exactement à gauche.*
3. *$\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ et $l(\mathcal{M}_f) \subset \mathcal{M}_f$.*
4. *$\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ et $l(\mathcal{M}_p) \subset \mathcal{M}_p$.*
5. *La classe $\varepsilon\mathcal{L}$ est stable à gauche.*
6. *Le foncteur l admet un adjoint à gauche.*
7. *Il existe un foncteur coreflecteur $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ ainsi que:*

a) $l \cdot k \sim l$; b) $k \cdot l \sim k$.

1.5. La souscatégorie $\mathcal{S}h$ des espaces Schwartz (voir [14]) et la souscatégorie $u\mathcal{N}$ des espaces ultranucléaires (voir [8,15]) sont des souscatégories c-reflectives (voir [8]).

1.6. Pour $\mathcal{A}$ une classe d'objets injectifs ($\mathcal{M}_p$-injectifs), la souscatégorie $\mathbf{S}_{\mathcal{M}_p}(\mathcal{A})$ est c-reflective (voir [4]). Ces souscatégories forment une classe propre de souscatégories (voir [4]).

1.7. THÉORÈME ([4]). *1. Soit $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$. Alors $((\mathcal{M}_p \circ (\mu\mathcal{K}))^\urcorner, \mathcal{M}_p \circ (\mu\mathcal{K}))$ et $((\mathcal{M}_f \circ (\mu\mathcal{K}))^\urcorner, \mathcal{M}_f \circ (\mu\mathcal{K}))$ sont des structures de factorisation qu'on peut noter $(\mathcal{E}'(\mathcal{K}), \mathcal{M}'(\mathcal{K}))$ et $(\overline{\mathcal{E}}(\mathcal{K}), \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{K}))$.*

2. Le morphisme $p : X \to Y$ appartient à la classe $\mathcal{E}'(\mathcal{K})$ (respectivement: à la classe $\overline{\mathcal{E}}(\mathcal{K})$), alors et seulement alors quand $p \in \mathcal{E}_u$ (respectivement: $p \in \mathcal{E}pi$) et le carré

$$p \cdot k^X = k^Y \cdot k(p), \tag{1}$$

est cocartésien.

3. Le morphisme $p : X \to Y$ appartient à la classe $\mathcal{E}_p$, alors et seulement alors quand $p \in \mathcal{E}_u$ et le carré

$$p \cdot m^X = m^Y \cdot m(p), \tag{2}$$

est cocartésien, où $m : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \widetilde{\mathcal{M}}$ est le foncteur coreflecteur.

4. $\mathcal{M}_u = \mathcal{M}_p \circ (\varepsilon\mathcal{S}) = \mathcal{M}_p \circ (\mu\widetilde{\mathcal{M}})$.

5. Soit $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Alors $((\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_p, ((\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_p)^{\llcorner})$ est une structure de factorisation que l'on va noter $(\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$.

6. Le morphisme $m : X \to Y$ appartient à la classe $\mathcal{I}''(\mathcal{R})$, alors et seulement alors quand $m \in \mathcal{M}_u$ et le carré

$$r(m) \cdot r^X = r^Y \cdot m, \tag{3}$$

est cartésien.

7. Soit $\mathcal{K} \in \mathbb{K}_c$, et $\mathcal{B} = \mu\mathcal{K}$. Alors $((\mathcal{M}_f \circ \mathcal{B})^{\urcorner}, \mathcal{M}_f \circ \mathcal{B})$ et $((\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})^{\urcorner}, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})$ sont des structures de factorisation avec les classes d'injections stables à droite.

8. $\mathbb{R}_c \subset \mathbb{R}_{ex}(\mathcal{E}_u)$.

1.8. THÉORÈME. *1. Pour toute souscatégorie $\mathcal{R}$ $\mathcal{E}_u$-reflective ($\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$) existe la plus grande souscatégorie c-reflective $c\mathcal{R}$ qui se contient en $\mathcal{R}$.*

2. La souscatégorie des espaces ultranucléaires $u\mathcal{N}$ est la plus grande souscatégorie c-reflective qui se contient dans la souscatégorie des espaces nucléaires $\mathcal{N}$.□

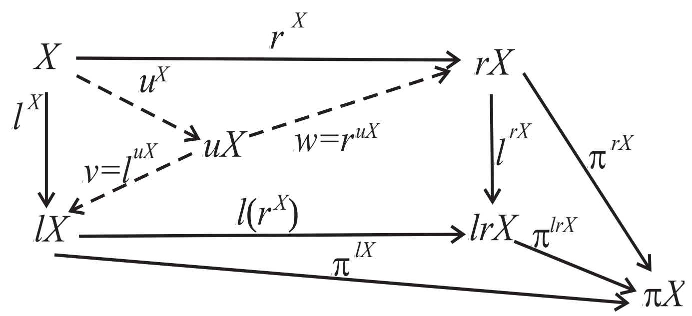
1.9. *Le suprême de deux souscatégories reflectives de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.*

Soit $\mathcal{L}$, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$, et $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$. Examinons $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ et Π-répliques de l'objet X: $l^X : X \to lX$, $r^X : X \to rX$ et $\pi^X : X \to \pi X$. Aussi, soit $l^{rX} : rX \to lrX$ $\mathcal{L}$-réplique de rX. Alors

$$l^{rX} \cdot r^X = l(r^X) \cdot l^X \tag{1}$$

Π-répliques des objets lX, rX, et lrX nous permettent d'écrire les égalités suivantes:

$$\pi^{lX} = \pi^{lrX} \cdot l(r^X), \tag{2}$$



$$\pi^{rX} = \pi^{lrX} \cdot l^{rX}. \tag{3}$$

Soit

$$l(r^X) \cdot v = l^{rX} \cdot w \tag{4}$$

le carré cartésien construit sur les morphismes $l(r^X)$ et l^{rX}. Alors

$$l^X = v \cdot u^X, \tag{5}$$

$$r^X = w \cdot u^X, \tag{6}$$

pour un u^X. Puisque $l^{rX} \in \mathcal{M}_u$, il résulte aussi que $v \in \mathcal{M}_u$. En tenant compte que la classe $\mathcal{P}''(\mathcal{L})$ est $\mathcal{M}_u$-héréditaire de l'égalité (5), on déduit que $u^X \in \mathcal{P}''(\mathcal{L})$. Alors v est $\mathcal{L}$-réplique de uX: $v = l^{uX}$, et w est $\mathcal{R}$-réplique de uX: $w = r^{uX}$. On vérifie facilement que le caré

$$\pi^{lX} \cdot v = \pi^{rX} \cdot w \tag{7}$$

est cartésien. Ainsi $v \in \mathcal{I}''(\mathcal{R})$, $w \in \mathcal{I}''(\mathcal{L})$, et $u^X \in \mathcal{P}''(\mathcal{L}) \cap \mathcal{P}''(\mathcal{R})$. L'égalité (6) est $(\mathcal{P}''(\mathcal{L}), \mathcal{I}''(\mathcal{L}))$-factorisation, et l'égalité (5) est $(\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$-factorisation des morphismes respectifs.

On a $\pi^{lX} \in \mathcal{I}''(\mathcal{L})$, $l^{uX} \in \mathcal{I}''(\mathcal{R})$, donc $\pi^{lX} \cdot l^{uX} \in \mathcal{I}''(\mathcal{L}) \circ \mathcal{I}''(\mathcal{R}) \subset (\mathcal{P}''(\mathcal{L}) \cap \mathcal{P}''(\mathcal{R}))^{\llcorner}$. Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) = (\mathcal{P}''(\mathcal{L}) \cap \mathcal{P}''(\mathcal{R}), (\mathcal{P}''(\mathcal{L}) \cap \mathcal{P}''(\mathcal{R}))^{\llcorner})$. Alors

$$\pi^X = (\pi^{lX} \cdot l^{uX}) \cdot u^X \tag{8}$$

est $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-factorisation du morphisme π^X, et la souscatégorie $\mathcal{U} = \mathbf{S}_{\mathcal{I}}(\Pi)$ est $\mathcal{P}$-reflective et $u^X : X \to uX$ est $\mathcal{U}$-réplique de X. De l'égalité $\mathcal{P} = \mathcal{P}''(\mathcal{U})$, c'est-à-dire $\mathcal{P}''(\mathcal{L}) \cap \mathcal{P}''(\mathcal{R}) = \mathcal{P}''(\mathcal{U})$, il résulte que $\mathcal{U}$ est le suprême des souscatégories $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$: $\mathcal{U} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$.

On a démontré le résultat suivant.

THÉORÈME. *Soit* $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$ *et* $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) = (\mathcal{P}''(\mathcal{L}) \cap \mathcal{P}''(\mathcal{R}), (\mathcal{P}''(\mathcal{L}) \cap \mathcal{P}''(\mathcal{R}))^{\llcorner})$. *Alors*

1. La souscatégorie $\mathcal{U} = \mathbf{S}_{\mathcal{I}}(\Pi)$ *est le suprême des éléments* $\mathcal{L}$ *et* $\mathcal{R}$ *dans la latice* $\mathbb{R}$*:* $\mathcal{U} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$.

2. $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) = (\mathcal{P}''(\mathcal{U}), \mathcal{I}''(\mathcal{U}))$.

3. $u^X : X \to uX$ *est* $\mathcal{U}$*-réplique de l'objet* X.

Les résultats principaux de l'ouvrage

Dans le paragraphe deux, on introduit la notation de souscatégories $\mathcal{L}$-semi-reflexives (*Définition* 2.6), on indique les conditions nécessaires et suffisantes pour que le produit semi-reflexif nous mène à sa souscatégorie semi-reflexive donnée (THÉORÈME 2.8). Les THÉORÈMES 2.10 et 2.11 permettent de construire des exemples des souscatégories semi-reflexives.

Dans le paragraphe trois on démontre que les latices $\mathbb{R}(\mathcal{K})$, $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ et $\mathbb{R}(\mathcal{L})$ sont isomorphes si $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ est une paire de souscatégories conjuguées (THÉORÈME 3.1) et sa duale (THÉORÈME 3.2).

Dans le paragraphe quatre, si $\mathcal{T}$, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{H}$ sont trois éléments qui correspondent dans le THÉORÈME 3.1, alors conformément à un élément de ce trois, on construit les autres répliques de tout objet.

Dans le paragraphe cing, on démontre que si $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$ et $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$, alors les foncteurs $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ et $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ commutent: $k \cdot r = r \cdot k$ (THÉORÈME 5.2).

Si de plus $r(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$, alors les foncteurs $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ et r commutent: $l \cdot r = r \cdot l$ (THÉORÈME 5.3).

Toutes les conditions énumérées plus haut sont vraies dans les cas suivants:

a) $(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{S}) \in \mathbb{P}_c$ et $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$ (COROLLAIRE 5.5 p.2);

b) $(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{S}) \in \mathbb{P}_c$ et $s\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$ (PROPOSITION 6.2 p.5-6);

c) $(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{S}) \in \mathbb{P}_c$ et $l\Gamma_0 \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$ (PROPOSITION 6.3 p.5-6);

d) $(\mathcal{C}h, \mathcal{S}h) \in \mathbb{P}_c$ et $i\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S}h)$ (PROPOSITION 6.4).

2. Souscatégories semi-reflexives

Les souscatégories semi-reflexives et leurs diverses propriétés ont été étudiées dans les ouvrages [5, 7, 9-12, 17, 18, 22, 23].

Dans l'ouvrage [19], le professeur D. Raïkov a examiné des topologies localement convexes sur les espaces vectoriels de $\mathcal{L}(X,Y)$ et $Z \otimes X$ de manière que l'isomorphisme algébrique

$$\mathcal{L}(\mathcal{Z}, \mathcal{L}(X,Y)) \to \mathcal{L}(\mathcal{Z} \otimes X, Y)$$

devienne isomorphisme de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ (la loi exponentielle). Se rapportant aux souscatégories semi-reflexives, M. M. Bouneaev a examiné autant la loi exponentielle [9] et les problèmes du graphe fermé [10, 11].

2.1. *Définition* [5]. Soit $\mathcal{A}$ une souscatégorie et $\mathcal{L}$ une souscatégorie reflective de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. L'objet X se nomme $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$-semi-reflexif, si sa $\mathcal{L}$-réplique appartient à la souscatégorie $\mathcal{A}$. La souscatégorie pleine de tous les objets $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$-semi-reflexifs se nomme produit semi-reflexif des souscatégories $\mathcal{L}$ et $\mathcal{A}$, notée

$$\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}.$$

2.2. Mentionnons les propriétés suivantes du produit semi-reflexif (voir [5]).

THÉORÈME 1. $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A} = \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{L} \cap \mathcal{A})$.

2. *Si* $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, *alors* $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}_2$.

3. *Si* $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$, *alors* $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

4. *Si* $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$, *alors* $\mathcal{A} \subset \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}$.

5. *La souscatégorie* $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}$ *est fermée par rapport aux produits.*

6. *Soit* $\mathcal{L}$ *et* Γ *deux souscatégories reflectives,* $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ *et* $\Gamma_0 \subset \Gamma$. *Alors* $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \subset \Gamma$.

7. *Soit* $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ *une structure de factorisation dans la catégorie* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, $\mathcal{A}$ *une souscatégorie* $\mathcal{E}$*-reflective et le foncteur reflecteur* $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ *possède la propriéte* $l(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. *Alors le produit semireflexif* $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}$ *est une souscatécorie reflective de la catégorie* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

2.3. PROPOSITION. *Le produit semi-reflexif* $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}$ *est fermé par rapport à* $(\varepsilon\mathcal{L})$*-sousobjets et* $(\varepsilon\mathcal{L})$*-facteurobjets.*

Démonstration. Soit $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}$, $A \in |\mathcal{R}|$, $b : X \to A \in \varepsilon\mathcal{L}$, et $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-réplique de A. Alors $l^A \cdot b$ est $\mathcal{L}$-réplique de A. Donc $lX \in |\mathcal{A}|$, et $X \in |\mathcal{R}|$.

Vérifions que $\mathcal{R}$ est fermée par rapport à $(\varepsilon\mathcal{L})$-facteurobjets. Soit $A \in |\mathcal{R}|$, $t : A \to Y \in \varepsilon\mathcal{L}$, et $l^Y : Y \to lY$ $\mathcal{L}$-réplique de Y. Alors $l^Y \cdot t$ est $\mathcal{L}$-réplique de Y. Donc $lY \in |\mathcal{A}|$ et $Y \in |\mathcal{R}|$.$\square$

2.4. PROPOSITION. *Soit* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$, *et* $\mathcal{A}$ *une souscatégorie de la catégorie* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. *Alors* $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A} = \mathbf{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{A})$.

Démonstration. Soit $X \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}|$, et $l^X : X \to lX$ $\mathcal{L}$-réplique de X. Alors $lX \in |\mathcal{A}|$, c'est-à-dire $lX \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{A}|$, et $l^X \in \varepsilon\mathcal{L}$. Donc $X \in \mathbf{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}|\mathcal{L} \cap \mathcal{A}|$.

Maintenant soit que $X \in |\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{A})|$. Alors il existe un objet $Z \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{A}|$ et un morphisme $b : X \to Z \in \varepsilon\mathcal{L}$. Il est clair que b est $\mathcal{L}$-réplique de X et $lX = Z \in |\mathcal{A}|$. Donc $X \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}|$.$\square$

2.5. COROLLAIRE [5]. *Soit $\mathcal{L}$ une souscatégorie c-reflective, et $\mathcal{A}$ une souscatégorie reflective de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Alors $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}$ est une souscatégorie reflective de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.*

Démonstration. Vraiment, $((\varepsilon\mathcal{L})^\top, \varepsilon\mathcal{L})$ est une structure de factorisation à gauche, et $\mathcal{L} \cap \mathcal{A}$ est une souscatégorie reflective de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Si $t^X : X \to tX$ est $(\mathcal{L} \cap \mathcal{A})$-réplique de X, et

$$t^X = i^X \cdot p^X \tag{1}$$

est $((\varepsilon\mathcal{L})^\top, \varepsilon\mathcal{L})$-factorisation de t^X, alors p^X est $(\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A})$-réplique de X.

Vraiment, $tX \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{A}|$, $\mathcal{L} \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{L} *_{sr} A$ et $i^X \in \varepsilon\mathcal{L}$. Donc $pX \in |\mathcal{L} *_{sr} A|$. Soit $Z \in |\mathcal{L} *_{sr} A|$ et $f : X \to Z$. Si $l^Z : Z \to lZ$ est $\mathcal{L}$-réplique de Z, alors $lZ \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{A}|$. Ainsi

$$l^Z \cdot f = g \cdot t^X, \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "t^X"] \arrow[dr, dashed, "p^X"] \arrow[ddr, "f"'] & & tX \arrow[d, dashed, "g"] \\
& pX \arrow[ur, dashed, "i^X"] \arrow[d, dashed, "h"] & lZ \\
& Z \arrow[ur, "l^Z"] &
\end{tikzcd}$$

pour un g. L'égalité (2) peut être écrit

$$(g \cdot i^X) \cdot p^X = l^Z \cdot f, \tag{3}$$

où $p^X \in (\varepsilon\mathcal{L})^\top$, et $l^Z \in \varepsilon\mathcal{L}$. Donc $p^X \perp l^Z$. Alors

$$f = h \cdot p^X, \tag{4}$$

$$(g \cdot i^X) = l^Z \cdot h, \tag{5}$$

pour un h. Ainsi f s'exteint par p^X. $t^X \in \mathcal{E}pi$ et $i^X \in \mathcal{M}_u$. Comme la classe $\mathcal{E}pi$ est $\mathcal{M}_u$-hérédidaire, de légalité (1) résulte que $p^X \in \mathcal{E}pi$.$\square$

2.6. *Définition.* Soit $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ deux souscatégories reflectives de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. $\mathcal{R}$ se nomme une souscatégorie $\mathcal{L}$-semi-reflexive, si elle est fermée par rapport à $(\varepsilon\mathcal{L})$-sousobjets et $(\varepsilon\mathcal{L})$-facteurobjets. La classe de toutes les souscatégories $\mathcal{L}$-semi-reflexives est notée $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

2.7. *Exemple.* 1. Soit $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$. Alors $\varepsilon\mathcal{L}_2 \subset \varepsilon\mathcal{L}_1$, et $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}_1) \subset \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}_2)$.

2. $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{C}_2\mathcal{V}) = \mathbb{R}$.

3. Soit $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$. Alors $\Pi \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

4. Si $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A} \in \mathbb{R}$, alors $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

5. Si $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$, alors $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}$.

2.8. THÉORÈME. *Soit $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$, et $\mathcal{H} \in \mathbb{R}$. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes:*

1. $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H} = \mathcal{R}$.

2. $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L} \cap \mathcal{H}$.

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$. $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{H}$. Vraiment, soit $A \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$. Alors $lA = A \in |\mathcal{R}|$. Donc $lA \in |\mathcal{H}|$ c'est-à-dire $A \in |\mathcal{H}|$. Donc $A \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{H}|$.

$\mathcal{L} \cap \mathcal{H} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$. Soit $A \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{H}|$. Alors $A \in |\mathcal{R}|$, c'est-à-dire $A \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$.

$2 \Rightarrow 1$. $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$. Soit $A \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}|$, et $l^A : A \to lA$ est $\mathcal{L}$-réplique de A. Alors $lA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{H}| = |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$. Donc $lA \in |\mathcal{R}|$ et comme $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$, il résulte que $A \in |\mathcal{R}|$.

$\mathcal{R} \subset \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}$. Soit $A \in |\mathcal{R}|$, et $l^A : A \to lA$ est $\mathcal{L}$-réplique de A. Comme $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$, il résulte que $lA \in |\mathcal{R}|$. $lA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}| = |\mathcal{L} \cap \mathcal{H}|$ c'est-à-dire $A \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}|$.$\square$

2.9. COROLLAIRE. *Soit $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

1. $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$.

2. *Soit $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}$. Alors $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L} \cap \mathcal{H} \subset \mathcal{H}$.*

3. *Soit $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}$, $\mathcal{T} \in \mathbb{R}$, et $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{H}$. Alors $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{T}$.*

2.10. THÉORÈME. *Soit $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$ et $\mathcal{B} \subset \varepsilon\mathcal{R}$. Alors $\mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{R})$.*

Démonstration. Soit $r^X : X \to rX$ est $\mathcal{R}$-réplique de l'objet X, et

$$r^X = b^X \cdot t^X, \tag{1}$$

la $(\mathcal{B}^\top, \mathcal{B})$-factorisation de r^X. Comme la classe $\mathcal{E}pi$ est $\mathcal{M}_u$-héréditaire ([4], LEMME 2.6), il résulte que $t^X \in \mathcal{E}pi$ et t^X est $\mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$-réplique du X.

Vérifions que $\mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$ est fermé par rapport aux $\mathcal{B}$-facteurobjets. Soit $A \in |\mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})|$ et $b : A \longrightarrow X \in \mathcal{B}$. Si r^A est $\mathcal{R}$-réplique de l'objet A, alors $b \in \mathcal{B} \subset \varepsilon\mathcal{R}$ et

$$r^A = f \cdot b, \tag{2}$$

pour un f. Comme $A \in |\mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})|$, il résulte que $r^A \in \mathcal{B}$. Donc $f \in \mathcal{B}$ aussi.

Mentionnons que la condition $\mathcal{B} \subset \varepsilon\mathcal{R}$ est équivalente avec la condition $\mathcal{R} \subset \lambda(\mathcal{B})$.$\square$

2.11. THÉORÈME. *Soit $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$ et $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\mathcal{B})$. Alors $\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$.*

Démonstration. Tout foncteur reflecteur de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ commute avec les produits ([5], THÉORÈME 1.12), et la classe $\mathcal{B}$ est fermée par rapport aux produits. Donc $\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$ est fermée par rapport aux produits.

Démontrons que $\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$ est fermé par rapport aux $\mathcal{M}_f$-sousobjets. Soit $A \in |\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})|$, et $m : X \to A \in \mathcal{M}_f$. Il existe un objet $Z \in |\mathcal{R}|$ et un morphisme $b : Z \longrightarrow A \in \mathcal{B}$. Soit

$$m \cdot b' = b \cdot m', \tag{1}$$

le carré cartésien construit sur les morphismes m et b, où $m' : P \longrightarrow Z$. Alors $m' \in \mathcal{M}_f$, et $b' \in \mathcal{B}$. Donc $P \in |\mathcal{R}|$, et $X \in |\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})|$.

Vérifions que $\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$ est fermé par rapport aux $\mathcal{B}$-sousobjets. Soit $A \in |\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})|$, et $b : X \to A \in \mathcal{B}$. Il existe un objet $Z \in |\mathcal{R}|$ et un morphisme $t : Z \longrightarrow A \in \mathcal{B}$. Soit

$$t \cdot b' = b \cdot t', \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dashed, "m'"] \arrow[d, dashed, "b'"'] & Z \arrow[d, "b"] \\ X \arrow[r, "m"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P \arrow[r, dashed, "b'"] \arrow[d, dashed, "t'"'] & Z \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "b"] & A \end{tikzcd}$$

le carré cartésien construit sur les morphismes b et t. Alors b', $t' \in \mathcal{B}$, et $Z \in |\mathcal{R}|$. Donc $P \in |\mathcal{R}|$, et $X \in |\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})|$.□

2.12. COROLLAIRE. *Soit $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$ et $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{M}p)$. Alors $\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$.*

Démonstration. En vertu du LEMME 3.2 [5] $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u)$, et $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_p$.□

3. Les isomorphismes de latice $\mathbb{R}(\mathcal{K})$, $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ et $\mathbb{R}(\mathcal{L})$, $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$

3.1. THÉORÈME. *Soit $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, mais $\mathcal{B} = \varepsilon\mathcal{L}$.*

1. L'application $\mathcal{T} \longmapsto \varphi_1(\mathcal{T}) = \mathbb{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T})$ pour $\mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$ prend des valeurs dans la classe $\mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$.

2. L'application $\mathcal{R} \longmapsto \psi_1(\mathcal{R}) = \mathcal{K} \cap \mathcal{R}$ pour $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$ prend des valeurs dans la classe $\mathbb{R}(\mathcal{K})$.

3. Les applications φ_1 et ψ_1 sont réciproquement inverses.

4. L'application $\mathcal{H} \longmapsto \varphi(\mathcal{H}) = \mathbb{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{H})$ pour $\mathcal{H} \in \mathbb{R}(\mathcal{L})$ prend des valeurs dans la classe $\mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$.

5. L'application $\mathcal{R} \longmapsto \psi(\mathcal{R}) = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ pour $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$ prend des valeurs dans la classe $\mathbb{R}(\mathcal{L})$.

6. Les applications φ et ψ sont réciproquement inverses.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}(\mathcal{K}) \arrow[r, shift left, "\varphi_1"] & \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B}) \arrow[l, shift left, "\psi_1"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & \mathbb{R}(\mathcal{L}) \arrow[l, shift right, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Démonstration. On va indiquer, chaque fois, ce qu'on démontrera.

1. Soit $\mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$ et $\mathcal{R} = \mathbb{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T})$. On construira $\mathcal{R}$-réplique pour tout objet $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$. Soit $k^X : kX \longrightarrow X$ $\mathcal{K}$-coréplique de X, $t^{kX} : kX \longrightarrow tkX$ $\mathcal{T}$-réplique de kX, et

$$u^X \cdot t^{kX} = \overline{v}^X \cdot k^X \tag{1}$$

le carré cocartésien construit sur les morphismes k^X et t^{kX}. Comme $k^X \in \mu\mathcal{K} = \mathcal{B}$, alors $u^X \in \mathcal{B}$, et $\overline{v}X \in |\mathcal{R}|$. Vérifions que $\overline{v}^X$ est $\mathcal{R}$-réplique de l'objet X. Vraiment, soit $Z \in |\mathcal{R}|$, mais $f : X \longrightarrow Z$. Il existe un objet $A \in |\mathcal{T}|$ et un morphisme $b : A \longrightarrow Z \in \mathcal{B}$. Comme $b \in \mathcal{B}$, il existe un morphisme $g : kX \longrightarrow A$ ainsi que

$$f \cdot k^X = b \cdot g. \tag{2}$$

Alors

$$g = h \cdot t^{kX} \tag{3}$$

pour un $h : tkX \longrightarrow A$. Des égalités écrites on a

$$b \cdot f \cdot k^X = b \cdot g = b \cdot h \cdot t^{kX},$$

i.e.

$$f \cdot k^X = h \cdot t^{kX} \tag{4}$$

et puisque (1) est un carré cocartésien, il résulte que

$$f = w \cdot \overline{v}^X, \tag{5}$$

$$b \cdot h = w \cdot u^X \tag{6}$$

pour un w. L'égalité (5) montre que f s'existeint par $\overline{v}^X$. L'unisité de w résulte du fait que $\overline{v}^X$ est un epi.

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[r, "t^{kX}"] \arrow[d, "k^X"'] \arrow[dd, bend right=60, dashed, "g"'] & tkX \arrow[d, dashed, "u^X"] \arrow[ddl, bend left=60, dashed, "h"] \\
X \arrow[r, dashed, "\bar{v}^X"] \arrow[dr, "f"] & \bar{v}X \arrow[d, dashed, "w"] \\
A \arrow[r, "b\in\mathcal{B}"] & Z
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\mathcal{B})$. Soit $A \in |\mathcal{T}|$, mais $b : X \longrightarrow A \in \mathcal{B}$. Il existe un objet $Z \in |\mathcal{T}|$ et un morphisme $b_1 : Z \longrightarrow A$. Puisque $Z \in |\mathcal{T}| \subset |\mathcal{K}|$ et $b \in \mathcal{B}$, il résulte que

$$b_1 = b \cdot f \tag{7}$$

pour un f. Alors $f \in \mathcal{B}$, et $X \in |\mathcal{R}|$.

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "b_1"] \\
X \arrow[r, "b"] & A
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\mathcal{B})$. Evidemment. Ainsi on a démontré que $\varphi_1(\mathcal{T}) \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{R})$.

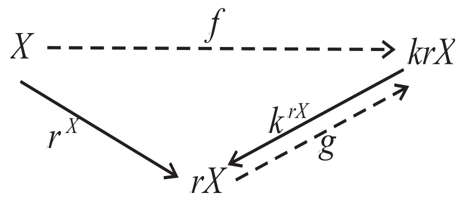
2. Soit $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$ et on démontrera que $\mathcal{K} \cap \mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$. Il est suffisant de montrer que pour $X \in |\mathcal{K}|$, l'objet rX appartient aussi à la catégorie $\mathcal{K}$. Vraiment soit $r^X : X \longrightarrow rX$ $\mathcal{R}$-réplique de X, mais $k^{rX} : krX \longrightarrow rX$ $\mathcal{K}$-coréplique de rX. Alors

$$r^X = k^{rX} \cdot f \tag{8}$$

pour un f. Puisque $rX \in |\mathcal{R}|$, et $k^{rX} \in \mathcal{B}$, il résulte que $krX \in |\mathcal{R}|$. Alors

$$f = g \cdot r^X \tag{9}$$

pour un g. Dans l'égalité (8) $k^{rX} \in \mathcal{B} \subset \mathcal{M}_u$,



et $r^X \in \mathcal{E}pi$. La classe $\mathcal{E}pi$ est $\mathcal{M}_u$-héréditaire. Ainsi $f \in \mathcal{E}pi$. On a

$$g \cdot k^{rX} \cdot f = g \cdot r^X = f,$$

ou

$$g \cdot k^{rX} = 1. \tag{10}$$

Donc $k^{rX} = g^{-1}$, et $rX \in |\mathcal{K} \cap \mathcal{R}|$.

3. $\varphi_1 \cdot \psi_1 = 1$. Soit $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{R})$. Alors $\varphi_1\psi_1(\mathcal{R}) = \varphi_1(\mathcal{K} \cap \mathcal{R}) = \mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{K} \cap \mathcal{R})$.

$\mathcal{R} \subset \mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{K} \cap \mathcal{R})$. Soit $A \in |\mathcal{R}|$. Alors $kA \in |\mathcal{K} \cap \mathcal{R}|$, et $k^A \in \mathcal{B}$. Ainsi $A \in |\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{K} \cap \mathcal{R})|$.

$\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{K} \cap \mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$. Soit $A \in |\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{K} \cap \mathcal{R})$. Alors il existe un objet $Z \in |\mathcal{K} \cap \mathcal{R}|$ et un morphisme $b : Z \longrightarrow A$. Puisque $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{R})$, il résulte que $A \in |\mathcal{R}|$.

$\psi_1 \cdot \varphi_1 = 1$. Soit $\mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$. Alors $\psi_1\varphi_1(\mathcal{T}) = \psi_1(\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T})) = \mathcal{K} \cap \mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T})$.

$\mathcal{T} \subset \mathcal{K} \cap \mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T})$. Evidemment.

$\mathcal{K} \cap \mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$. Soit $A \in |\mathcal{K} \cap \mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T})|$. Alors $A \in |\mathcal{K}|$ et il existe un objet $Z \in |\mathcal{T}|$ et un morphisme $b : Z \longrightarrow A \in \mathcal{B}$. Alors $b \in \mathcal{I}so$ et $A \in |\mathcal{T}|$.

4. Soit $\mathcal{H} \in \mathbb{R}(\mathcal{L})$, et $\mathcal{R} = \mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{H})$. Examinons un objet arbitraire $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$: $h^X : X \to hX$, $k^X : kX \to X$ et $k^{hX} : khX \to hX$ $\mathcal{H}$-répliques $\mathcal{K}$-corépliques des objets correspondants. Alors

$$h^X \cdot k^X = k^{hX} \cdot k(h^X). \tag{11}$$

Soit

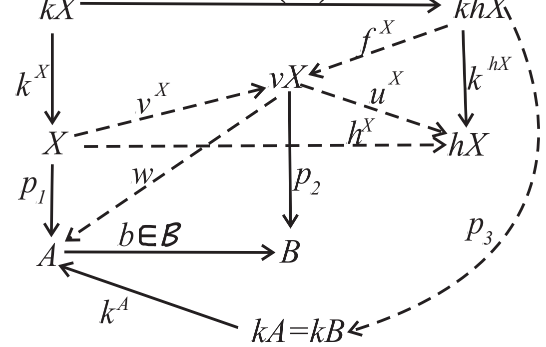
$$v^X \cdot k^X = f^X \cdot k(h^X), \tag{12}$$

le carré cocartésien construit sur les morphismes k^X et $k(h^X)$. Alors

$$h^X = u^X \cdot v^X, \tag{13}$$

$$k^{hX} = u^X \cdot f^X, \tag{14}$$

pour un morphisme $u^X : vX \to rX$. On a k^X, $k^{hX} \in \mathcal{B}$. Donc f^X, $u^X \in \mathcal{B}$, et $vX \in \mathbf{S}_B(\mathcal{R})$.



Démontrons que $v^X \perp \mathcal{B}$ (voir [4]). Vraiment soit $b : A \longrightarrow B \in \mathcal{B}$ et

$$b \cdot p_1 = p_2 \cdot v^X, \tag{15}$$

Si $k^A : kA \longrightarrow A$ est $\mathcal{K}$-coréplique de A, alors $b \cdot k^A : kA \longrightarrow B$ est $\mathcal{K}$-coréplique de B. Il existe un morphisme $p_3 : krX \longrightarrow kB$ ainsi que

$$p_2 \cdot f^X = b \cdot k^A \cdot p_3. \tag{16}$$

De telle manière

$$b \cdot p_1 \cdot k^X = p_2 \cdot v^X \cdot k^X = p_2 \cdot f^X \cdot k(h^X) = b \cdot k^A \cdot p_3 \cdot k(h^X),$$

i.e.

$$b \cdot p_1 \cdot k^X = b \cdot k^A \cdot p_3 \cdot k(h^X), \tag{17}$$

ou

$$p_1 \cdot k^X = k^A \cdot p_3 \cdot k(h^X), \tag{18}$$

Puisque (12) est carré cocartésien, il existe un morphisme $w : vX \longrightarrow A$, ainsi que

$$p_1 = w \cdot v^X, \tag{19}$$

$$p_2 = b \cdot w. \tag{20}$$

De l'égalité (13), en tenant compte que $u^X \in \mathcal{B}$, on déduit que $v^X \in \mathcal{E}pi$. Ainsi, de l'égalité (15) et (19), il résulte que

$$b \cdot w = p_2. \tag{21}$$

Ainsi $v^X \perp \mathcal{B}$, et l'égalité (13) est $(\mathcal{B}^\top, \mathcal{B})$ est une structure de factorisation de gauche.

Démontrons maintenant que v^X est $\mathcal{R}$-réplique de l'objet X. Soit $Y \in |\mathcal{R}|$, et $f : X \to Y$. Il existe un objet $Z \in |\mathcal{H}|$ et un morphisme $b : Y \to Z \in \mathcal{B}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "v^X"] \arrow[rr, bend left, "h^X"] \arrow[d, "f"'] & vX \arrow[r, "u^X"] \arrow[dl, dashed, "t"'] & hX \arrow[dl, dashed, "g"] \\
Y \arrow[r, dashed, "b\in\mathcal{B}"] & Z &
\end{tikzcd}$$

On a

$$b \cdot f = g \cdot h^X \tag{22}$$

pour un morphisme g. Alors

$$b \cdot f = (g \cdot u^X) \cdot v^X \tag{23}$$

avec $v^X \perp b$. Ainsi

$$f = t \cdot v^X, \tag{24}$$

$$g \cdot u^X = b \cdot t \tag{25}$$

pour un t. On a démontré que $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\mathcal{B})$. Evidemment.

$\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\mathcal{B})$. Soit $A \in |\mathcal{R}|$, et $b : A \to X \in \mathcal{B}$. Il existe un objet $Z \in |\mathcal{H}| \subset |\mathcal{L}|$ et un morphisme $b_1 : A \to Z$. Alors b_1 est $\mathcal{L}$-réplique de A. Ainsi

$$b_1 = f \cdot b \tag{26}$$

pour un f. Il est clair que $f \in \mathcal{B}$, est $X \in |\mathcal{R}|$.

5. Soit $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$. Alors $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ et $\mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ est une catégorie reflective de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, donc de la catégorie $\mathcal{L}$ aussi.

6. $\varphi \cdot \psi = 1$. Soit $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{R})$. Alors $\varphi\psi(\mathcal{R}) = \varphi(\mathcal{L} \cap \mathcal{R}) = \mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$.

$\mathcal{R} \subset \mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$. Soit $A \in |\mathcal{R}|$, et $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-réplique de A. Alors $lA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$, et $l^A \in \mathcal{B}$. Ainsi $A \in |\mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R})|$.

$\mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$. Soit $A \in |\mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$. Il existe un objet $Z \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$ et un morphisme $b : A \longrightarrow Z \in \mathcal{B}$. Ainsi $A \in |\mathcal{R}|$, puisque $\mathcal{R}$ est fermée par rapport à $\mathcal{B}$-sousobjets.

$\psi \cdot \varphi = 1$. Soit $\mathcal{H} \in \mathbb{R}(\mathcal{L})$. Alors $\psi\varphi(\mathcal{H}) = \psi(\mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{H})) = \mathcal{L} \cap \mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{H})$.

$\mathcal{H} \subset \mathcal{L} \cap \mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{H})$. Soit $A \in |\mathcal{H}| \subset |\mathcal{L}|$. Donc $A \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{H}| \subset |\mathcal{L} \cap \mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{H})|$.

$\mathcal{L} \cap \mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$. Soit $A \in |\mathcal{L} \cap \mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T})|$. Alors $A \in |\mathcal{L}|$ et $A \in |\mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{H})|$. Il existe un objet $Z \in |\mathcal{H}|$ et un morphisme $b : A \longrightarrow Z \in \mathcal{B}$. Puisque $A \in |\mathcal{L}|$, il résulte que $b \in \mathcal{I}so$ et $A \in |\mathcal{H}|$.$\square$

3.2. Le résultat dual est aussi juste.

THÉORÈME. *Soit* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, *et* $\mathcal{B} = \varepsilon\mathcal{L}$.

1. *L'application* $\mathcal{T} \mapsto \overline{\varphi_1}(\mathcal{T}) = \mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T})$ *pour* $\mathcal{T} \in \mathbb{K}(\mathcal{K})$ *prend des valeurs dans la class* $\mathbb{K}^s_f(\mathcal{B})$.
2. *L'application* $\mathcal{U} \mapsto \overline{\psi_1}(\mathcal{U}) = \mathcal{K} \cap \mathcal{U}$ *pour* $\mathcal{U} \in \mathbb{K}^s_f(\mathcal{B})$ *prend des valeurs dans la class* $\mathbb{K}(\mathcal{K})$.
3. *Les applications* $\overline{\varphi_1}$ *et* $\overline{\psi_1}$ *sont réciproquement inverses.*
4. *L'application* $\mathcal{V} \longmapsto \overline{\varphi}(\mathcal{V}) = \mathbb{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{V})$ *pour* $\mathcal{V} \in \mathbb{K}(\mathcal{L})$ *prend des valeurs dans la classe* $\mathbb{K}^s_f(\mathcal{B})$.
5. *L'application* $\mathcal{H} \longmapsto \overline{\psi}(\mathcal{H}) = \mathcal{L} \cap \mathcal{H}$ *pour* $\mathcal{H} \in \mathbb{K}^s_f(\mathcal{B})$ *prend des valeurs dans la classe* $\mathbb{K}(\mathcal{L})$.
6. *Les applications* $\overline{\varphi}$ *et* $\overline{\psi}$ *sont réciproquement inverses.*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}(\mathcal{K}) \arrow[r, shift left, "\overline{\varphi}_1"] & \mathbb{K}^s_f(\mathcal{B}) \arrow[l, shift left, "\overline{\psi}_1"] \arrow[r, shift right, "\overline{\psi}"'] & \mathbb{K}(\mathcal{L}) \arrow[l, shift right, "\overline{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

4. Réconstruction des repliques et corepliques

4.1. Pour $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$ en vertu du THÉORÈME 3.1, chaque élément $\mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ et $\mathcal{H} \in \mathbb{R}(\mathcal{L})$ définit par un triplet.

1. $\mathcal{T} \longmapsto (\mathcal{T}, \varphi_1(\mathcal{T}), \psi\varphi_1(\mathcal{T}))$, $\mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$.
2. $\mathcal{R} \longmapsto (\psi_1(\mathcal{R}), \mathcal{R}, \psi(\mathcal{R}))$, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.
3. $\mathcal{H} \longmapsto (\psi_1\varphi(\mathcal{H}), \varphi(\mathcal{H}), \mathcal{H})$, $\mathcal{H} \in \mathbb{R}(\mathcal{L})$.

Voyons, par exemple, dans chacun de ces cas comment peuvent être construites $\varphi_1(\mathcal{T})$- et $\psi\varphi_1(\mathcal{T})$-répliques d'un objet arbitraire.

4.2. Le cas $\mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$. Soit $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, $k^A : kA \to A$, $l^A : A \to lA$ et $t^{kA} : kA \to tkA$ coréplique et réplique des objet correspondants. Plus loin, soit

$$b_1^A \cdot t^{kA} = u_1^A \cdot k^A, \tag{1}$$

$$b_2^A \cdot u_1^A = u_2^A \cdot l^A \tag{2}$$

les carrés cocartésiens construit sur les morphismes t^{kA}, k^A et $k^A u_1^A$, l^A, et l^T $\mathcal{L}$-réplique de T.

$$\begin{tikzcd}
kA \arrow[r, "k^A"] \arrow[d, "t^{kA}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{Carré cocartésien}"] & A \arrow[r, "l^A"] \arrow[d, dashed, "u_1^A"'] \arrow[dr, phantom, "\text{Carré cocartésien}"] & lA \arrow[d, dashed, "u_2^A"] & \\
tkA \arrow[r, dashed, "b_1^A"'] & P \arrow[r, dashed, "b_2^A"'] & T \arrow[r, "l^T"'] & lT
\end{tikzcd}$$

THÉORÈME. *Sont vraies les affirmations suivantes:*

1. $t^{kA} : kA \to tkA$ *est* $\varphi_1(\mathcal{T})$*-réplique de* kA.
2. $u_1^A : A \to P$ *est* $\varphi_1(\mathcal{T})$*-réplique de* A.
3. $b_1^A : tkA \to P$ *est* $\mathcal{K}$*-coréplique de* P.
4. $l^T \cdot b_2^A : P \to lT$ *est* $\mathcal{L}$*-réplique de* P.
5. $l^T \cdot u_2^A : lA \to lT$ *est* $\psi\varphi_1(\mathcal{T})$*-réplique de* lA.
6. $l^T \cdot u_2^A \cdot l^A : A \to lT$ *est* $\psi\varphi_1(\mathcal{T})$*-réplique de* A.

Démonstration. 1. Premièrement, mentionnons que $tkA \in |\mathcal{T}| \subset |\varphi_1(\mathcal{T})|$. Soit $Z \in |\varphi_1(\mathcal{T})|$, et $f : kA \to Z$. Il existe un objet $B \in |\mathcal{T}|$ et un morphisme $b : B \to Z \in \varepsilon\mathcal{L}$.

$$\begin{tikzcd}
kA \arrow[r, "t^{kA}"] \arrow[d, dashed, "g"'] \arrow[dr, "f"] & tkA \arrow[dl, dashed, "h"] \\
B \arrow[r, "b \in \mathcal{B}"] & Z
\end{tikzcd}$$

Puisque $\varepsilon\mathcal{L} = \mu\mathcal{K}$, il existe un morphisme $g : kA \to B$ ainsi que .

$$f = b \cdot g. \tag{3}$$

Alors

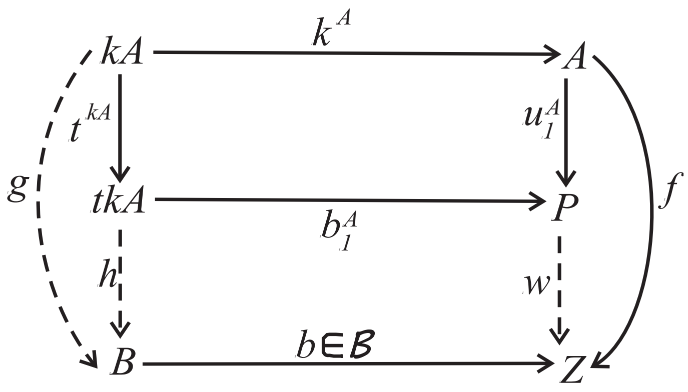
$$g = h \cdot t^{kA}, \tag{4}$$

et

$$f = (b \cdot h) \cdot t^{kA}. \tag{5}$$

Ainsi le morphisme f s'éxteint par t^{kA}.

2. Puisque $k^A \in \mathcal{B}$, il résulte que $b_1^A \in \mathcal{B}$ aussi. Ainsi $P \in |\mathcal{R}|$, où $\mathcal{R} = \varphi_1(\mathcal{T})$. Soit maintenent $Z \in |\mathcal{R}|$, et $f : A \to Z$. Il existe un objet $B \in |\mathcal{T}|$ et un morphisme $b : B \to Z \in \mathcal{B}$.



Puisque $\mathcal{B} = \mu\mathcal{K}$ pour le morpfisme $f \cdot k^A$, il existe un morphisme g ainsi que .

$$f \cdot k^A = b \cdot g, \tag{6}$$

qui, à son tour, s'éxteint par $\mathcal{T}$-réplique de kA:

$$g = h \cdot t^{kA}, \tag{7}$$

pour un h. On a

$$b \cdot h \cdot t^{kA} = f \cdot k^A. \tag{8}$$

Ainsi le morphisme f s'éxteint par t^{kA}.

Puisque (1) est un carré cocartésien, il résulte que

$$b \cdot h = w \cdot b_1^A, \tag{9}$$

$$f = w \cdot u_1^A, \tag{10}$$

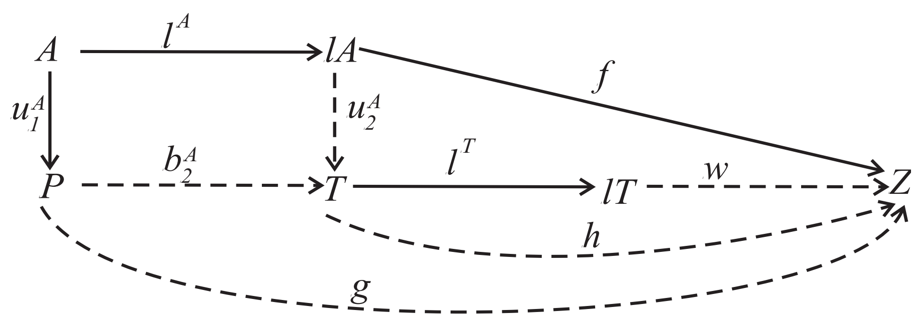
pour un w. L'unicité de w qui exteint le morphisme f par u_1^A résulte du fait que u_1^A est un epi.

3. Premièrement, $t^{kA} \in |\mathcal{T}| \subset |\mathcal{K}|$. Deuxièmement, $b_1^A \in \varepsilon\mathcal{L} = \mu\mathcal{K}$.

4. En vertu du fait que $lT \in |\mathcal{L}|$, et $l^T \cdot b_2^A \in \varepsilon\mathcal{L}$.

5. Puisque $P \in |\varphi_1(\mathcal{T})|$, et $lT = lP$, il résulte que $lT \in |\mathcal{L} \cap \varphi_1(\mathcal{T})|$. Soit $Z \in |\psi\varphi_1(\mathcal{T})|$, et $f : lA \to Z$. Ayant en vue que u_1^A est $\varphi_1(\mathcal{T})$-réplique de A, on a

$$f \cdot l^A = g \cdot u_1^A, \tag{11}$$



pour un g. Le carré (2) est cocartésien. Il résulte que

$$g = h \cdot b_2^A, \tag{12}$$

$$f = h \cdot u_2^A \tag{13}$$

pour un h. Mais $Z \in |\psi\varphi_1(\mathcal{T})| \subset |\mathcal{L}|$, donc

$$h = w \cdot l^T. \tag{14}$$

pour un w.

6. Cela résulte de p.6.□

4.2^0. Examinons la situation duale.

Le cas $\mathcal{V} \in \mathbb{K}(\mathcal{L})$.

Soit $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, $k^A : kA \to A$, $l^A : A \to lA$ et $v^{lA} : vlA \to lA$ corépliques et répliques des objets correspondants. Plus loin,

$$l^A \cdot u_1^A = v^{lA} \cdot b_1^A, \tag{1}$$

$$k^A \cdot u_2^A = u_1^A \cdot b_2^A \tag{2}$$

les carrés cocartésiens construits sur les morphismes l^A, v^{lA} et k^A, u_1^A, et k^T $\mathcal{K}$-coréplique de T.

$$\begin{tikzcd}
kT \arrow[r, "k^T"] & T \arrow[r, dashed, "b_2^A"] \arrow[d, dashed, "u_2^A"] & P \arrow[r, "b_1^A"] \arrow[d, dashed, "u_1^A"] & vlA \arrow[d, dashed, "v^{lA}"] \\
 & kA \arrow[r, dashed, "k^A"] & A \arrow[r, dashed, "l^A"] & lA
\end{tikzcd}$$

THÉORÈME. *Sont vraies les affirmations suivantes:*

1. $v^{lA} : vlA \to lA$ *est* $\overline{\varphi}(\mathcal{V})$*-coréplique de* lA.
2. $u_1^A : P \to A$ *est* $\overline{\varphi}(\mathcal{V})$*-coréplique de* A.
3. $b_1^A : P \to vlA$ *est* $\mathcal{L}$*-réplique de* P.
4. $b_2^A \cdot k^T : kT \to P$ *est* $\mathcal{K}$*-coréplique de* P.
5. $u_2^A \cdot k^T : kT \to kA$ *est* $\overline{\psi_1}\overline{\varphi}(\mathcal{V})$*-coréplique de* kA.
6. $k^A \cdot u_2^A \cdot k^T : kT \to A$ *est* $\overline{\psi_1}\overline{\varphi}(\mathcal{V})$*-coréplique de* lA.

4.3. Le cas $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Soit $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, $k^A : kA \to A$, $l^A : A \to lA$ $\mathcal{K}$-coréplique et $\mathcal{L}$-réplique de A, mais $r^A : A \to rA$, $k^{rA} : krA \to rA$ et $l^{rA} : rA \to lrA$ $\mathcal{R}$-réplique, $\mathcal{L}$-réplique et $\mathcal{K}$-coréplique des objets correspondants. Alors

$$r^A \cdot k^A = k^{rA} \cdot k(r^A), \tag{1}$$

$$l^{rA} \cdot r^A = l(r^A) \cdot l^A \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd}
kA \arrow[r, "k^A"] \arrow[d, "k(r^A)"] & A \arrow[r, "l^A"] \arrow[d, "r^A"] & lA \arrow[d, "l(r^A)"] \\
krA \arrow[r, "k^{rA}"] & rA \arrow[r, "l^{rA}"] & lrA
\end{tikzcd}$$

THÉORÈME. *Sont vraies les affirmations suivantes:*

1. $k(r^A) : kA \to krA$ *est* $\psi_1(\mathcal{R})$*-réplique de* kA.
2. $l(r^A) : lA \to lrA$ *est* $\psi(\mathcal{R})$*-réplique de* lA.
3. $l(r^A) \cdot l^A : A \to lrA$ *est* $\psi(\mathcal{R})$*-réplique de* A.

Démonstration. 1. Puisque $k^{rA} \in \mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$, et $rA \in |\mathcal{R}|$, il résulte que $krA \in |\mathcal{K} \cap \mathcal{R}| = |\psi_1(\mathcal{R})|$. Vérifions que $k(r^A) : kA \to krA$ est $\psi_1(\mathcal{R})$-réplique de kA. Soit $Z \in |\mathcal{K} \cap \mathcal{R}| = |\psi_1(\mathcal{R})|$ et $f : kA \to Z$. Alors $lZ \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$. Donc

$$l^Z \cdot f = g \cdot l^A \cdot k^A \tag{3}$$

pour un g, et

$$g \cdot l^A = u \cdot r^A \tag{4}$$

pour un u. Plus loin, $l^Z \in \mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$, donc

$$u \cdot k^{rA} = l^Z \cdot v \tag{5}$$

pour un v. On vérifie facilement que

$$f = v \cdot k(r^A), \tag{6}$$

et de l'égalité (1) il résulte que $k(r^A) \in \mathcal{E}pi$, puisque $r^A \cdot k^A \in \mathcal{E}pi$ et $k^{rA} \in \mathcal{M}_u$.

$$\begin{tikzcd}
kA \arrow[r, "k^A"] \arrow[d, "k(r^A)"] \arrow[dd, dashed, bend right, "f"'] & A \arrow[r, "l^A"] \arrow[d, "r^A"] & lA \arrow[d, "l(r^A)"'] \arrow[ddl, dashed, bend left=60, "g"] \\
krA \arrow[r, "k^{rA}"] \arrow[d, dashed, "v"] & rA \arrow[r, "l^{rA}"] \arrow[d, dashed, "u"] & lrA \\
Z \arrow[r, "l^Z"] & lZ &
\end{tikzcd}$$

2. Premièrement, $lrA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}| = |\varphi(\mathcal{R})|$, et de l'égalité (2) il résulte que $l(r^A) \in \mathcal{E}pi$. On vérifie facilement que $\varphi(\mathcal{R})$-réplique de lA.

3. Il résulte de p.2.$\square$

4.3^0. **Le cas $\mathcal{H} \in \mathbb{K}_f^s(\mu\mathcal{K})$.**

Soit $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, $k^A : kA \to A$, $l^A : A \to lA$ $\mathcal{K}$-coréplique et $\mathcal{L}$-réplique de A, et $h^A : hA \to A$, $k^{hA} : khA \to hA$ et $l^{hA} : lA \to lhA$ sont les répliques et les corépliques des objets correspondants. Alors

$$l^A \cdot h^A = l(h^A) \cdot l^{hA}, \tag{1}$$

$$h^A \cdot k^{hA} = k^A \cdot k(h^A). \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd}
khA \arrow[r, "k^{hA}"] \arrow[d, "k(h^A)"] & hA \arrow[r, "l^{hA}"] \arrow[d, "h^A"] & lhA \arrow[d, "l(h^A)"] \\
kA \arrow[r, "k^A"] & A \arrow[r, "l^A"] & lA
\end{tikzcd}$$

THÉORÈME. *Sont vraies les affirmations suivantes:*

1. $l(h^A) : lhA \to lA$ *est* $\varphi(\mathcal{H})$*-coréplique de* lA.
2. $k(h^A) : khA \to kA$ *est* $\overline{\psi_1}(\mathcal{H})$*-coréplique de* kA.
3. $k^A \cdot k(h^A) : khA \to A$ *est* $\overline{\psi_1}(\mathcal{H})$*-coréplique de* A.

4.4. Le cas $\mathcal{H} \in \mathbb{R}(\mathcal{L})$. Soit $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, $l^A : A \to lA$ et $h^{lA} : lA \to hlA$ $\mathcal{L}$- et $\mathcal{H}$-répliques, et $k^A : kA \to A$, et $k^{hlA} : khlA \to hlA$ $\mathcal{K}$-coréepliques des objet correspondants. Alors

$$h^{lA} \cdot l^A \cdot k^A = k^{hlA} \cdot k(h^{lA}). \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd}
kA \arrow[r, "k^A"] \arrow[d, dashed, "k(h^{lA})"'] & A \arrow[r, "l^A"] \arrow[d, dashed, "u^A"] & lA \arrow[d, "h^{lA}"] \\
khlA \arrow[r, dashed, "b_1^A"] \arrow[rr, bend right, "k^{hlA}"'] & P \arrow[r, dashed, "b_2^A"] & hlA
\end{tikzcd}$$

Plus loin, soit

$$b_1^A \cdot k(h^{lA}) = u^A \cdot k^A \tag{2}$$

le carré cocartésien construit sur les morphismes k^A et $k(h^{lA})$. Alors

$$k^{hlA} = b_2^A \cdot b_1^A, \tag{3}$$

$$h^{lA} \cdot l^A = b_2^A \cdot u^A. \tag{4}$$

pour un b_2^A.

THÉORÈME. *Sont vraies les affirmations suivantes:*

1. $k(h^{lA}) : kA \to khlA$ *est* $\psi_1\varphi(\mathcal{H})$*-réplique de* kA.
2. $u^A : A \to P$ *est* $\varphi(\mathcal{H})$*-réplique de* A.

Démonstration. 1. Puisque $k^{hlA} \in \mu\mathcal{K}$, et $hlA \in |\mathcal{H}|$, il résulte que $khlA \in |\mathcal{K} \cap \varphi(\mathcal{H})| = |\psi_1\varphi(\mathcal{H})|$. Soit $B \in |\psi_1\varphi(\mathcal{H})|$ et $f : kA \to B$. Démontrons que f s'exteint par $k(h^{lA})$. Soit $l^B : B \to lB$ $\mathcal{L}$-réplique de B. Puisque $l^A \cdot k^A$ est $\mathcal{L}$-réplique de l'objet kA, on a

$$l^B \cdot f = g \cdot l^A \cdot k^A \tag{5}$$

pour un g. On a $B \in |\varphi(\mathcal{H})|$, donc $lB \in |\mathcal{L} \cap \varphi(\mathcal{H})| = |\mathcal{H}|$. Ainsi le morphisme g s'exteint par h^{lA}:

$$g = v \cdot h^{lA} \tag{6}$$

pour un v. Donc, $l^B \in \mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$, et $khlA \in |\mathcal{K}|$. Donc

$$v \cdot b_2 \cdot b_1 = l^B \cdot w \tag{7}$$

pour un w. Des formules (7), (2), (4), (6), (5) nous avons

$$l^B \cdot w \cdot k(h^{lA}) = v \cdot b_2 \cdot b_1 \cdot k(h^{lA}) = v \cdot b_2 \cdot u^A \cdot k^A = v \cdot h^{lA} \cdot l^A \cdot k^A = g \cdot l^A \cdot k^A = l^B \cdot f,$$

i.e

$$l^B \cdot w \cdot k(h^{lA}) = l^B \cdot f, \tag{8}$$

qui nous mène à l'égalité

$$w \cdot k(h^{lA}) = f. \tag{9}$$

$$\begin{tikzcd}
kA \arrow[r, "k^A"] \arrow[d, dashed, "k(h^{lA})"'] \arrow[dd, bend right=60, "f"'] & A \arrow[r, "l^A"] \arrow[d, dashed, "u^A"] & lA \arrow[d, "h^{lA}"] \arrow[ddl, dashed, bend left=60, "g"] \\
khlA \arrow[r, dashed, "b_1"] \arrow[d, dashed, "w"] & uA \arrow[r, dashed, "b_2"] & hlA \arrow[dl, dashed, "v"] \\
B \arrow[r, "l^B"] & lB &
\end{tikzcd}$$

Vérifions que $k(h^{lA})$ est un epi. De l'égalité (1) $k^{hlA} \cdot k(h^{lA}) \in \mathcal{E}pi$, et $k^{hlA} \in \mathcal{M}_u$. Puisque la classe $\mathcal{E}pi$, est $\mathcal{M}_u$-héréditaire ([4], LEMME 2.6), il résulte que $k(h^{lA}) \in \mathcal{E}pi$.

2. De l'égalité (3) il résulte que $b_2^A \in \varepsilon\mathcal{L}$. Donc $P \in |\varphi(\mathcal{H})|$. De l'égalité (2) déduisons que $u^A \in \mathcal{E}pi$. Soit maintenant $B \in |\varphi(\mathcal{H})|$, et $f : A \to B$.

$$\begin{tikzcd}
kA \arrow[r, "k^A"] \arrow[d, "k(h^{lA})"'] & A \arrow[r, "l^A"] \arrow[d, dashed, "u^A"] \arrow[dd, dashed, bend right=50, "f"'] & lA \arrow[d, "h^{lA}"] \arrow[dd, dashed, bend left=50, "l(f)"] \\
khlA \arrow[r, "b_1^A"] \arrow[dr, dashed, "v"'] & P \arrow[r, "b_2^A"] \arrow[d, dashed, "w"] & hlA \arrow[d, dashed, "g"] \\
& B \arrow[r, "l^B"] & lB
\end{tikzcd}$$

Alors

$$l^B \cdot f = l(f) \cdot l^A. \tag{10}$$

Puisque $B \in |\varphi(\mathcal{H})|$, il résulte que $lB \in |\varphi(\mathcal{H})|$. Donc

$$l(f) = g \cdot h^{lA} \tag{11}$$

pour un g. Plus loin, $l^B \in \varepsilon\mathcal{L} = \mu\mathcal{K}$, et $khlA \in |\mathcal{K}|$. Ainsi

$$g \cdot b_2^A \cdot b_1^A = l^B \cdot v \tag{12}$$

pour un v. On vérifie facilement l'égalité

$$l^B \cdot v \cdot k(h^{lA}) = l^B \cdot f \cdot k^A, \tag{13}$$

i.e.

$$v \cdot k(h^{lA}) = f \cdot k^A. \tag{14}$$

En tenant compte que (2) est un carré cocartésien, concluons que

$$v = w \cdot b_1^A, \tag{15}$$

$$f = w \cdot u^A \tag{16}$$

pour un w. L'égalité (16) démontre l'affirmation.$\square$

4.4^0. **Le cas $\mathcal{T} \in \mathbb{K}(\mathcal{K})$.** Soit $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, $k^A : kA \to A$ et $t^{kA} : tkA \to kA$ $\mathcal{K}$ et $\mathcal{T}$-corépliques, et $l^A : A \to lA$, et $l^{tkA} : tkA \to ltkA$ $\mathcal{L}$-répliques des objets correspondants. Alors

$$l^A \cdot k^A \cdot t^{kA} = l(t^{kA}) \cdot l^{tkA}. \tag{1}$$

Plus loin, soit

$$l^A \cdot u^A = l(t^{kA}) \cdot b_1^A \tag{2}$$

le carré cocartésien construit sur les morphismes l^A et $l(t^{kA})$. Alors

$$l^{tkA} = b_1^A \cdot b_2^A, \tag{3}$$

$$k^A \cdot t^{kA} = u^A \cdot b_2^A \tag{4}$$

pour un b_2^A.

$$\begin{tikzcd}
tkA \arrow[r, dashed, "b_2^A"] \arrow[rr, bend left, "l^{tkA}"] \arrow[d, "t^{kA}"'] & P \arrow[r, dashed, "b_1^A"] \arrow[d, dashed, "u^A"] & ltkA \arrow[d, "l(t^{kA})"] \\
kA \arrow[r, "k^A"] & A \arrow[r, "l^A"] & lA
\end{tikzcd}$$

THÉORÈME. *Sont vraies les affirmations suivantes:*

1. $l(t^{kA}) : ltkA \to lA$ *est* $\overline{\psi}\overline{\varphi_1}(\mathcal{T})$*-coréplique de* lA.
2. $u^A : P \to A$ *est* $\overline{\varphi_1}(\mathcal{T})$*-coréplique de* A.

4.5. COROLLAIRE. 1. *Soit* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, *et* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$, *mais* $\mathcal{T} = \mathcal{K} \cap \mathcal{R}$ *et* $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$. *Alors:*

1. $r \cdot k = t \cdot k$.
2. $l \cdot r = h$.
3. $h \cdot l = h$.

5. Foncteurs commutatifs

5.1. On examinera deux foncteurs t_1, t_2 tous les deux coreflecteurs, tous les deux reflecteurs, ou l'un coreflecteur et l'autre reflecteur. Dans la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ $t_1t_2A \sim t_2t_1A$ pour tout $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, alors on peut facilement vérifier que les foncteurs $t_1 \cdot t_2$ et $t_2 \cdot t_1$ sont isomorphes.

5.2. THÉORÈME. *Soit* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, *et* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$. *Alors les foncteurs coreflecteur* $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ *et celui reflecteur* $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ *commutent:* $k \cdot r = r \cdot k$.

Démonstration. Revenons au THÉORÈME 4.2. On a $rA = P$ et $kP = tkA$, et $rkA = tkA$. Ainsi pour tout $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ $rkA = krA = tkA$. $\square$

5.3. THÉORÈME. *Soit* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$ *et* $r(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$. *Alors les foncteurs* l *et* r *commutent:* $l \cdot r = r \cdot l$.

Démonstration. Soit $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, $l^A : A \to lA$ et $r^A : A \to rA$ $\mathcal{L}$- et $\mathcal{R}$-réplique de A. Examinons le carré cocartésien

$$b \cdot r^A = u \cdot l^A \tag{1}$$

construit sur les morphismes r^A et l^A. Alors $b \in \varepsilon\mathcal{L}$. Donc $T \in |\mathcal{R}|$. Ainsi $u \in \varepsilon\mathcal{R}$, mais $T \in |\mathcal{R}|$, il résulte que u est $\mathcal{R}$-réplique de lA. Ainsi $T \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$ et $b \in \varepsilon\mathcal{L}$. Donc b est $\mathcal{L}$-réplique de rA et $lrA = rlA$. $\square$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "l^A"] \arrow[d, "r^A"'] & lA \arrow[d, dashed, "u"] \\
rA & T=rlA=lrA \arrow[l, dashed, "b"']
\end{tikzcd}$$

5.4. THÉORÈME. *Soit $\mathcal{L}$ souscatégorie fermée par rapport aux extensions: $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p)$-facteurobjets et $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Examinons les conditions suivantes:*

1. $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{R} \vee \Gamma_0)$, *où $\mathcal{R} \vee \Gamma_0$ est le suprême dans la latice $\mathbb{R}$ des éléments $\mathcal{R}$ et Γ_0-souscatégorie des espaces complets.*

2. $\mathcal{L} \cap \Gamma_0 \subset \mathcal{R}$.

3. $r(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$.

Alors $1 \Leftrightarrow 2 \Rightarrow 3$.

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$. En vertu du THÉORÈME 2.8. $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L} \cap (\mathcal{R} \vee \Gamma_0)$. Ainsi $\mathcal{L} \cap \Gamma_0 \subset \mathcal{L} \cap (\mathcal{R} \vee \Gamma_0) = \mathcal{L} \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$.

$2 \Rightarrow 1$. $\mathcal{R} \subset \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{R} \vee \Gamma_0)$. Evidemment.

$\mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{R} \vee \Gamma_0) \subset \mathcal{R}$. Soit $A \in |\mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{R} \vee \Gamma_0)|$. Alors $lA \in |\mathcal{R} \vee \Gamma_0|$. Examinons $r^{lA} : lA \to rlA$ et $g_0^{lA} : lA \to g_0lA$ $\mathcal{R}$- et Γ_0-réplique de lA, mais $\pi^{rlA} : rlA \to \pi A$ et $\pi^{g_0lA} : g_0lA \to \pi A$ Γ_0-réplique des objets correspondants. Alors

$$\pi^{g_0lA} \cdot g_0^{lA} = \pi^{rlA} \cdot r^{lA}. \tag{1}$$

Soit

$$\pi^{g_0lA} \cdot v = \pi^{rlA} \cdot w. \tag{2}$$

le carré cartésien construit sur les morphismes π^{g_0lA} et π^{rlA}. Alors

$$g_0^{lA} = v \cdot g_1^{lA}, \tag{3}$$

$$r^{lA} = w \cdot g_1^{lA}, \tag{4}$$

pour un $g_1^{lA} : lA \to g_1lA$. On vérifie facilement que g_1lA est $(\mathcal{R} \vee \Gamma_0)$-réplique des lA, mais v est Γ_0-réplique de g_1^{lA}. Puisque $lA \in |\mathcal{R} \vee \Gamma_0|$, il résulte que $g_1^{lA} \in \mathcal{I}so$. Plus loin, $g_0lA \in |\mathcal{L} \cap \Gamma_0| \subset |\mathcal{R}|$. Donc $w \in \mathcal{I}so$. Ainsi $g_1lA \in |\mathcal{R}|$, c'est-à-dire $lA \in |\mathcal{R}|$. En vertu de l'hipothèse que $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$, on déduit que $A \in |\mathcal{R}|$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "l^A"] & lA \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, dashed, "g_1^{lA}"] \arrow[dd, "g_0^{lA}"'] & & rlA \arrow[dd, "\pi^{rlA}"] \\
& & g_1lA \arrow[ur, dashed, "w"] \arrow[dl, dashed, "v"'] & \\
& g_0lA \arrow[rr, "\pi^{g_0lA}"] & & \pi A
\end{tikzcd}$$

$2 \Rightarrow 3$. Soit $A \in |\mathcal{L}|$, mais $r^A : A \to rA$ et $g_0^A : A \to g_0 A$ $\mathcal{R}$- et Γ_0-réplique de A. Alors $g_0 A \in |\mathcal{L} \cap \Gamma_0| \subset |\mathcal{R}|$. Donc

$$g_0^A = f \cdot r^A \tag{5}$$

pour un f. De l'égalité écrite il résulte que $r^A \in \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p$. Donc $rA \in |\mathcal{L}|$ aussi.$\square$

5.5. Une souscatégorie $\mathcal{L}$ est c-reflective, si et seulement si elle est $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ et $l(\mathcal{M}_p) \subset \mathcal{M}_p$. Ainsi toute catégorie c-reflective est fermée par rapport aux extensions: $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p)$-facteurobjets. La souscatégorie $\mathcal{N}$ des espaces nucléaires n'est pas c-reflective, mais elle est fermée par rapport aux extensions.

Si $\mathcal{L}$ est une souscatégorie $\mathcal{E}_u$-reflective ($\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$), alors $\Pi \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Ainsi $\mathcal{S}$ est l'unique souscatégorie c-reflective pour laquelle $\Pi = \mathcal{S} \cap \Gamma_0$.

COROLLAIRE. 1. *Soit* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, *et* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$. *Sont vraies les affirmations suivantes:*

a) *Les foncteurs* $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ *et* $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ *commutent:* $k \cdot r = r \cdot k$.

b)*Si* $\mathcal{L} \cap \Gamma_0 \subset \mathcal{R}$, *alors les foncteurs* $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ *et* r *commutent:* $l \cdot r = r \cdot l$.

2. *Soit* $\widetilde{\mathcal{M}}$ *la souscatégorie des espaces à topologie Mackey et* $\mathcal{S}$ *des espaces à topologie faible, mais* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$. *Alors*

a)*Les foncteurs* $m : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \widetilde{\mathcal{M}}$ *et* $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ *commutent:* $m \cdot r = r \cdot m$.

b)*Les foncteurs* $s : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{S}$ *et* r *commutent:* $s \cdot r = r \cdot s$.

6. Exemples

6.1. Examinons la souscatégorie Π des espaces complets à topologie faible, et $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$.

PROPOSITION. 1. $\Pi \in \mathbb{R}(\mathcal{L})$.

2. $\Pi \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

3. $\Pi \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$.

4. Les applications φ, ψ, φ_1 et ψ_1 transforment l'élément Π en lui-même.

Démonstration. 1. La souscatégorie Π est fermée par rapport aux produits et aux sousespaces fermés (voir [14]).

2. Puisque $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$, il résulte que $\varepsilon\mathcal{L} \subset \varepsilon\mathcal{S} = \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$. En vertu de la description de la classe $\mathcal{M}_u$ (voir [4]), $\Pi \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

3. On a $\Pi \subset \widetilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$.

4. Evidemment.

6.2. La souscatégorie $s\mathcal{R}$ des espaces semi-reflexifs est une souscatégorie S-semi-reflexive, où S est une souscatégorie des espaces à topologie faible (voir [21], cap. IV, Proposition 5.5).

PROPOSITION. Sont vraies les affirmations suivantes:

1. $s\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$.

2. $s\mathcal{R} = \mathcal{S} *_{sr} q\Gamma_0$, où $q\Gamma_0$ est une souscatégorie des espaces quasicomplets.

3. $\psi(s\mathcal{R}) = \widetilde{\mathcal{M}} \cap s\mathcal{R}$ est une souscatégorie des espaces quasicomplets à topologie Mackey.

4. $\psi(s\mathcal{R}) = \mathcal{S} \cap \mathcal{R}$ est une souscatégorie des espaces quasicomplets à topologie faible.

5. Les foncteurs $m : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \widetilde{\mathcal{M}}$ et $s_r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to s\mathcal{R}$ commutent: $m \cdot s_r = s_r \cdot m$.

6. Les foncteurs $s : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{S}$ et s_r commutent: $s \cdot s_r = s_r \cdot s$.

6.3. Dans les ouvrages [24] et [19], on a examiné les espaces localement complets, dont la souscatégorie sera notée par $l\Gamma_0$. Avec les notations ci-dessus, on a

PROPOSITION. 1. $l\Gamma_0 \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$.

2. $l\Gamma_0 = \mathcal{S} *_{sr} l\Gamma_0 = \mathcal{S} *_{sr} (\mathcal{S} \cap l\Gamma_0)$.

3. $\psi_1(l\Gamma_0) = \widetilde{\mathcal{M}} \cap l\Gamma_0$ est la souscatégorie des espaces localement complets à topologie Mackey.

4. $\psi(l\Gamma_0) = \mathcal{S} \cap l\Gamma_0$ est la souscatégorie des espaces localement complets à topologie faible.

5. Les foncteurs m et $g_l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to l\Gamma_0$ commutent: $m \cdot g_l = g_l \cdot m$.

6. Les foncteurs s et g_l commutent: $s \cdot g_l = g_l \cdot s$.

6.4. La souscatégorie $\mathcal{S}h$ des espaces Schwartz (voir [14]) est c-reflective (voir [2]). Notons par $\mathcal{C}h$ la souscatégorie conjuguée de la souscatégorie $\mathcal{S}h$ et les foncteurs correspondents $c_h : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}h$ et $s_h : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{S}h$. Concernant la souscatégorie $\mathcal{C}h$(voir [13]). Dans le même ouvrage [2] sont définis les espaces inductivement semi-reflexifs dont la souscatégorie sera notée par $i\mathcal{R}$ avec le foncteurs reflecteur $i_r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to i\mathcal{R}$. A partir des résultats exposés dans cet-ouvrage-là, on peut écrire

$$i\mathcal{R} = \mathcal{S}h *_{sr} \Gamma_0.$$

PROPOSITION. 1. Les foncteurs c_h et i_r commutent: $c_h \cdot i_r = i_r \cdot c_h$.

2. Les foncteurs s_h et i_r commutent: $s_h \cdot i_r = i_r \cdot s_h$.

Références

1. Adàmek J., Herrlich H., Strecker G. S. Abstract and concrete categories. Boston, 2005.
2. Berezansky J.A. Les espaces inductivment reflexifs localement convexes. Doklady Ak. Nauk. SSSR, 182-1, 1966. p. 20-22 (en russe).
3. Botnaru D. Couples des souscatégories conjugées. Uspehi Math. Nauk., XXXI-3(189), 1976. p. 203-204 (en russe).
4. Botnaru D. Structures bicatégorielles complementaires. ROMAI J. 5-2(2009), p. 5-27.
5. Botnaru D., Cerbu O. Semireflexif product of two subcategories. Proc. Sixth Congress of Romanian Math. Bucharest, 1(2007). p. 5-19.
6. Botnaru D., Gysin V.B. Monomorphismes stables de la catégorie des espaces localement convexes. Bulletin. Acad. Sc. R.S.S.Moldova., 1(1973). p. 3-7 (en russe).
7. Brudovsky B.S. Sur k- et c-reflexivité des espaces localement convexes. Lietuvos Math. Bulletin, VII-1(1967). p. 17-21 (en russe).
8. Brudovsky B.S. Applications du type s des espaces localement convexes. Dokl. Ak. Nauk SSSR, 180-1(1968). p. 15-17 (en russe).
9. Bouneaev M.M. Loi exponentielle pour quelques souscatégories de la catégorie des espaces localement convexes. Func. an. Mejvouz. sb., Oulianovsk, 8(1977). p. 40-44 (en russe).
10. Bouneaev M.M. Sur le théorème des graphes fermés, Func. an. Mejvouz. sb., Oulianovsk, 19(1982). p. 26-34 (en russe).

11. Bouneaev M.M. C-ferméture dans les espaces localement convexes et le théorème du graphe fermé. Izvestia VUZ, Seria Matematica, 10(1990). p. 58-61 (en russe).
12. Dazord J., Jourlin U. Sur quelques classes des espaces localement convexes. Publ. Dep. Math., Lyon, 8-2(1971). p. 39-69.
13. Gheyler V.A., Ghisin V.B. Dualité généralisée pour les espaces localement convexes. Func. an., Mejvouz. sb., Oulianovsk, 11(1978). p. 41-50 (en russe).
14. Grothendieck A. Topological vector spaces. Gordon and Breach, New York London Paris, 1973.
15. Martineau A. Sur une propriété universelle de l'espace de distributions de M. Schwartz. C. R. Acad. Sci. Paris, 259 (1964). p. 3162-3164.
16. Pietsch A. Nukleare local konvex räume. Academie-Verlad, Berlin, 1965.
17. Radenović S. Some properties of c-reflexive locally convex spaces. Univ. Belgrad Publ. Electrotehn. Fak. Ser. Mat., 18 (2007). p. 52-58.
18. Radenović S., Kadelburg Z. Three-spaces-problem for inductively (semi)-reflexive locally convex spaces. Pub. de l'Institut Math., 77(91), 2005. p. 1-6.
19. Raïkov D.A. Loi exponentielle pour les espaces des applications linéaires continues Mat.sb.,7(109), 2(1965). p. 279-302 (en russe).
20. Robertson A. P., Robertson W. J. Topological vector spaces. Cambridge University Press, 1964.
21. Schaefer H.H. Topological vector spaces. Macmillan Company, New York, 1966.
22. Sekevanov V.S. Espaces localement convexes $\mathcal{B}$-inductifs reflexifs. Func. an. Mejvouz. sb., Oulianovsk, 14(1980). p. 128-131 (en russe).
23. Sekevanov V.S. Sur les deux généralités de le reflexivité des espaces localement convexes. Math. Zametki, 35-3(1984). p. 415-424 (en russe).
24. Slawikowski W. On continuity of invers operators. Bull. Amer. Math. Soc., 67-5(1961). p. 467-470.

SOME PROPERTIES OF LEFT PRODUCT OF TWO SUBCATEGORIES

Dumitru BOTNARU*, prof. univ., dr. hab.
Alina ŢURCANU**, lector univ., dr.
*Tiraspol State University
**Technical University of Moldova

Abstract. We study some properties of left product of two subcategories: one coreflective and one reflective in the category of local convex topological vectorial Hausdorff spaces. In this work on examined the situation generated by a structures of factorization $(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'')$ with certain properties, allowing to prove that the left product of some coreflective subcategories with any $\mathcal{P}''$ - reflective subcategory is one and the same. In addition, be indicated examples of coreflectors and reflectors functors which commutes.
Key words: coreflective and reflective subcategory, left product of two subcategories, coreflective subcategory of the topological Mackey spaces, subcategory of spaces with weak topology.

UNELE PROPRIETĂŢI ALE PRODUSULUI DE STÂNGA A DOUĂ SUBCATEGORII

Rezumat. Vom studia unele proprietăţi ale produsului de stânga a două subcategorii: una coreflectivă şi una reflectivă din categoria spaţiilor topologice Hausdorff vectoriale local convexe. În acest articol se va examina situaţia generată de structurile de factorizare $(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'')$ cu anumite proprietăţi, care va permite să demonstrăm că produsul de stânga a unor subcategorii coreflective cu orice $\mathcal{P}''$ - subcategorie reflectivă este una şi aceiaşi. În plus, vor fi indicate example de functori coreflectori şi reflectori care comută.
Cuvinte cheie: subcategorie coreflectivă şi reflectivă , produsul de stânga a două subcategorii, subcategoria coreflectivă a spaţiilor topologice Mackey, subcategoria spaţiilor cu topologie slabă.

2010 MSC: 46 M 15; 18 B 30.

In category $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ of the local convex topological vectorial Hausdorff spaces are studied the properties of the left product of two subcategories $\mathcal{K} *_s \mathcal{R}$ - one coreflective $\mathcal{K}$ and one reflective $\mathcal{R}$. On indicate sufficient conditions, that this product should be a coreflective subcategory (Theorem 2). We indicate examples when this product is not a coreflective subcategory (Proposition 1). We denote:

$\varepsilon\mathcal{R} = \{e \in \mathcal{E}pi | r(e) \in \mathcal{I}so\}$, and $\mu\mathcal{K} = \{m \in \mathcal{M}ono \mid k(m) \in \mathcal{I}so\}$,

where $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ and $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ are the respective functors. It is known that the $((\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_p, ((\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_p^{\rfloor}))$ which we will note $(\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$ or $(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'')$ is a structure of factorization in $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, (to see [1]). Here $(\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u)$ is a structure of factorization defined by class $\mathcal{M}_u$ of universal monomorphisms (to see [1], [4]).

$\mathcal{R}$ is the smallest element in the class of $\mathcal{P}''$-reflective subcategories and there is the smallest element $\mathcal{M}$ in the $\mathbb{K}(\mathcal{I}'')$ class of $\mathcal{I}''$-reflective subcategories. For any $\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{I}'')$ and anything $\mathcal{R}_1 \in \mathbb{R}(\mathcal{P}'')$ we have $\mathcal{K} = \mathcal{K} *_{sr} \mathcal{R}_1$ (Theorem 3). It is demonstrates that $\overline{\mathcal{M}} = \tilde{\mathcal{M}} *_s \mathcal{R}$, where $\tilde{\mathcal{M}}$ is the subcategory of Mackey spaces(Theorem 7). If $\mathcal{R}$ contains subcategory $\mathcal{S}$ of the spaces with weak topology, then functors $\overline{m} : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}$ and $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{R}$ commute: $\overline{m} \cdot r = r \cdot \overline{m}$ (Corollary 2).

We will use the following notation.

The structure of factorization:

$(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p) =$ (the class of universal epimorphisms, the class of precise monomorphisms) $=$ (the class of surjective applications, the class of topological inclusions);

$(\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u) =$ (the class of precise epimorphisms, the class of universal monomorphisms)(to see [1]);

The coreflective and reflective subcategory:

$\tilde{\mathcal{M}}$ - the coreflective subcategory of spaces with Mackey topology;

Σ - the coreflective subcategory of the spaces with the strongest locally convex topology;

$\mathcal{S}$ - the subcategory of spaces with weak locally convex topology;

Π - the subcategory of complete spaces with a weak topology;

$\mathbb{K}$ - the class of nonzero coreflective subcategories;

$\mathbb{R}$ - the class of nonzero reflective subcategories.

Concerning the notions and notations in category $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ see [6].

Either $\mathcal{B}$ a class of bimorphisms. We denote $\mathbb{K}(\mathcal{B})$, (respectively $\mathbb{R}(\mathcal{B})$) - the class of $\mathcal{B}$-coreflective subcategories (respectively $\mathcal{B}$-reflective).

Let $\mathcal{K}$ be is a epicoreflective subcategory, and $\mathcal{R}$ is a monoreflective subcategory of category $\mathcal{C}$ with corresponding functors $k : \mathcal{C} \to \mathcal{K}$ and $r : \mathcal{C} \to \mathcal{R}$. For any object X of category $\mathcal{C}$ either $k^X : kX \to X$ and $r^X : X \to rX$ $\mathcal{K}$-coreplica and $\mathcal{R}$-replica to this object. Further, either $r^{kX} : kX \to rkX$ $\mathcal{R}$-replica of object kX, and $r(k^X) : rkX \to rX$ that unique morphism for which

$$r(k^X) \cdot r^{kX} = r^X \cdot k^X. \tag{1}$$

On morphisms r^X and $r(k^X)$ we build the pull-back square

$$r^X \cdot w^X = r(k^X) \cdot f^X. \tag{2}$$

From equality (1) there exists a morphism t^X so that

$$w^X \cdot t^X = k^X, \tag{3}$$

$$f^X \cdot t^X = r^{kX}. \tag{4}$$

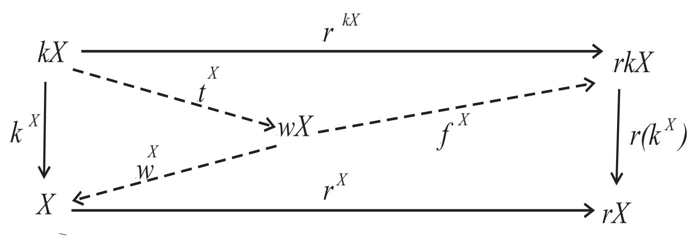


Diagram of the left product (PS)

We denote by $\mathcal{W} = \mathcal{K} *_s \mathcal{R}$ the full subcategory of category $\mathcal{C}$ consisting of all objects isomorphic to objects form wX.

Definition 1. The subcategory $\mathcal{W} = \mathcal{K} *_s \mathcal{R}$ is called the s-product or the left product of subcategories $\mathcal{K}$ and $\mathcal{R}$.

Duality is defined the right product of two subcategories $\mathcal{V} = \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$.

Check easy as correspondence $X \mapsto wX$ defines a functor $w : \mathcal{C} \to \mathcal{W}$. We shall say that $\mathcal{W}$ is a coreflective subcategory, if w is an coreflector functor.

Examples have been constructed, showing that the left product of two subcategories is not a coreflective subcategory. Thereby emerged necessity to find sufficient conditions when the left product is a coreflective subcategory. In the paper [3] were established a series of necessary and sufficient conditions for that left product to be a coreflective subcategory.

The following theorems indicates sufficient conditions for that left product to be a coreflective subcategory, and the right product of two subcategories to be a reflective subcategory.

THEOREM 1. *1. Let $\mathcal{K}$ be a $\mathcal{M}_u$-coreflective subcategory of the category $\mathcal{C}$. Then for any reflective subcategory $\mathcal{R}$ of the category $\mathcal{C}$ we have:*

a) *the left product $\mathcal{K} *_s \mathcal{R}$ is a $\mathcal{M}_u$-coreflective subcategory of category $\mathcal{C}$;*

b) *the right product $\mathcal{K} *_d \mathcal{R}$ is a reflective subcategory of category $\mathcal{C}$.*

1^0. Let $\mathcal{R}$ be a $\mathcal{E}_u$-reflective subcategory of category $\mathcal{C}$. Then for any coreflective subcategory $\mathcal{K}$ of category $\mathcal{C}$ we have:

a) *the right product $\mathcal{K} *_d \mathcal{R}$ is a $\mathcal{E}_u$-reflective subcategory of category $\mathcal{C}$;*

b) *the left product $\mathcal{K} *_s \mathcal{R}$ is a coreflective subcategory of category $\mathcal{C}$.*

For the category $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ previous theorem can be formulated as such:

THEOREM 2. *1. Let $\mathcal{K}$ be is a coreflective subcategory of category $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ and $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$. Then for any reflective subcategory $\mathcal{R}$ of category $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ we have:*

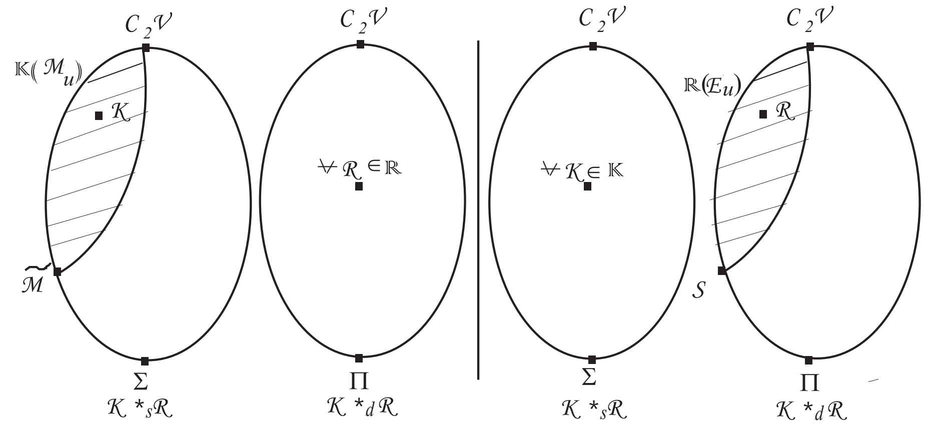
a) the left product $\mathcal{K} *_s \mathcal{R}$ is a coreflective subcategory of category $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ and $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K} *_s \mathcal{R}$;

b) the right product $\mathcal{K} *_d \mathcal{R}$ is a reflective subcategory of category $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

1^0. Let $\mathcal{R}$ be is a reflective subcategory of category $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ and $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$. Then for any coreflective subcategory $\mathcal{K}$ of category $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ we have:

a) the right product $\mathcal{K} *_d \mathcal{R}$ is a reflective subcategory of category $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ and $\mathcal{S} \subset \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$;

b) the left product $\mathcal{K} *_s \mathcal{R}$ is a coreflective subcategory of category $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.



The above diagram indicates the cases when the left product is a coreflective subcategory, and cases where the right product is a reflective subcategory. The left product is not always a reflective subcategory. In category $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ and in the category Th of Tihonov spaces there are examples when this product is not a reflective subcategory (see [5]).

PROPOSITION 1. *In the category $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$*

1. *The right product $\Sigma *_d \Pi$ is not a reflective subcategory.*
2. *The left product $\Sigma *_s \Pi$ is not a coreflective subcategory.*

Proof. 1. We build the following diagram for object X does not belong to subcategory Π.

$$\begin{tikzcd}
\sigma X \arrow[rr, "\sigma(\pi^X)"] \arrow[dd, "\sigma^X"'] & & \sigma\pi X \arrow[dd, "\sigma^{\pi X}"] \arrow[dl, dashed, "g^X = k^{vX}"'] \\
 & vX \arrow[dr, dashed, "u^X"] & \\
X \arrow[rr, "\pi^X"'] \arrow[ur, dashed, "v^X"] & & \pi X
\end{tikzcd}$$

Because π^X is un *mono*, it results as well $\sigma(\pi^X)$ it's the same. Hence $\sigma(\pi^X)$ is sectionalized. So and v^X is sectionalized. If v^X is un *epi*, then it is un *iso*. In this case $\pi^X \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$, i.e. π^X is un *iso*.

2. Is demonstrated in an analogous manner. □

In cases where the left or right product is not a coreflective (respectively reflective) subcategory recourse is had to the factorization of these products (see [5]).

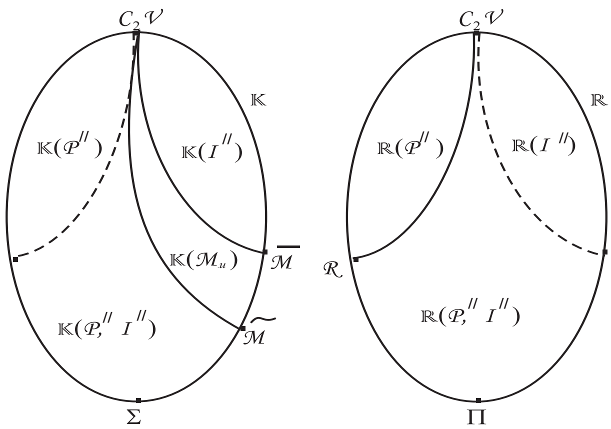
Let $\mathcal{R}$ be a nonzero reflective subcategory of category $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, for which we fix the structure of factorization $(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'') = (\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$, where $\mathcal{P}''(\mathcal{R}) = (\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_p$ (see [1]). This structure divides both the lattice $\mathbb{K}$ of nonzero coreflective subcategories, as well as lattice $\mathbb{R}$ of nonzero reflective subcategories in three classes:

$\mathbb{K}$ - $\mathbb{K}(\mathcal{P}'')$, $\mathbb{K}(\mathcal{I}'')$, $\mathbb{K}(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'')$;

$\mathbb{R}$ - $\mathbb{R}(\mathcal{P}'')$, $\mathbb{R}(\mathcal{I}'')$, $\mathbb{R}(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'')$.

where $\mathbb{K}(\mathcal{P}'') = \{\mathcal{K} \in \mathbb{K} | \mathcal{K}$ is $\mathcal{P}''$-coreflective$\}$, $\mathbb{K}(\mathcal{I}'') = \{\mathcal{K} \in \mathbb{K} | \mathcal{K}$ is $\mathcal{I}''$-coreflective$\}$, $\mathbb{K}(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'') = \{\mathbb{K} \setminus (\mathbb{K}(\mathcal{P}'') \cup \mathbb{K}(\mathcal{I}''))\} \cup \{\mathcal{C}_2\mathcal{V}\}$, and analogue division of lattice $\mathbb{R}$.

LEMMA 1. $\mathbb{K}(\mathcal{I}'') \subset \mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$.



Proof. Because $\mathcal{I}'' \subset \mathcal{M}_u$, it follows that any $\mathcal{I}''$-coreflective subcategory it is also $\mathcal{M}_u$-coreflective. It remains to be remembered that $\tilde{\mathcal{M}}$ is the smallest element in the class $\mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$. □

Thus class $\mathbb{K}(\mathcal{I}'')$ possess the smallest element that we will write $\overline{\mathcal{M}}$ and the class $\mathbb{R}(\mathcal{P}'')$ - the smallest element $\mathcal{R}$. The $\overline{\mathcal{M}}$-coreplique of an object X is obtained by performing $(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'')$-factorization of the Σ-coreplique $\sigma^X : \sigma X \to X$

$$\sigma^X = i^X \cdot p^X.$$

$$\begin{tikzcd} \sigma X \arrow[r, "p^X"] & pX \arrow[r, "i^X"] & X \end{tikzcd}$$

Then i^X is $\overline{\mathcal{M}}$-coreplica of the object X.

LEMMA 2. *Let $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ be a coreflective subcategory for which the product $\mathcal{K} *_s \mathcal{R}$ is a coreflective subcategory, and $(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'') = (\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$. The following statements are equivalent:*

1. $\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$.
2. $\mathcal{K} *_s \mathcal{R} \in \mathbb{K}(\mathcal{I}'')$.

Proof. $1 \Rightarrow 2$. Because $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$, the product $\mathcal{K} *_s \mathcal{R}$ is a coreflective subcategory (Theorem 2). Let's build the diagram (PS) for un arbitrary object X of category $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

$$\begin{tikzcd} kX \arrow[rr, "r^{kX}"] \arrow[dr, dashed, "t^X"] \arrow[dd, "k^X"'] & & rkX \arrow[dd, "r(k^X)"] \\ & wX \arrow[ur, dashed, "f^X = r^{wX}"'] \arrow[dl, dashed, "w^X"] & \\ X \arrow[rr, "r^X"] & & rX \end{tikzcd}$$

In equality

$$k^X = w^X \cdot t^X \tag{1}$$

$k^X \in \mathcal{M}_u$, and $t^X \in \mathcal{E}pi$. Because class $\mathcal{M}_u$ is $\mathcal{E}pi$-cohereditary (see [1]), we deduce that $w^X \in \mathcal{M}_u$. So

$$r^X \cdot w^X = r(k^X) \cdot r^{wX}, \tag{2}$$

is an pull-back square and $w^X \in \mathcal{M}_u$. According to the Theorem 7.3 [4] $w^X \in \mathcal{I}'' = \mathcal{I}''(\mathcal{R})$.

$2 \Rightarrow 1$. In equality

$$r^{kX} = r^{wX} \cdot t^X \tag{3}$$

$r^{kX} \in \mathcal{M}_u$. So and $t^X \in \mathcal{M}_u$. Thus $w^X \in \mathcal{I}'' \subset \mathcal{M}_u$ and $t^X \in \mathcal{M}_u$. From equality (1) it results that $k^X \in \mathcal{M}_u$. □

THEOREM 3. *Let $\mathcal{K}$ be a coreflective subcategory of category $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$, and $(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'') = (\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$. Then the following statements are equivalent:*

1. $\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{I}'')$.
2. $\mathcal{K} = \mathcal{K} *_s \mathcal{R}$.
3. *For any element $\mathcal{R}_1 \in \mathbb{R}(\mathcal{P}'')$, we have $\mathcal{K} = \mathcal{K} *_s \mathcal{R}_1$.*

Proof. We will demonstrate the following implications: $1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 1$.

$1 \Longrightarrow 2$. For arbitrary object X of the category $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ let $k^X : kX \to X$ $\mathcal{K}$-coreplica be, and $r^X : X \to rX$ and $r^{kX} : kX \to rkX$ the $\mathcal{R}$-replicas of the respectively objects. We have the commutative square

$$r^X \cdot k^X = r(k^X) \cdot r^{kX}. \tag{1}$$

Because $\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{I}'')$, it results that $k^X \in \mathcal{I}''$, and the square (1) is pull-back (Theorem 7.3 [4]). So $\mathcal{K} = \mathcal{K} *_s \mathcal{R}$.

$2 \Longrightarrow 3$. Let $\mathcal{K} = \mathcal{K} *_s \mathcal{R}$ and $\mathcal{R}_1 \in \mathbb{R}(\mathcal{P}'')$ be. For the object $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ let be $k^X : kX \to X$ $\mathcal{K}$-coreplica, $r_1^X : X \to r_1X$ and $r_1^{kX} : kX \to r_1kX$ $\mathcal{R}_1$-replicas of respective objects, and $r^X : X \to rX$ and $r^{kX} : kX \to rkX$ $\mathcal{R}$-replicas of respective objects. Because $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_1$ we deduce that

$$r^{kX} = f^{r_1kX} \cdot r_1^{kX}, \tag{2}$$

$$r^X = f^{r_1X} \cdot r_1^X, \tag{3}$$

for two morphisms f^{r_1kX} şi f^{r_1X}. We still have the equals:

$$r_1^X \cdot k^X = r_1(k^X) \cdot r_1^{kX}, \tag{4}$$

$$r^X \cdot k^X = r(k^X) \cdot r^{kX}. \tag{5}$$

From these results we have and the equality

$$f^{r_1X} \cdot r_1(k^X) = r(k^X) \cdot f^{r_1kX}. \tag{6}$$

According to the hypothesis, the square (5) is pull-back, and in this diagram all morphisms are bimorphisms. It is easy to check that square (4) is also pull-back.

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[r, dashed, "r_1^{kX}"] \arrow[rr, bend left, "r^{kX}"] \arrow[d, "k^X"'] & r_1kX \arrow[r, dashed, "f^{r_1kX}"] \arrow[d, "r_1(k^X)"] & rkX \arrow[d, "r(k^X)"] \\
X \arrow[r, dashed, "r_1^X"] \arrow[rr, bend right, "r^X"'] & r_1X \arrow[r, dashed, "f^{r_1X}"] & rX
\end{tikzcd}$$

$3 \Longrightarrow 1$. Because $\mathcal{K} = \mathcal{K} *_s \mathcal{R}$, it results that the square

$$r^X \cdot k^X = r(k^X) \cdot r^{kX} \tag{7}$$

is pull-back. On the other hand $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$. So $k^X \in \mathcal{M}_u$. Therefore $k^X \in \mathcal{I}''$, and $\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{I}'')$. □

The reflective subcategory $\mathcal{R}$ establishes the following relationship of $\mathcal{R}$-equivalence in the class $\mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$: $\mathcal{K}_1 \sim_{\mathcal{R}} \mathcal{K}_2 \Longleftrightarrow \mathcal{K}_1 *_s \mathcal{R} = \mathcal{K}_2 *_s \mathcal{R}$. From Lemma 2 and the fact that $(\mathcal{K} *_s \mathcal{R}) *_s \mathcal{R} = \mathcal{K} *_s \mathcal{R}$ ([3], Proposition 4.2) We infer that any element of the lattice $\mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$ Is equivalent to an element of the lattice $\mathbb{K}(\mathcal{I}'')$. Further,

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{K} *_s \mathcal{R}$$

So $\mathcal{K} *_s \mathcal{R}$ is the biggest element in its equivalence class $\mathbb{A}(\mathcal{K})$.

LEMMA 3. *Let $\mathbb{A}$ be a class of $\mathcal{R}$-equivalence elements. Then $\mathcal{W}$ is the biggest element in the class $\mathbb{A}$, where $\mathcal{W} = \mathcal{K} *_s \mathcal{R}$ with $\mathcal{K} \in \mathbb{A}$.*□

LEMMA 4. *Let $\mathcal{K}_1 \sim_{\mathcal{R}} \mathcal{K}_2$ and $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{K}_2$ be. Then $\mathcal{K}_1 \sim_{\mathcal{R}} \mathcal{K} \sim_{\mathcal{R}} \mathcal{K}_2$.*□

Let $\mathbb{A}$ be a class of $\mathcal{R}$-equivalence elements with the biggest element $\mathcal{W}$. According mentioned above for any element $\mathcal{K} \in \mathbb{A}$ we have

$$rkX \sim rwX, \forall X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|.$$

Let be

$$\mathcal{A}' = \cap\{\mathcal{K} | \mathcal{K} \in \mathbb{A}\}.$$

$\mathcal{A}'$ is a coreflective subcategory and because $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$ for any $\mathcal{K} \in \mathbb{A}$, we deduced that $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{A}'$. It is evident, the class $\mathbb{A}$ possesses the smallest element, iff $\mathcal{A}' \in \mathbb{A}$.

LEMMA 5. *Let* $\mathcal{A}' \in \mathbb{A}$ *be. Then* $\mathbb{A} = \{\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{M}_u) | \mathcal{A}' \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{W}\}$*, where* $\mathcal{W} = \mathcal{A}' *_s \mathcal{R}$.□

The following result chows that the smallest element $\overline{\mathcal{M}}$ of the class $\mathbb{K}(\mathcal{I}''(\mathcal{R}))$ can also be obtained as a left product, without resorting to the factorization structure $(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'') = (\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$.

THEOREM 4. $\overline{\mathcal{M}} = \tilde{\mathcal{M}} *_s \mathcal{R}$.

Proof. We build the diagram (PS) for an arbitrary object X of category $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ and for subcategories $\tilde{\mathcal{M}}$ and $\mathcal{R}$.

$$\begin{tikzcd}
mX \arrow[rr, "r^{mX}"] \arrow[dd, "m^X"'] \arrow[dr, dashed, "t^X"'] & & rmX=rwX \arrow[dd, "r(m^X)=r(w^X)"] \\
& wX \arrow[ur, dashed, "f^X=r^{wX}"'] \arrow[dl, dashed, "w^X"'] & \\
X \arrow[rr, "r^X"] & & rX
\end{tikzcd}$$

We write the respectively equality

$$r^X \cdot m^X = r(m^X) \cdot r^{mX}, \tag{1}$$

where $m^X : mX \to X$, is $\tilde{\mathcal{M}}$-coreplica of object X, and r^X and r^{mX} - $\mathcal{R}$-replicas of respective objects and equality (1) takes place for a morphism $r(m^X)$.

$$r^X \cdot w^X = r(m^X) \cdot f^X \tag{2}$$

is the pull-back square built on morphisms r^X and $r(m^X)$. Then

$$m^X = w^X \cdot t^X, \tag{3}$$

$$r^{mX} = f^X \cdot t^X, \tag{4}$$

for a morphism t^X. We have r^X, $m^X \in \mathcal{M}_u$ and from equality (1) it results that $r(m^X) \cdot r^{mX} \in \mathcal{M}_u$.

Because class $\mathcal{M}_u$ is $\mathcal{E}pi$-cohereditary (see [1]) and $r^X \in \mathcal{E}pi$, we deduce that $r(m^X) \in \mathcal{M}_u$. Then in pull-back square (2) it results that $w^X \in \mathcal{M}_u$, and from equality (3) we deduce that $w^X \in \mathcal{E}_u$. So in equality (3) all morphisms belong to the class $\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$. As mentioned above (see [3]) f^X is the $\mathcal{R}$-replica of object wX, and $r(m^X) = r(w^X)$. So square

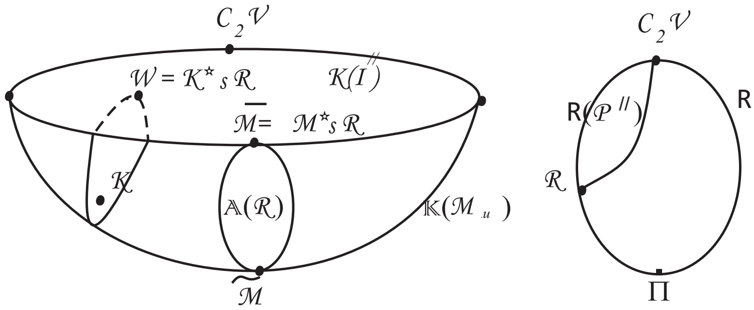
(2) is pull-back, and $w^X \in \mathcal{M}_u$. According to the Theorem 7.3 [4] $w^X \in \mathcal{I}''(\mathcal{R})$. Further, t^X is un epi. Then from equality (4) results that $t^X \in \varepsilon\mathcal{R}$. Because $\mathcal{P}''(\mathcal{R}) = (\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_p$ we deduce that $t^X \in \mathcal{P}''(\mathcal{R})$. So we get that (3) is $(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'')$-factoring morphism m^X, and the coreflective subcategory $\mathcal{W} = \tilde{\mathcal{M}} *_s \mathcal{R}$ is equal to the subcategory $\overline{\mathcal{M}}$. □

COROLLARY 1. 1. *Class* $\mathbb{A}(\tilde{\mathcal{M}})$ *of elements in* $\mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$ $\mathcal{R}$*-equivalents with element* $\tilde{\mathcal{M}}$ *possesses the biggest element* $\overline{\mathcal{M}} = \tilde{\mathcal{M}} *_s \mathcal{R}$, and

$$\mathbb{A}(\tilde{\mathcal{M}}) = \{\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{M}_u) | \tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K} \subset (\mathcal{M} *_s \mathcal{R})\}.$$

2. *Because* $\mathcal{C}_2\mathcal{V} *_s \mathcal{R} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *the class of elements* $\mathcal{R}$*-echivalents with* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *contains one single element* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. □

From the previous results, we have the following presentation of the latice $\mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$ and the classes of $\mathcal{R}$-equivalence.



Let's highlight how the application $*_s\mathcal{R}$ works on the class $\mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$.

Let $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ be. This reflective subcategory generating the factorization structure $(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'') = (\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$. Respectively, this structure divides the lattice $\mathbb{K}$ of nonzero coreflective subcategories into three classes:

$\mathbb{K} - \mathbb{K}(\mathcal{P}'')$, $\mathbb{K}(\mathcal{I}'')$, $\mathbb{K}(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'')$.

Remark 1. 1. Always $\mathbb{K}(\mathcal{I}''(\mathcal{R})) \subset \{\mathcal{T} \in \mathbb{K} | \bar{\mathcal{M}} \subset \mathcal{T}\}$. But these classes may be different.

2. $\mathbb{R}(\mathcal{P}''(\mathcal{R})) = \{\mathcal{H} \in \mathbb{R} | \mathcal{R} \subset \mathcal{H}\}$.

3. Let $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_1 \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_u)$, $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T} *_s \mathcal{R}$ be. Tnen $\mathcal{T} *_s \mathcal{R} = \mathcal{T}_1 *_s \mathcal{R}$ (see[3]).

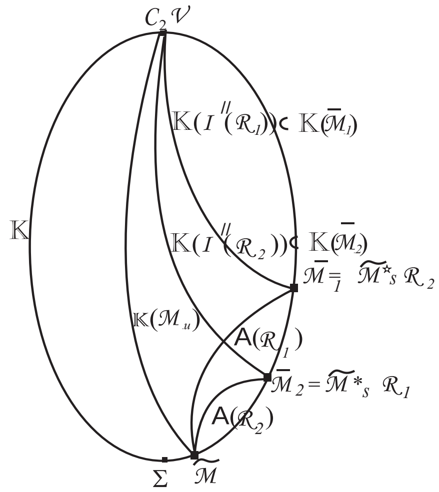
THEOREM 5. *Let* $\mathcal{R}$ *be a reflective subcategory of category* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, *and* $(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'') = (\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$. *Then:*

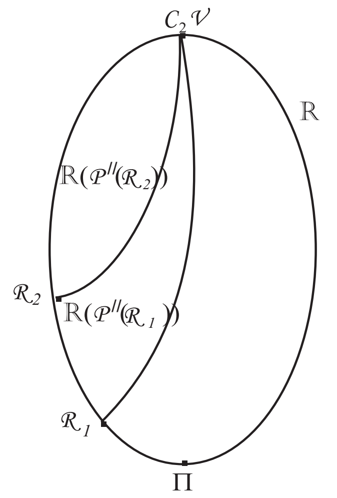
1. $\mathcal{K} *_s \mathcal{R} \in \mathbb{K}(\mathcal{I}'') \Leftrightarrow \mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$.

2. $\mathcal{K} *_s \mathcal{R} = \mathcal{K} \Leftrightarrow \mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{I}'')$.

3. *For any* $\mathcal{K} \in \mathbb{A}(\tilde{\mathcal{M}})$ *and all* $\mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{I}'')$ *it takes place equality* $\mathcal{K} *_s \mathcal{T} = \tilde{\mathcal{M}} *_s \mathcal{R}$.□

Let $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$ be two elements of the lattice $\mathbb{R}$. Then $\mathcal{I}''(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{I}''(\mathcal{R}_2)$, and $\mathcal{P}''(\mathcal{R}_2) \subset \mathcal{P}''(\mathcal{R}_1)$. There is the following relationship between these classes.





THEOREM 6. *Let $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ and $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mu\mathcal{K}$ be. Then:*

1. $S \subset \mathcal{R}$.
2. *The functor $w : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K} *_s \mathcal{R}$ is an reflector functor.*
3. *The functors $w : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K} *_s \mathcal{R}$ and $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ commute: $w \cdot r = r \cdot w$.*

Proof. 1. Because $\mu\mathcal{K} \subset \mathcal{E}_u$ it results that $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mathcal{E}_u$, The conditions $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mathcal{E}_u$ and $S \subset \mathcal{R}$ are equivalents.

2. It results from Theorem 2.

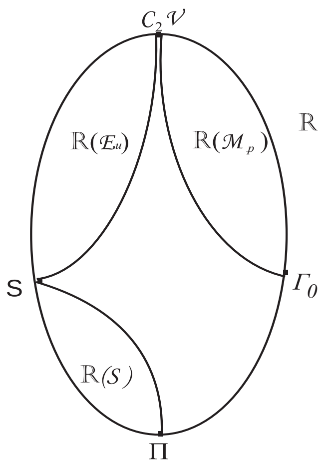
3. We examine the Diagram (PS) for subcategory $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ (see the Diagram from Lemma 2). We have $rwX = rkX$. Further, $krX = kX$, since $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mu\mathcal{K}$. Because $r^{rX} = 1$, it follows that $f^{rX} = 1$, or $w^{rX} = 1$. Therefore $wrX = rkrX = rkX$. □

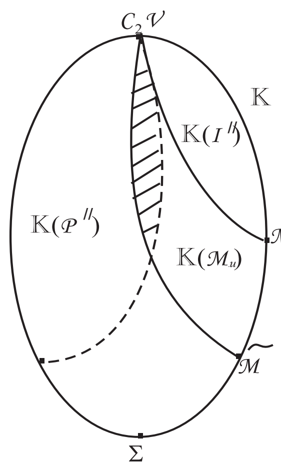
COROLLARY 2. *Either the subcategory $\mathcal{R}$ is $\mathcal{E}_u$-reflective ($S \subset \mathcal{R}$). Then the coreflector functor $\overline{m} : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}$ and the reflector $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{R}$ commute: $\overline{m} \cdot r = r \cdot \overline{m}$.* □

Analogue takes place transformation of the class $\mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$ (class of $\mathcal{E}_u$-reflective subcategories) by the right product.

Example 1. We denote $\mathbb{R}(\mathcal{S}) = \{\mathcal{L} \in \mathbb{R} | \mathcal{L} \subset \mathcal{S}$. Let $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{S})\}$ be. Then

1. $\mathcal{I}''(\mathcal{L}) \subset \mathcal{I}''(\mathcal{S}) = \mathcal{M}_p$.
2. $\mathbb{K}(\mathcal{I}''(\mathcal{L})) = \{\mathcal{C}_2\mathcal{V}\}$. $\mathbb{K}(\mathcal{P}''(\mathcal{L})) = \mathbb{K}$. $\mathbb{K}(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'') = \{\mathcal{C}_2\mathcal{V}\}$





Example 2. Let $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ be. Then $\mathcal{P}''(\mathcal{R}) = (\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_p$, where $(\varepsilon\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}_p$, and $\mathbb{K}(\mathcal{P}''(\mathcal{R})) = \mathbb{K}(\mathcal{E}_p)$.

Class $\mathbb{K}(\mathcal{E}_p)$ contains the element $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ and with each element contains the bigger elements of the lattice $\mathbb{K}$.
Problem. The class $\mathbb{K}(\mathcal{E}_p)$ contains other elements, except the element $\{\mathcal{C}_2\mathcal{V}\}$?
LEMMA 6. Let $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ be $(\Gamma_0 \subset \mathcal{R})$. Then $(\varepsilon\mathcal{R}) \perp (\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u)$.$\square$
COROLLARY 3. Let $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ be. Then $\mathbb{K}(\mathcal{I}''(\mathcal{R})) = \{\mathcal{C}_2\mathcal{V}\}$.$\square$
PROPOSITION 2. Let $\mathcal{K} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ and $\mathcal{K} \neq \widetilde{\mathcal{M}}$ be. Then $\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{P}, \mathcal{I})$.

$$kX \xrightarrow{v_c^X} mX \xrightarrow{m^X} X$$

Proof. Let $m^X : mX \to X$ be the $\tilde{\mathcal{M}}$-coreplica of X, and $v_c^X : kX \to mX$ $\mathcal{K}$-coreplica of mX. There exist an object X so that v_c^X is not isomorphism. So $m^X \cdot v_c^X$ does not belong to the class $\mathcal{M}_u$ and $m^X \cdot v_c^X$ does not belong to the class $\mathcal{E}_p$, because m^X would be an isomorphism.$\square$
Example 3. Let $\mathcal{L} \in \mathbb{R}\backslash(\mathbb{R}(S) \cup \mathbb{R}(\mathcal{M}_p))$ be, and $\mathcal{P}''(\mathcal{L}) = (\varepsilon\mathcal{L}) \circ \mathcal{E}_p$. So $\mathcal{P}''(\mathcal{L})$ intersects with $\mathcal{M}_u$: $\mathcal{P}''(\mathcal{L}) \cap \mathcal{M}_u = \varepsilon\mathcal{L}$. So here it results that $\mathbb{K}(\mathcal{P}''(\mathcal{L})) \cap \mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$ may contain other elements except the element $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

References

1. Botnaru D. Structures bicatégorielles complémentaires. In: ROMAI Journal, V.5, N 2, 2009. p. 5-27.
2. Botnaru D., Cerbu O. Semireflexive product of two subcategories. In: Proc. of the Sixth Congress of Romanian Mathematicians. Bucharest, V.1, 2007. p. 5-19.
3. Botnaru D., Ţurcanu A. Les produits de gauche et de droite de deux souscategories. In: An. Universitatii de Stat Tiraspol: Acta et Coment., VIII. Chisinau: UST, 2003. p. 57-73.
4. Botnaru D., Ţurcanu A. On Giraud subcategories in locally convex space. In: ROMAI Journal, V.I, N 1, 2005. p. 7-30.
5. Botnaru D., Ţurcanu A. The Hewitt spaces as right factorized product of two subcategories. In: Buletinul Institutului Politehnic din Iaşi, Tomul LVII (LXI), Fasc. 1, 2011. p. 37-46.
6. Robertson A. P., Robertson W. J. Topological vector spaces. Cambridge University press. 1964.

ABOUT APPLICATIONS OF TOPOLOGICAL STRUCTURES IN COMPUTER SCIENCES AND COMMUNICATIONS

Mitrofan CHOBAN, academician, dr. hab., full prof.

Ivan BUDANAEV, PhD student

Tiraspol State University

Institute of Mathematics and Computer Sciences of ASM

Abstract. One of the central problems in computer science and, in particular, in programming is the correctness problem which contains:

- the question of whether a program computes a given function;
- the problem to decide whether an element of the space is equal to a fixed element;
- whether two elements of a given space are equal and whether one approximates the other in the specialization order.

In this article is examined the role of quasi-metrics and of Alexandroff spaces in the solving of some problems in the design of systems of the computer science an communications.

Keywords: Alexandroff space, distance, digital space, quasimetric.

APLICAŢIILE STRUCTURILOR TOPOLOGICE ÎN INFORMATICĂ ŞI COMUNICAŢII

Rezumat. Una din problemele centrale ale informaticii şi, în special, ale programării este problema corectitudinii ce conţine:

- problema dacă un program calculează o funcţie dată;
- problema pentru a decide dacă un punct al spaţiului coincide cu un alt punct fixat;
- dacă doua puncte dintr-un spaţiu dat coincid şi dacă unul se apropie (formând o secvenţă) de celalalt în careva ordine specificată.

În acest articol se examinează rolul cvasi-metricilor şi al spaţiilor Alexandroff la rezolvarea unor probleme legate de proiectarea sistemelor din domeniile informaticii şi comunicaţiei.

Cuvinte chee: spaţiu Alexandroff, distanţă, spaţiu digital, quasi-metrică.

1. Introduction

The dynamic transition of our technological civilization to digital processing and data transmission systems created many problems in the design of modern systems in computer science and telecommunications. Providing robustness and noise immunity is one of the most important and difficult tasks in data transmission, recording, playback, and storage. The distance between information plays a paramount role in mathematics, computer science, and other interdisciplinary research areas. The first among many scientists in the field, who presented the theoretical solutions to error detection and error correction problems, were C. Shannon, R. Hamming, and V. Levenshtein (see [44, 45, 23, 29]).

We begin this section with introductions into the field, focusing mainly on abstract monoid of strings $L(A)$.

A monoid is a semigroup with an identity element.

Fix a non-empty set A. The set A is called an *alphabet*. Let $L_0(A)$ be the set of all finite strings $a_1a_2 \dots a_n$ with $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$. Let ε be the empty string and $L(A) = L_0(A) \cup \{\varepsilon\}$. Consider the strings $a_1a_2 \dots a_n$ such that $a_i = \varepsilon$ for some $i \leq n$. We consider that $n = 1$ if each $a_i = \varepsilon$. Denote by $L^*(A)$ the set of such strings.

If $a_i \neq \varepsilon$, for any $i \leq n$ or $n = 1$ and $a_1 = \varepsilon$, the string $a_1 a_2 \dots a_n$ is called a *canonical string* or a *word*. Hence $L(A) \subseteq L^*(A)$ and $L(A)$ is the set of all canonical strings. We consider that

The set

$$Sup(a_1 a_2 \dots a_n) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \cap A$$

is the support of the string $a_1 a_2 \dots a_n$,

$$l^*(a_1 \dots a_n) = max\{i : a_i \neq \varepsilon\}$$

is the duration of the string $a_1 a_2 \dots a_n$ and

$$l(a_1 \dots a_n) = |Sup(a_1 \dots a_n)|$$

is the length of the string $a_1 a_2 \dots a_n$.

For any string $a_1 a_2 \dots a_n$ we have $l(a_1 \dots a_n) \leq l^*(a_1 \dots a_n)$. By definition, $l(\varepsilon) = l^*(\varepsilon) = 0$.

For two strings $a_1 \dots a_n$ and $b_1 \dots b_m$, their product(concatenation) is $a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$. We put $\varepsilon \cdot a = a \cdot \varepsilon = a$ for any $a \in L^*(A)$. If $a = a_1 a_2 ... a_n \in L^*(A)$ and $n \geq 2$, then $\Psi(b) = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$ is the canonical word equivalent with the string a. If $\Psi(a) = \Psi(b)$,then the strings a, b are called equivalent. In this case any string is equivalent to one unique canonical string.

The sets $L(A)$ and $L^*(A)$ become the monoids with identity ε. The mapping $\Psi : L^*(A) \longrightarrow L(A)$ is a homomorphism. Let G be a finite set of generators of a monoid M. In this case unity is an element of G. If M is a group,then for convenience we suppose that the inverse of a generator is a generator. Any word $a = a_1 a_2 ... a_n \in L^*(G)$ determine the element $g(a) = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n \in M$ and $g : L^*(G) \longrightarrow M$ is a homomorphism of $L^*(G)$ onto M. A monoid M is said to have a solvable word problem with respect to the set of generators G if one can effectively determine whether or not two words $a, b \in L^*(G)$ represent the same element in M. A monoid (group) M is said to be computable if it has a recursive realization $\{M, \xi\}$ - i.e. it is isomorphic to the monoid formed by a recursive subset S of the positive integers and a recursive function $\xi(i, j)$ on S that satisfies the monoid (group) multiplication axioms. The monoid $L^*(A)$ is computable and has a solvable word problem.

M. O. Rabin [36] has proved that a finitely generated group (monoid) has a solvable word problem (with respect to a given system of generators) if and only if it is computable. In 1947 Post [34, 35] showed the word problem for semigroups to be undecidable. This result was strengthened in 1950 by Turing [51], who showed the word problem to be undecidable for cancellation semigroups,i.e. semigroups satisfying the cancellation property: if $xy = xz$ or $yx = zx$, then $y = z$.

In 1966 Gurevich [22] showed the word problem to be undecidable for finite semigroups. In [50] by him were proved:

(G1) The undecidability of the word problem for the finite monoid A with the generators $\{a, h, , d, \}$ and identical correlations: $ac = ca$, $ad = da$, $bc = cb$, $bd = db$, $eca = ce$, $edb = de$, $cca = ccae$;

(G2) The undecidability of the word problem for the finite monoid B with the generators $\{a, h, , d, \}$ and identical correlations: $ac = ca$, $ad = da$, $bc = cb$, $bd = db$, $eca = ce$, $edb = de$, $cdca = cdcae$, $caaa = aaa$, $daaa = aaa$. In the monoid is undecidable the word problem for the strings equivalent with the word .

Throughout the history of the subject, computations in groups have been carried out using various normal forms. These usually implicitly solve the word problem for the groups in question. In 1911 Max Dehn [11] proposed that the word problem was an important area of study in its own right together with the conjugacy problem and the group isomorphism problem. In 1912 he gave an algorithm that solves both the word and conjugacy problem for the fundamental groups of closed orientable two-dimensional manifolds of genus greater than or equal to 2 [12]. Subsequent authors have greatly extended Dehn's algorithm and applied it to a wide range of group theoretic decision problems [2, 7, 30, 49].

It was shown by Pyotr Novikov [32] in 1955 that there exists a finitely presented group G such that the word problem for G is undecidable. A different proof was obtained by William Boone in 1958 (see [2, 6, 7, 32]).

One of the central problems in computer science and, in particular, in programming is the correctness problem which contains:

- the question of whether a program computes a given function;

- the problem to decide whether an element of the space is equal to a fixed element;

- whether two elements of a given space are equal and whether one approximates the other in the specialization order.As a rule, a database system maintain items in the form of sequences of special type.

The similarity search process is obtained by defining a similarity function. In many applications a distance function can be easily and more intuitively defined than a similarity function. Moreover,it easy to obtain a similarity function by given a distance function and vice versa. For that we apply the principle: the smaller the distance the higher the similarity.

2. Alexandroff spaces

For a topological space X and the points $a, b \in X$ we put $O(a) = \cap\{U \subset X : x \in U, U$ *is open in* $X\}$ and $a \preceq b$ if and only if $a \in cl_X\{b\}$. Then $\preceq$ is a preordering on X. A binary relation $\preceq$ on a space X is a a preorder, or quasiorder, if it is reflexive and transitive, i.e., for all a, b and c in X, we have that:

- $a \preceq a$ (reflexivity);

- if $a \preceq b$ and $b \preceq c$, then $a \preceq c$(transitivity).

If X is a T_0-space, then $\preceq$ is an ordering on X: if $a \preceq\preceq b$ and $b \preceq a$, then $a = b$ (anti-symmetry).

A topological space X is called a pseudo-discrete space if the intersection of any family of open sets is open. By definition, the space X is a pseudo-discrete space if and only if the sets $O(x)$, $x \in X$, are open in X. A topological space X is called an Alexandroff space if it is a pseudo-discrete T_0-space [3, 4]. A connected Alexandroff space is called a topological digital space.

Quasi-metric [31] on a set X we call a function $d : X \times X \longrightarrow R$ with the properties:

(M1): $d(x, x) = 0$ and $d(x, y) \geq 0$ for all $x, y \in X$;

(M2): $d(x, y) + d(y, x) = 0$ if and only if $x = y$;

(M3): $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ for all $x, y, z \in X$.

If $d(x, y) = d(y, x)$ for all $x, y \in X$, then the quasi-metric d is called a metric.

A function d with the properties (M1) and (M2) is called a distance on a set X. A function d with the property (M1) is called a pseudo-distance on a set X. A function d with the properties (M1) and (M3) is called a pseudo-quasi-metric on a set X.

Let d be a pseudo-distance on X and $B(x,d,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ be the ball with the center x and radius $r > 0$. The set $U \subset X$ is called d-open if for any $x \in U$ there exists $r > 0$ such that $B(x,d,r) \subset U$. The family $T(d)$ of all d-open subsets is the topology on X generated by d. A pseudo-distance space is a sequential space, i.e. a set $B \subset X$ is closed if and only if together with any sequence it contains all its limits [15].

If d is a quasi-metric,then $T(d)$ is a T_0-topology. For any distance that statement is not true.

Example 2.1. Let $n \geq 3$ and $X = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. We put $d(x,x) = 0$ for any $x \in X$, $d(a_i, a_j) = 1$ for $j < i$, $d(a_i, a_{i+1}) = 0$ for any $i < n$ and $d(a_i, a_j = 1$ for $i < i+2 \leq j \leq n$. In the topology $T(d)$ we have $O(a_i) = \{a_j : i \leq j \leq n\}$ for each $i \leq n$. The family $\{O(x) : x \in X\}$ is a base of the T_0-topology $T(d)$.

Example 2.2. Let $X = \{a,b,c\}$. We put $d(x,x) = 0$ for any $x \in X$, $d(a,b) = d(b,c) = d(c,a) = 0$ and $d(a,c = d(c,b) = d(b,a) = 1$. In the topology $T(d)$ we have $O(a) = X$ for each $x \in X$ and $T(d) = \{\emptyset, X\}$ is the anti-discrete topology.

The pseudo-distance d is discrete if there exist a number $c = c(d) > 0$ such that for any two distinct points $x, y \in X$ we have or $d(x,y) = 0$ or $d(x,y) \geq c$ [31, 8, 9]. If d is a discrete quasi-metric on X, then $O(a) = B(a,d,c(d))$ for any point $a \in X$ and the space $(X, T(d))$ is an Alexandroff space. The pseudo-distance is an integer pseudo-distance, if $d(x,y) \in \{0,1,2,...\}$ for any $x, y \in X$. The integer pseudo-distance is discrete with $c(d) = 1$.

If $\preceq$ is a preordering on a set X, then we define two pseudo-quasi-metrics d_l and d_r on X, where:

- $d_l(x,y) = d_r(y,x)$ for any $x, y \in X$ with $y \preceq x$ and $x \preceq y$;
- for $x \preceq y$ and $x \not\succeq y$ we put $d_l(x,y) = 1$, $d_l(y,x) = 0$, $d_r(x,y) = 0$, $d_r(y,x) = 1$;
- if $x \not\preceq y$ and $y \not\preceq X$, then $d_l(x,y) = d_r(x,y) = 1$.

In this case $d_s(x,y) = d_r(x,y) + d_l(x,y)$ is a pseudo-metric. In general, a sum of quasi-metrics is also a quasi-metric, and may not be a metric. If $\preceq$ is an ordering, then d_r, d_l arequasi-metrics and d_s a metric.

For any points $a, b \in X$ we put $(-,a] = \{y \in X : y \preceq a\}$, $[a,+) = \{y \in X : a \preceq y\}$ and $[a,b] = \{y \in X : y \preceq b\} \cap \{y \in X : a \preceq y\}$. The set $L = [a,+)$ is called an ω-set and $o_L = a$.

For any point $a \in X$ we have $B(x, d_l, r) = (-,a]$ and $B(x, d_l, r) = [a,+)$ for any $r \in (0,1]$. We say that $T(\preceq) = T(d_r))$ is the topology induced by the pre-ordering $\preceq$.

Fix a space X. As in [17, 19, 18] we say that V is an f-set if V is open and there exists a point $o_V \in V$ such that $V = [o_V, +)$. Any f-set is an ω-set.

If X is an Alexandroff space, then any set $V = O(x)$ is an f-set with $o_V = x$.

From the above reasoning follows:

Theorem 2.3. *For a topological space X the following assertions are equivalent:*

1. X is a pseudo-discrete space.

2. Any ω-set is an f-set of X.

3. The topology of X is induced by some preordering.

4. The topology of X is generated by some discrete pseudo-quasi-metric.

5. The topology of X is generated by some integer pseudo-quasi-metric.

Corollary 2.4. *For a topological space X the following assertions are equivalent:*

1. X is an Alexandroff space.

2. X is a T_0-space and any ω-set is an f-set of X.

3. The topology of X is induced by some ordering.

4. The topology of X is generated by some discrete quasi-metric.

5. The topology of X is generated by some integer quasi-metric.

3. Spaces and lattices

An ordered set X is called:

- an upper semi-lattices if for any two elements $x, y \in X$ is determined the greatest lower bound $x \vee y$;

- a lower semi-lattices if for any two elements $x, y \in X$ is determined the least upper bound $x \wedge y$;

- a lattices if for any two elements $x, y \in X$ are determined the greatest lower $x \vee y$ and the least upper $x \wedge y$ bounds.

Proposition 3.1. *For an ordered set X the following assertions are equivalent:*

1. X is an upper semi-lattice.

2. Intersection of two ω-sets is an ω-set.

Proof. Let U and V be two ω-sets of X and $W = U \cap V$. If W is an ω-set, then $o_W = o_U \vee o_V$. Inversely, if $a = o_U \vee o_V$, then W is an ω-set with $o_W = a$. The proof is complete.

Proposition 3.2. *For an ordered set $(X, \leq)$ the following assertions are equivalent:*

1. $(X, \leq)$ is a linearly ordered set.

2. Union of two ω-sets is an ω-set.

Proof. Let U and V be two f-sets of X and $W = U \cup V$. If $\leq$ is a linear ordering, then or $U \subset V$, or $V \subset U$ and W is an f-set. Assume that W is an f-set. We have two cases:

Case 1. $o_W \in \{o_U, o_V\}$.

If $o_W = o_U$, then $V \subseteq U$ and $o_U \leq o_V$. In this case $\leq$ is a linear ordering.

Case 2. $o_W \notin \{o_U, o_V\}$.

In this case $o_W \in W$ and $o_W \notin U \cup V = W$, a contradiction. This case is impossible. The proof is complete.

Let X be a T_0-space and $\leq$ be the ordering induced by the topology of X: $x \leq y$ if and only if $x \in cl\{y\}$. A space X is called an f-space if the f-sets form an open base of X and the intersection of two f-sets is empty or an f-set [17]. If X is an f-space, then $X_0 = \{x \in X : [x, +) \textit{ is open}\}$ is the base of X. The base X_0 is dense in X and the weight $w(X) = |X_0|$.

A discrete space is an f-space and the f-sets are singleton sets.

Assume that $X_0 \subset X$. As in [18], the pair $(X_0, \leq)$ is called a subsaile of the space X if for any two points $x, y \in X_0$ for which $[x, +) \cap [y, +) \neq \emptyset$ there exists the upper bound

$x \vee y \in X_0$. The base X_0 of the f-space X is a subsaile of the space X [17, 18].

If $[x,+) \cap [y,+) \neq \emptyset$ ($(-,x] \cap (-,y] \neq \emptyset$), then we say that the points x, y are upper (lower) compatible. If $y \in Int_X[x,+)$, then we put $x \prec y$. By definition, from $x \prec y$ it follows that $x \leq y$. If X is an Alexandroff space, then from $x \leq y$ it follows that $x \prec y$.

An Alexandroff space X is an f-space if and only if for any two upper compatible points $x, y \in X$ there exists $x \vee y \in X$. If an f-space X is an Alexandroff space, then the base of X is X.

Now we mention the following simple relations (see [18]):

(a) if $x \leq y$ and $y \prec z$, then $x \prec z$;

(b) if $x \prec y$ and $y \leq z$, then $x \prec z$;

(c) if $x \leq u \leq z$, $y \leq u \leq z$, $x \prec z$ and $y \prec z$, then $u \prec z$;

(d) if $x_1 \prec y_1 \leq y$, $x_2 \prec y_2 \leq y$ and $x = x_1 \vee x_2$, then $x \prec y$;

(e) if $g : X \longrightarrow Y$ is a continuous mapping, $x, y \in X$ and $x \leq y$, then $g(x) \leq g(y)$.

For the concept of the f-space there exists algebraical (abstract) description [17, 18]. An f-space is a triplet $(X, X_0, \leq)$, where:

- X_0 is a non-empty subset of X;
- $\leq$ is a partial ordering on X;
- if the elements $x, y \in X_0$ are upper compatible, then in X_0 there exists $x \vee y$;
- if $x, y \in X$, $y \not\leq x$, then there exists $z \in X_0$ such that $z \leq y$ and $z \not\leq x$;
- for any $x \in X$ there exists $y \in X_0$ such that $y \leq x$.

A space X is called an A-space if X is a T_0-space and there exists a subsaile $(X_0, \leq)$ for which:

(A1) the family $\{Int_X[x,+) : x \in X_0\}$ is an open base of the space X;

(A2) if $x \in X_0$, $y \in X$ and $x \prec y$, then there exists $z \in X_0$ such that $x \prec z \prec y$.

The subspace X_0 is called a base of the A-space X.

The following two examples are simple, but reflect clearly the structure of A-spaces and f-spaces.

Example 3.3. Let X be the closed interval $[0,1]$ with the topology $T = \{\emptyset, X\} \cup \{(t,1] : t \in X\}$, where $(t,1]$ is semi-open interval $\{x : t < x \leq 1\}$. The space X is a compact T_0-space and the topological ordering on X coincide with the usual linear order on the numerical interval. We have $[0,+) = Int_X[0,+) = X$ and $[x,+) = [x,1)$, $Int_X[x,+) = (x,1]$ for any $x > 0$. The space X is an A-space. If X_0 is dense in X and $0 \in X_0$, then X_0 is a base of X.

Example 3.4. Let X be the space of reals Y be a subset of X and on X we consider the topology $T = \{\emptyset, X\} \cup \{(t,+\infty) : t \in X\} \cup \{[t,+\infty) : t \in Y\}$. The space X is a T_0-space and the topological ordering on X coincide with the usual linear order on the space of real numbers. We have $[y,+) = Int_X[y,+)$ $[x,+\infty)$ for $y \in Y$ and $[x,+) = [x,+\infty)$, $Int_X[x,+)$ $= (x,+\infty)$ for any $x \in X \setminus Y$. The space X is an A-space. If X_0 is a dense subset of the reals and $Y \subset X_0$, then X_0 is a base. If Y is dense in the space of reals, then Y is a base and X is an f-space. If Y is not dense in the space of reals, then X is not an f-space. If $Y = X$, then X is the unique base of X and X is an Alexandroff space too. For $Y \neq X$ the space X is not an Alexandroff space.

Proposition 3.5. *Let X_0 be the base of an A-space X. If $a \in X$ is a minimal element of the ordered set $(X, \leq)$, then $a \in X_0$ and $a \in Int_X[a,+) \subset U$ provided U is open in X and $a \in U$.*

Proof. Since a is a minimal element, $a \in [x,+)$ if and only if $a = x$. Let U be an open subset of X and $a \in U$. then there exists $x \in X_0$ such that $a \in Int_X[x,+) \subset U$. Thus $a = x$, $a \in X_0$ and $a \in Int_X[a,+) \subset U$. The proof is complete.

The following assertion for T_1-spaces was proved in [18].

Proposition 3.6. *For any T_0-space X there exists an f-space X_f which contains X as a dense subspace and weight $w(X_f = w(X)$.*

Proof. Let T be the topology of the space X. Fix an open base $\mathcal{B}$ of the space X. Suppose that $|\mathcal{B}| = w(X)$. We assume that $U \cap V \in \mathcal{B}$ for all $U, V \in \mathcal{B}$ with $U \cap V \neq \emptyset$. If $U \in \mathcal{B}$ is an open f-set, then is determined the point o_U. We put $B_f = \{U \in \mathcal{B} : U \textit{ is an } f\textit{-set}\}$ and $B_+ = \mathcal{B} \setminus B_f$. Let $X_0^f = \{o_U : U \in B_f\}$. Fix a set $X_0^+ = \{o_U : U \in B_+\}$ for which $X_0^+ \cap X$ $= \emptyset$ and the correspondence $o_U \to U$ is a one-to-one mapping of X_0^+ onto B_+. Now we put $X_f = X \cup X_0^+$, $X_0 = X_0^f \cup X_0^+$ and $U^+ = U \cup \{o_V : V \subset U, V \in \mathcal{B}\}$ for each $U \in \mathcal{B}$. If $U, V\mathcal{B}$ and the set $W = U \cap V$ is non-empty, then $W \in \mathcal{B}$, $W^+ = U^+ \cap V^+$ and $U^+ \cap X$ $=U$. Hence $\mathcal{B}^+ = \{U^+ : U \in \mathcal{B}\}$ is an open base of some topology T_f on X_f and (X,T) is a dense subspace of the space (X_f, T_f). The ordering $x \leq y$ on X_f is the following:

- if $x, y \in X$, then the relation between x, y in X_f is as in X;
- if $x = o_U \in X_f \setminus X$ and $y \in X$, then $y \not\leq x$ and $x \leq y$ if and only if $y \in U$;
- if $x = o_U \in X_f \setminus X$ and $y = o_V \in X_f \setminus X$, then $x \leq y$ if and only if $V \subset U$.

In this case for any $U \in \mathcal{B}$ the set U^+ is an f-set and $U^+ = [o_U, +)$. By construction, X_f is an T_0-space. Hence X_f is an f-space and an A-space with the base X_0. The proof is complete.

A space X is called an A_0-space if X is an A-space with the the lower bound, i.e. there exists a point $a \in X$ such that $[a,+) = X$. In this case X is an f-set and $o_X = a$.

If $X \in \mathcal{B}$, then o_X is the the lower bound of the space X_f.

Hence, from the proof of Proposition 3.6 it follows:

Proposition 3.7. *For any T_0-space X there exists an A_0-space X^f which contains X as a dense subspace and weight $w(X^f = w(X)$. Moreover, if X is an A-space, then X is a dense subspace of an A_0-space X^f for which $|X^f \setminus X| = 1$.*

Example 3.8. Let X be an infinite non-discrete T_1-space. Then X is not an A-space. By virtue of Proposition 3.6 X is a dense subspace of the f-space X_f. Therefore the subspace of an f-space is nt obligatory A-space.

We mention that a closed subspace of an A-space is an A-space. Similarly, an open subspace of an A-space is an A-space.

An ordered set X is directed is any two elements $x, y \in X$ are upper compatible, i. e. there exists $z \in X$ such that $xx \leq z$ and $y \leq z$.

In [18] was proposed the following useful construction. Let X be an A-space with the base X_0. Denote by $\Pi(X_0)$ the family of all subsets S of X_0 with the following properties:

- S is a non-empty directed subset of X_0;

- for any $x \in S$ there exists $y \in S$ such that $x \prec y$;

- if $x \in S$, $z \in X_0$ and $z \leq x$, then $z \in S$.

The elements of $\Pi(X_0$ are called s-points. If $x \in X$, then $\eta(x) = (-, x] \cap X_0$ is an s-point. The mapping $\eta : X \longrightarrow \Pi(X_0)$ is a mapping of X into $\Pi(X_0)$. For any $x \in X_0$ we put $\theta(x) = \{S \in \Pi(X_0) : x \in S\}$. The family $\{\theta(x) : x \in X_0\}$ is an open base of the topology on $\Pi(X_0)$. In this case $\eta : X \longrightarrow \Pi(X_0)$ is a topological embedding.

A space X is called a complete A-space if X is an A-space and for any base X_0 of X the mapping $\eta : X \longrightarrow \Pi(X_0)$ is a homeomorphism of X onto $\Pi(X_0)$.

By virtue of Theorem 1 from [18], an A-space X is a complete A-space if and only if for each A-space Y, any base Y_0 of Y and every continuous mapping $\varphi : Y_0 \longrightarrow X$ there exists a continuous mapping $\psi : Y \longrightarrow X$ such that $\varphi = \psi|Y_0$.

Any T_0-space X can be embedded in a T_0-space X_b with the upper bound and $|X_b \setminus X| \leq 1$. If $X \neq (-, x]$ for any point $x \in X$, then fix a point $b \notin X$ and put $X_b = X \cup \{b\}$ and with the topology $T_b = \{\emptyset\} \cup \{U \cup \{b\} : U \in T\}$, where T is the topology of X. In this case the set $\{b\}$ is open and dense in X_b.

An injective space is a complete A_0-space with the upper bound [38, 41, 18].

The A-spaces and injective spaces were introduced by Dana Scott [38, 41] and Yurii L. Ershov [17, 19, 18] with the aims:

- of the construction of a model for Lambda calculus Alonzo Church [38, 41];

- of the analysis of the concept "data types" [38, 41];

- of the investigation the semantics of programming languages [38, 41];

- of the study of computable functionals [17, 19, 18].

If X is a complete A-space, then any non-empty upper directed set have the greatest lower bound (supremum) [18]. From this assertion immediately follows:

- in a complete A_0-space, then any non-empty set have the least upper bound (infimum) [18];

- an injective space is a complete lattice (any non-empty set have the least upper and the the greatest lower bounds) [38, 41].

The following theorem affirmatively solve one Yu. L. Ershov's question ([18], p. 396).

Proposition 3.9. *Assume that Y is a retract of an A-space X. Then Y is an A-space. Moreover, if X is an A_0-space, then Y is an A_0-space too.*

Proof. Let X_0 be the base of the space X.

For the concept of the A-space there exists algebraical (abstract) description. An A-space is a quadruple $(X, X_0, \leq, \prec)$, where:

- $\leq$ is a partial ordering on X;

- X_0 is a subsaile of X;

- $\prec$ is a binary relation on X;

- if $x, y \in X$ and $x \prec y$, then $x \leq y$;

- if $x, y, z \in X$, $x \prec y$ and $y \leq z$, then $x \prec z$;

- if $x, y, z \in X$, $x \leq y$ and $y \prec z$, then $x \prec z$;

- if $x, y \in X_0$, $a \in X$, $x \prec a$ and $y \prec a$, then $x \vee y \in X_0$ and $x \vee y \prec a$;

- if $x, y \in X$, $y \not\leq x$, then there exists $z \in X_0$ such that $z \prec y$ and $z \not\leq x$;

- for any $x \in X$ there exists $y \in X_0$ such that $y \prec x$.

If $(X, X_0, \leq, \prec)$ is an abstract A-space, then $\{U(x) = \{y \in X : x \prec y\} : x \in X_0\}$ is the open base of the topology on X and X_0 is the base of X.

That permit to evolve the abstract concept of "approximation" of the elements by the elements with the "visible" properties. Let $(X, X_0, \leq, \prec)$ be an abstract A-space. If $x, y \in X$ and $x \leq y$, then x is called an "approximation" of y [38, 41]. If $x \in X_0$, $y \in X$ and $x \leq y$, then $x$is an "best approximation" of y. If $x \prec y$ and $x \in X_0$, then x is a "recognized approximation" of y [18].

4. Spaces of strings

Fix a non-empty T_0-space A with a fixed point ε such that $\varepsilon \leq x$ for each point $x \in X$. On $\mathbb{N}$ consider the discrete topology. Denote by $C(\mathbb{N}, A)$ the family of all mappings $s : \mathbb{N} \longrightarrow A$ in the topology of pointwise convergence. The elements of $C(\mathbb{N}, A)$ are called sequences.

Consider that d is a quasi-metric on A. For any two sequences $a, b : \mathbb{N} \longrightarrow A$ we determine the distance $d^*(a, b) = \Sigma\{d(a(i), b(i)) :\in \mathbb{N}\}$. For some $a, b \in C(\mathbb{N}, A)$ we have $d^*(a, b) = \infty$. The distance d^* has the properties:

- $d^*(a, b) \geq 0$;

- $d^*(a, b) + d^*(b, a) = 0$ if and only if $a = b$;

- $d^*(a, c) \leq d^*(a, b) + d^*(b, c)$.

If $s \in C(\mathbb{N}, A)$ is a sequence and $\{s_n \in C(\mathbb{N}, A) : n \in \mathbb{N}\}$ is a sequence of elements from $C(\mathbb{N}, A)$, then:

- $s = lim_{n\to\infty} s_n$ if $s(i) = lim_{n\to\infty} s_n(i)$ for any $i \in \mathbb{N}$ (pointwise convergence);

- $s = lu - lim_{n\to\infty} s_n$ if $lim_{n\to\infty} d^*(s, s_n) = 0$ (uniform convergence)

- $s = u - lim_{n\to\infty} s_n$ if $lim_{n\to\infty}(d^*(s, s_n) + d^*(s_n, s)) = 0$ (uniform convergence).

If the topology of A is generated by the quasi-metric d, then from $s = u - lim_{n\to\infty} s_n$ it follows that $s = lim_{n\to\infty} s_n$.

Fix $s \in C(\mathbb{N}, A)$. The set

$$Sup(s) = s(\mathbb{N}) \setminus \{\varepsilon\}$$

is the support of the sequence s,

$$l^*(s) = max\{i : a_i \neq \varepsilon\}$$

is the duration of the sequence s and

$$l(s) = |\{i : s(i) \neq \varepsilon\}|$$

is the length of the sequence s.

If the set $\{i : s(i) \neq \varepsilon\}$ is infinite, then we put $l(s) = \infty$. Hence $l(s) \leq l^*(s)$. If $s(\mathbb{N}) = \{\varepsilon\}$, then $Sup(s) = \emptyset$ and $l^*(s) = l(s) = 0$.

Denote by $S^*(A)$ the subspace of all sequences $s \in C(\mathbb{N}, A)$ with finite length. The elements of $S^*(A)$ are called strings. If $l(s) = l^(s) = n < \infty$ then we say that s is a canonical string. Let $S(A)$ be the space of all canonical strings.

We have $d^*(a, b) < \infty$ for all $a, b \in S^*(A)$.

If $a, b \in S^*(A)$ and $l^*(s) = n$, then $c = a \cdot b$ is the string with the following properties:

- $c(i) = a(i)$ for $i \leq n$;

- $c(n+i) = b(i)$ for each $i \in \mathbb{N}$.

Then $S^*(A)$ is a semigroup and $(S(A), \cdot)$ is a monoid with the identity ε, where $\varepsilon(i) = \varepsilon$ for each $i \in \mathbb{N}$. We observe that $S(A)$ is not a subsemigroup of the semigroup $S^*(A)$ and that $S(A) \setminus \{\varepsilon\}$ is a subsemigroup of the semigroups $S^*(A)$ and $S(A)$.

If $s \in S^*(A)$ and $l^*(s) = n$, then we put $\Lambda(s) = s(1)s(2)...s(n) \in L^*(A)$. Then $\Lambda : S^*(A) \longrightarrow L^*(A)$ is an isomorphism of $S^*(A)$ onto $L^*(A)$ and $\Lambda(S(A)) = L(A)$.

If d is an integer quasi-metric and $s \in S^*(A)$, then:

- from $s = lu - lim_{n\to\infty} s_n$ it follows that $s = lim_{n\to\infty} s_n$;

- from $s = u - lim_{n\to\infty} s_n$ it follows that $s = lu - lim_{n\to\infty} s_n$ and there exists $k \in \mathbb{N}$ such that $s_n = s$ for any $n \geq k$.

Let $(A, A_0, \leq, \prec)$ be an A_0-space with the topology T. Then the space $C(\mathbb{N}, A)$ in the topology of pointwise convergence is an A_0-space ([18], Theorem 2). If A is a complete A_0-space (injective space), then the space $C(\mathbb{N}, A)$ in the topology of pointwise convergence is a complete A_0-space (injective space) ([18], Theorem 3).

Let G be a monoid. The quasimetric ρ on G is stable if $\rho(x \cdot u, y \cdot v) \leq \rho(x, y) + \rho(u, v)$ for all $x, y, u, v \in G$. The topology $T(\rho)$ generate by a stable quasi-metric on a monoid G is compatible with the multiplication, i.e. the multiplication is continuous relatively to the topology $T(\rho)$.

Let d be quasi-metric on A. Any element $x \in A$ is identified with the string $a_1a_2...a_n...$, where $a_1 = x$ and $a_i = \varepsilon$ for any $i \geq 2$. Thus $A \subset S(A)$. In [8, 9] was proved that on $S(A)$ there exists a quasi-metric $\hat{d}$ with the properties:

- $\hat{d}(x, y) = d(x, y)$ for all $x, y \in A \subset S(A)$;

- $\hat{d}$ is a stable quasi-metric on $S(A)$;

- if ρ is a stable quasi-metric on $S(A)$ and $\rho(x, y) \leq d(x, y)$ for all $x, y \in A$, then $\rho(x, y) \leq \hat{d}(x, y)$ for all $x, y \in S(A)$;

- if d is an integer quasi-metric, then $\hat{d}$ is an integer quasi-metric to.

On quasi-metric space we consider the ordering induced by the distance function: if ρ is a quasi-metric on X, then $x \leq y$ if and only if $\rho(x, y) = 0$.

Proposition 4.1. Let (A, d) be a quasi-metric space. Then:

(i) $(C(\mathbb{N}, A), d^*)$ is a quasi-metric space and $S^*(A)$ is an open subset of $C(\mathbb{N}, A)$;

(ii) If the space A is connected, then the subspace $S^*(A)$ is connected too.

Proof. Assertion (i) is proved in [8, 9]. Fix $n \in \mathbb{N}$. For any $a = (a_1, a_2, .., a_n) \in A^n$ we put $\psi_n(a) = (x_1, x_2, ...) \in S^*(A)$, where $x_i = a_i$ for $i \leq n$ and $\leq x_i = \varepsilon$ for $i \geq n+1$. Then $\psi_n : A^n \longrightarrow S^*(A)$ is a continuous mapping and $\psi_n(A^n) \subset \psi_{n+1}(A^{n+1})$. Assume that the space A is connected. Since $S^*(A) = \cup\{\psi_n(A^*) : n \in \mathbb{N}\}$ the space $S^*(A)$ is connected too.

Corollary 4.2. Let A be an Alexandroff space. Then $S^*(A)$ and $S(A)$ are Alexandroff spaces too.

Proposition 4.3. Let (A, d) be a quasi-metric space, $r > 0$, $a, b \in A$ and $B(a, r, d) \cap B(b, r, d) = \emptyset$. Then there exists a family $\{U_\mu : \mu \in M\}$ of open non-empty subsets of $C(\mathbb{N}, A), d^*)$ such that:

1. $|M| \geq 2^{\aleph_0}$ and $U_\mu \cap U\eta = \emptyset$ for any distinct elements $\mu, \eta \in M$. For any $\mu \in M$

there exists a point $c_\mu \in C(\mathbb{N}, A)$ such that $U\mu = \{y \in C(\mathbb{N}, A) : d^*(c_\mu, y) < \infty\}$.

2. If (A, d) is a space, then the sets U_μ are connected and the set $U(x) = \{y \in C(\mathbb{N}, A) : d^*(x, y) < \infty\}$ is connected for any $x \in C(\mathbb{N}, A)$.

3. If d is a metric, then $C(\mathbb{N}, A) = \cup\{U_\mu : \mu \in M\}$.

Proof. There exists a family $\{N_\mu : \mu \in M\}$ of infinite subsets of $\mathbb{N}$ such that $|M| \geq 2^{\aleph_0}$ and $N_\mu \cap N\eta$ is a finite set for any distinct elements $\mu, \eta \in M$.

For any $\mu \in M$ we construct the point $c_\mu = (c_{(\mu,1)}, c_{(\mu,2)}, ..., c_{(\mu_n)}, ...) \in C(\mathbb{N}, A)$ such that $c_{(\mu,i)} = a$ for $i \in N_\mu$ and $c_{(\mu,j)} = b$ for $j \in \mathbb{N} \setminus N_\mu$. We put $U_\mu = \{x \in C(\mathbb{N}, A) : d(c_\mu, x) < \infty\}$.

Fix two distinct elements $\mu, \eta \in M$. Assume that $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in U_\mu$. Then the set $P = \{i \in \mathbb{N} : d(c_{(\mu,i)}, x_i) \geq r$ is finite. Hence the set $N_\eta \setminus P$ is infinite, $d(c_{(\mu,i)}, x_i) < r$ for $i \in N_\mu$ and $d(c_{(\eta,i)}, x_j) \geq r$ for $j \in N_\eta \setminus P$. Thus $x \notin U_\eta$. Moreover, $d(c_\mu, c_\eta) = \infty$. Assertion 1 is proved.

Assume that the space (A, d) is connected. Then for any $y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...) \in C(\mathbb{N}, A)$ the set $Fin(y) = \{z = (z_1, z_2, ..., z_n, ...) \in C(\mathbb{N}, A) : |\{i\mathbb{N} : y_i \neq z_i\}| < \aleph_0\}$ is connected. Fix $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in C(\mathbb{N}, A)$. The set $U(x)$ is open. suppose that the set $U(x)$ is not connected and U, V are two disjoint non-empty open subsets of $C(\mathbb{N}, A)$ such that $U(x) = U \cup V$. Let $x \in U$. Fix $y \in V$. Then $x \in ClFin(y)$ and, since $y \in Fin(y)$ and $Fin(y)$ is connected, we have $Fin(y) \subset V$. Then $U \cap Fin(y) = \emptyset$, $x \in U$ and $x \notin clFin(y)$, a contradiction. Assertion 2 is proved.

Assume that d is a metric. In this case M is a maximal subset of $C(\mathbb{N}, A)$ such that $d^*(x, y) = \infty$ for any distinct points $x, y \in M$. From the proof of Assertion 1 it follows that $|M| \geq 2^{\aleph_0}$. In this case $U(x) \cap U(y) = \emptyset$ for distinct points $x, y \in M$. Assertion 3 is proved. The proof is complete.

5. Applications

Distinct poset structures have been introduced to accommodate the needs of information theories. In the 1960's, Dana Scott introduced continuous lattices [38, 39, 40, 42, 43, 41] into computer science as a means of providing mathematical models for a system of types that justify recursive definitions of these types. In time, the order theoretic models Scott and others considered evolved into what we now call domains (see [1, 21, 47], RS). The level of abstraction required to understand domain theory remained an obstacle to its widespread use. To remedy this problem, Scott imported from logic the notion of an information system to provide a set-theoretic approach to domains [43]. In this setting, every information system gives rise to a domain in a canonical way. The Hoare powerdomain is an order-theoretic analog of the power set and is used in programming semantics as a model for angelic nondeterminism (see, for example, Plotkin [33]). Some topological aplications in Computer Science are examined in [27, 28, 13, 20, 46, 48].

A poset P is said to be directed-complete if the join ofevery directed subset of P exists in P. A subset S of poset P is a down-set of P provided $S = \{p \in P : p \preceq a \textit{ for some } a \in S\}$. A down-set of P is Scott-closed if it contains the join of each of its directed subsets. An element x of a P is compact if, whenever x is below the supremum of a directed subset set S of P, then $x \in \{p \in P : p \preceq a \text{ for some } a \in S\}$. We use $K(P)$ to denote the subposet of compact elements of P. A directed-complete poset P is algebraic if, for all $p \in P$, the set $K(p) = \{x \in P : x \preceq p\} \cap K(P)$ is directed and $p = \vee K(p)$. We use the term "domain" for an algebraic poset in which the meet of every non-empty subset exists. We will let $\Gamma(P)$ denote the set of all Scott-closed subsets of the directed-complete poset P, ordered by set-inclusion. It is easy to see that $\Gamma(P)$ is closed with respect to finite set-unions and arbitrary set-intersections. Hence $\Gamma(P)$ is the family of closed sets for a topology on P, called the Scott topology on P. The lattice of non-empty Scott-closed subsets of a domain D is called the Hoare powerdomain of D [24].

A domain representation of a topological space X is a function, usually a quotient map, from a subset of a domain onto X (see [5]). The theory of domains was improved by Yu. L. Ershov [17, 19, 18, 16] and now is called the Scott - Ershov theory of domains.

Definition ([24]). An information system is a triple $\mathcal{S} = (S, Con, \vdash)$ consisting of:

(1) a set S whose elements are called propositions or tokens;

(2) a non-empty subset Con of the set of all finite subsets $Fin(S)$ of a set S, called the consistency predicate;

(3) a binary relation $\vdash$ on Con, called the entailment relation.

These entities satisfy the following axioms:

$(IS1)$. Con is a down-set S of $Fin(S)$ with respect to set-inclusion such that $\cup Con = S$.

$(IS2)$. if $A \subset Con$ and $B \subset A$, then $A \vdash B$.

$(IS3)$. if $A, B, C \in Con$, $A \vdash B$, and $B \vdash C$, then $A \vdash C$.

$(IS4)$. if $A, B, C \in Con$, $A \vdash B, andA \vdash C$, then $B \cup C \in Con$ and $A \vdash (B \cup C)$.

Axiom $(IS1)$ implies that every singleton subset of S is a member of Con and that whenever $A \in Con$ and $B \subset A$, then $B \in Con$. Axioms $(IS2)$ and $(IS3)$ imply that $(Con, \vdash)$ is a preordered set, that is, $\vdash$ is a reflexive and transitive relation on Con. The above definition of an information system is differently from the definitions of Scott [43], Davey and Priestly [10], Droste and Göbel [14].

A workload [25, 26] is a triple $W = (D, A, \mathcal{Q})$, where D is the domain, A is a finite subset of the domain (dataset, or instance), and $\mathcal{Q} \subset 2^D$ is the set of queries, that is, some specified subsets of D. Answering a query $Q \in \mathcal{Q}$ means listing all datapoints $a \in A \cap Q$.

A (dis)similarity measure on a set D is a function of two variables $s : D \times D \longrightarrow R$, possibly subject to additional properties. A range similarity query centered at $a \in D$ consists of all $x \in D$ determined by the inequality $s(a, x) < k$ or $s(a, x) > k$, depending on the type of similarity measure. A similarity workload is a workload whose queries are generated by a similarity measure. The formula $d(a, b) = s(a, a) - s(a, b)$, $a, b \in A$ isa distance. In many cases $d(a, b)$ is a quasi-metric. By instance, applied to the similarity measure given by BLOSUM62, as well as of most other matrices from the BLOSUM family, is a quasi-metric on A.

Bibliography

1. Abramsky S. and Jung A. Domain Theory. In: S. Abramsky, D. Gabbay and T.S.E. Maibaum (eds.). Handbook of Logic in Computer Science. Oxford: Oxford University Press, 1994. pp. 1-168.
2. Adian S.I. and Durnev V.G. Decision problems for groups and semigroups. Uspehi Matem. Nauk 55 (2000), no. 2. pp. 3-94. English translation: Russian Mathematical Surveys, 55 (2000), no. 2. pp. 207-296.
3. Alexandroff P. Diskrete Raume. Matem. Sbornik (N.S.) (in German). 2 (1937). pp. 501-518.
4. Arenas F.G. Alexandroff spaces. In: Acta Math. Univ. Comenianae 68 (1) (1999). pp. 17-25.
5. Blanck J. Domain representations of topological spaces. Theoretical Computer Science 247 (2000). pp. 229-255.
6. Boone W.W. The word problem. In: Proceedings of the National Academy of Sciences 44 (1958), no. 10. pp. 1061-1065.
7. Bokut L.A. and Kukin G.P. Unsolvable algorithmic problems for semigroups, groups, and rings. Algebra. Topology. Geometry. Vol 25. Itogi Nauki i Techniki, 3-66, 1987. Ehglish Translation: Journal of Soviet Mathematics 1989, Volume 45, Issue 1. pp. 871-911.
8. Choban M.M. and Budanaev I.A. Distances on Monoids of Strings and Their Applications. In: Proceedings of the Conference on Mathematical Foundations of Informatics MFOI2016. July 25-29, 2016, Chisinau, Republic of Moldova, 2016. pp. 144-159.
9. Choban M.M. and Budanaev I.A. About Applications of Distances on Monoids of Strings. In: Computer Science Journal of Moldova 24 (2016), no. 3. pp. 335-356.
10. Davey B.A. and Priestley H.A. Introduction to Lattices and Order. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
11. Dehn M. Über unendliche diskontinuierliche Gruppen. In: Math. Annalen 71 (1911), no. 1. pp. 116-144.
12. Dehn M. Transformation der Kurven auf zweiseitigen Flachen. In: Math. Annalen 72 (1912), no. 3. pp. 413-421.
13. Denning D.E. A lattice model of secure information flow. Communications of the ACM. 19 (5) (1976). pp. 236-243.
14. Droste M. and Göbel R. Non-deterministic information systems and their domains. Theoret. Comp. Sci. 75 (1990). pp. 289-309.
15. Engelking R. General Topology. Warszawa: PWN, 1977.
16. Ershov Yu. L. Model C of partial continuous functionals. In: R.O. Gandy, J.M.E. Hyland (Eds.). Logic Colloquium 76, Studies in Logic and Foundations in Mathematics. vol. 87, Amsterdam: North-Holland 1977. pp. 455-467.
17. Ershov Yu. L. Theory of enumerations. Moskva: Nauka, 1977.
18. Ershov Yu. L. Theory of A-spaces. Algebra i Logika, Novosibirsk SO AN, 12 (1973), no.4. pp. 269-416.

19. Ershov Yu. L. Definability and Computability. Springer, 1996.
20. Fulop S.A. and Kephart D. Topology of Language Classes. In: Proceedings of the 14th Meeting on the Mathematics of Language (MoL 14), Chicago, USA, July 2526, 2015. Cicago, 2015. pp. 26-38.
21. Gunter C. Universal profinite domains. Inform. and Comput., Vol. 72(1) (1987). pp. 1-30.
22. Gurevich Yu. The word problem for certain classes of semigroups. Algebra and Logic 5 (1966). pp. 25-35.
23. Hamming R.W. Error Detecting and Error Correcting Codes. In: Bell System Technical Journal, 29 (1952), no. 2. pp. 147-160.
24. Hart J.B. and Tsinakis C. A concrete realization of the Hoare powerdomain. Soft Comput. 11 (2007). pp. 1059-1063.
25. Hellerstein J.E., Koutsoupias E., Miranker D.P., Papadimitriou C.H. and Samoladas V. On a model of indexability and its bounds for range queries. In: Journal of the ACM (JACM), 49(1), 2002. pp. 3555.
26. Hellerstein J.E., Koutsoupias E., Miranker D.P. and Papadimitriou C.H. On the analysis of indexing schemes. In: Proceedings of the Sixteenth ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART Symposium on Principles of Database Systems, Tucson, Arizona, 1215 May 1997, Arizona, 1997. pp. 249-256.
27. Khalimsky E. Topological structures in computer science. In: Journal of Applied Math. and Simulation Vol. 1 (1987), no. 1. pp. 25-40.
28. Khalimsky E., Kopperman R. and Meyer P.R. Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets. Topol. Appl. 36 (1990), no. 1. pp. 1-17.
29. Levenshtein V.I. Binary codes capable of correcting deletions, insertions, and reversals. (in Russian) DAN SSSR, vol. 163, no. 4, 1965. pp. 845-848. (English translation: Soviet Physics – Doklady. vol. 10, no. 8, 1966. pp. 707-710.
30. Myasnikov A.G. and Rybalov A.N. Generic complexity of undecidable problems. In: The Journal of Symbolic Logic 73 (2008), no. 2. pp. 656-673.
31. Nedev S.I. O-metrizable spaces. Trudy Moskov. Mat.Ob-va 24 (1971). pp. 201-236. (English translation: Trans. Moscow Math. Soc. 24 (1974). pp. 213-247).
32. Novikov P.S. On the algorithmic unsolvability of the word problem in group theory. In: Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 44 (1955). (in Russian) pp. 1-143.
33. Plotkin G.D. A powerdomain construction. In: SIAM Journal on Computing 5 (1976). pp. 452-487.
34. Post E.L. Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems. In: Bulletin of the American Mathematical Society 50 (1944). pp. 284316.
35. Post E.L. Recursive unsolvability of a problem of Thue. In: Journal Symbolic Logic 12 (1947). pp. 1-11.
36. Rabin M.O. Computable algebra, general theory and theory of computable fields. In: Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960). pp. 341-360.

37. Sandhu R.S. (1993). Lattice-based access control models. In: Computer 26 (11) (1993). pp. 9-19.
38. Scott D.S. Outline of a mathematical theory of computation. In: Proc. 4th Ann. Princeton Conference on Information Science and Systems (1970). pp. 169-176.
39. Scott D.S. The lattice of flow diagrams. In: Engeler E. (ed). Symposium on Semantics of Algorithmic Languages. Lecture Notes in Mathematics 188, Springer-Verlag 1971. pp. 311-366.
40. Scott D.S. Lattice theory, data types, and semantics. In: Engeler E. (ed). Formal Semantics of Programming Languages. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1972. pp. 65-106.
41. Scott D.S. Continuous lattices. In: Lawvere F.W. (ed). Toposes, algebraic geometry and logic,(1972). pp. 97-136.
42. Scott D.S. Data Types as lattices. In: SIAM J. Computing 5 (1976). pp. 522-587.
43. Scott D.S. Domains for denotational semantics. In: Lecture Notes in Computer Science 140 (1982). pp. 577-613.
44. Shannon C. A Mathematical Theory of Communication, I. The Bell System Technical Journal 27 (1948). pp. 279-423.
45. Shannon C. A Mathematical Theory of Communication, II. The Bell System Technical Journal 27 (1948). pp. 623-656.
46. Shukla W. and Srivastava A.K. A Topology for Automata: A Note. Information and Control 32 (1976). pp. 163-168.
47. Smyth M. The largest cartesian-closed category of domains. Theoret. Comput. Sci. 27 (1983). pp. 109-119.
48. Spreen D. On Some Decision Problems in Programming. Information and Computation 122 (1995), no. 1. pp. 120-139.
49. Tseitin G.S. Algorithmic operators in constructive metric spaces. In: Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 67 (1962). (in Russian, English translation: AMS Translations 64 (1967)). pp. 295-361
50. Tseitin G.S. An associative calculus with an insoluble problem of equivalence. (in Russian) In: Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 52 (1958). pp. 172-189.
51. Turing A.M. The word problem for semigroups with cancellation. Annals of Mathematics 52 (1950). pp. 491-505.

CENTER CONDITIONS FOR A CUBIC DIFFERENTIAL SYSTEM WITH TWO INVARIANT STRAIGHT LINES AND ONE INVARIANT ELLIPTIC CURVE

Dumitru COZMA, associate professor, dr. hab.

Angela MATEI, lecturer, dr.

Tiraspol State University

Abstract. For a cubic differential system with a singular point of a center or a focus type having two invariant straight lines one invariant elliptic cubic curve it was proved that a singular point is a center if and only if the first two Lyapunov quantities at this point vanish. There were obtained five sets of conditions for a singular point to be a center.

Keywods: cubic differential system, invariant algebraic curves, the problem of the center.

CONDIȚII DE CENTRU PENTRU UN SISTEM DIFERENȚIAL CUBIC CU DOUĂ DREPTE INVARIANTE ŞI O CURBĂ INVARIANTĂ DE TIP ELIPTIC

Rezumat. Pentru un sistem diferențial cubic cu punct singular de tip centru sau focar, care posedă două drepte invariante şi o cubică invariantă de tip eliptic, s-a demonstrat că punctul singular este de tip centru dacă şi numai dacă primele două mărimi Lyapunov în acest punct se anulează. Au fost obținute cinci serii de condiții ca punctul singular să fie de tip centru.

Cuvinte-cheie: sistem diferențial cubic, curbe invariante algebrice, problema centrului.

1. Introduction

We consider the cubic system of differential equations of the form

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax^2 + cxy + fy^2 + kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3 \equiv P(x,y), \\ \dot{y} = -(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3) \equiv Q(x,y), \end{cases} \tag{1.1}$$

where the coefficients are real numbers, $x = x(t)$ and $y = y(t)$ are real variables. The origin $O(0,0)$ is a singular point of a center or a focus type (a weak focus) for (1.1). The problem arises of finding the coefficient conditions under which $O(0,0)$ is a center.

The derivation of necessary conditions for a singular point $O(0,0)$ to be a center involves use of computer algebra and we obtain them by calculating the focus quantities, which are polynomials in the coefficients of the system [1, 2, 4].

The necessary conditions are shown to be sufficient by a variety of methods [3, 4]. It is known that a singular point $O(0,0)$ is a center for (1.1) if and only if the system has an analytic first integral of the form $F(x, y) = C$ in some neighborhood of $O(0,0)$. Also, $O(0,0)$ is a center if and only if the system (1.1) has an analytic integrating factor of the form $\mu(x,y) = 1 + \sum \mu_k(x,y)$ in some neighborhood of $O(0,0)$.

There exists a power series $F(x,y) = \sum F_j(x,y)$ such that the rate of change of $F(x, y)$ along trajectories of (1.1) is a linear combination of polynomials $\{(x^2 + y^2)\}_{j=2}^{\infty}$:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{j=2}^{\infty} L_{j-1}(x^2 + y^2)^j.$$

Quantities L_j are polynomials with respect to the coefficients of system (1.1) called the *Lyapunov quantities (the focus quantities)* [1, 4]. The order of the weak focus $O(0,0)$ is r if $L_1 = L_2 = \ldots = L_{r-1} = 0$ and $L_r \neq 0$. The origin $O(0,0)$ is a center for (1.1) if and only if $L_j = 0,\ j = 1,2,\ldots$.

2. Invariant algebraic curves and Darboux integrability

We shall study the problem of the center for cubic system (1.1) assuming that the system has invariant algebraic curves.

Definition 2.1. An algebraic curve $\Phi(x,y) = 0$ in $\mathbf{C}^2$ with $\Phi(x,y) \in \mathbf{C}[x,y]$ is an *invariant algebraic curve* of a differential system (1.1) if

$$\frac{d\Phi}{dt} = P(x,y)\frac{\partial\Phi}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial\Phi}{\partial y} \equiv K(x,y)\cdot\Phi(x,y) \tag{2.1}$$

for some polynomial $K(x,y) \in \mathbf{C}[x,y]$ called the *cofactor* of the curve $\Phi(x,y) = 0$.

Let the cubic system (1.1) have sufficiently many invariant algebraic curves $\Phi_j(x,y) = 0,\ j = 1,\ldots,q$ with cofactors $K_j(x,y)$. Then in most cases a first integral (an integrating factor) can be constructed in the Darboux form [4, p.26]

$$\Phi_1^{\alpha_1}\Phi_2^{\alpha_2}\ldots\Phi_q^{\alpha_q} = C \quad \left(\mu = \Phi_1^{\alpha_1}\Phi_2^{\alpha_2}\ldots\Phi_q^{\alpha_q}\right) \tag{2.2}$$

and we say that the cubic system (1.1) is *Darboux integrable*. The function (2.2), with $\alpha_j \in \mathbf{C}$ not all zero, is a first integral (an integrating factor) for (1.1) if and only if

$$\sum_{j=1}^{q}\alpha_j K_j(x,y) \equiv 0 \quad \left(\sum_{j=1}^{q}\alpha_j K_j(x,y) \equiv -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right). \tag{2.3}$$

The method of Darboux is very useful and elegant one to prove integrability for some classes of differential systems depending on parameters [5].

By Definition 2.1, a straight line $C + Ax + By = 0,\ A,B,C \in \mathbf{C},\ (A, B) \neq 0$ is an *invariant straight line* for (1.1) if and only if there exists a polynomial $K(x,y)$ such that the following identity holds

$$A\cdot P(x,y) + B\cdot Q(x,y) \equiv (C + Ax + By)\cdot K(x,y).$$

If the cubic system (1.1) has complex invariant straight lines then obviously they occur in complex conjugated pairs $l_1 \equiv C + Ax + By = 0$ and $l_2 \equiv \overline{C} + \overline{A}x + \overline{B}y = 0$.

Let the cubic ststem (1.1) have two distinct invariant straight lines l_1, l_2 that are real or l_1, l_2 are complex ($l_2 \equiv \overline{l_1}$). The conditions for the existence of two distinct invariant straight lines for cubic system (1) where obtained in [6]. It was proved

Theorem 2.1. *The cubic differential system (1.1) has two distinct invariant straight lines if and only if one of the following sets of conditions holds:*

(I) $a = f = k = p = r = 0,\ m(c^2 - 4m) \neq 0.$

The invariant straight lines and their cofactors are

$$l_{1,2} \equiv 2 + (c \pm \sqrt{c^2 - 4m}\,)x = 0,\ K_{1,2}(x,y) = [y(c + 2mx \pm \sqrt{c^2 - 4m}\,)]/2;$$

(II) $\quad g = b + c,\ f = a + d,\ q = p + l - k,\ s = m + n - r.$

The invariant straight lines and their cofactors are $l_{1,2} \equiv x \mp iy = 0$,

$$K_1(x,y) = -i + (a - ib - ic)x - (b + ia + id)y + (k - im - in + ir)x^2 + \\ +(r - n - il - ip)xy - (l + ir)y^2,\ K_2 = \overline{K_1};$$

(III) $\quad a = 1, k = g, l = -b, q = [(d + n + 1)(c\gamma + b - c - p) - g\gamma^2]/\gamma^2,$

$m = [(\gamma(d + 1) + c^2)(\gamma - 1) - (b - p)(c(\gamma - 2) + b - p) - n\gamma]/\gamma^2,$

$r = 1 - \gamma, s = 0, \gamma = f + 2, \gamma[(b - c - p)^2 + 4\gamma(d + n + 1)] \neq 0.$

The invariant straight lines are $l_{1,2} \equiv 1 + A_{1,2}x - y = 0$, *where* A_1, A_2 *are distinct solutions of the equation* $\gamma A^2 + (b - c - p)A - d - n - 1 = 0$. *The cofactors are*

$$K_{1,2}(x,y) = x + A_{1,2}y + gx^2 + (1 + d - A_{1,2}^2 + cA_{1,2})xy + ((\gamma - 1)A_{1,2} + b)y^2;$$

(IV) $\quad p = [(b - c)h + (k - g)\gamma]/h, q = [h(cs - gh) + s(g - k)]/h^2,$

$l = -b, m = [(d - h + 1)h^2 + h(c(k - g) - s) - (k - g)^2]/h^2,$

$r = 1 - \gamma, n = [s\gamma - (1 + d)h]/h, h = a - 1, h((g - k)^2 + 4sh) \neq 0.$

The invariant straight lines are $l_{1,2} \equiv 1 + A_{1,2}x - y = 0$, *where* A_1, A_2 *are distinct solutions of the equation* $hA^2 + (g - k)A - s = 0$. *The cofactors are*

$$K_{1,2}(x,y) = x + A_{1,2}y + (g + hA_{1,2})x^2 + (1 + d + cA_{1,2} - A_{1,2}^2)xy + (b + (\gamma - 1)A_{1,2})y^2.$$

The sufficient conditions for a singular point $O(0,0)$ to be a center in system (1.1) with two invariant straight lines were determined in [6]. The presence of a center was proved by using the method of Darboux integrability and the rational reversibility.

The problem of the center was solved for cubic system (1.1) with two invariant straight lines and one invariant irreducible conic in [4]; with two parallel invariant straight lines and one invariant cubic $x^2 + y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 = 0$ in [7].

The problem of the center was solved in [8] for a nine-parametric cubic system that can be reduced to a Liénard type system.

3. Conditions for the existence of one elliptic cubic curve

In this paper assuming that one set of conditions (I) - (IV) holds, we shall determine the conditions under which the cubic system (1.1) has an elliptic cubic curve of the form

$$\Phi(x,y) \equiv a_{30}x^3 + a_{20}x^2 + a_{10}x + a_{00} - y^2 = 0, \tag{3.1}$$

with $a_{30}, a_{20}, a_{10}, a_{00} \in \mathbf{R}$ and $a_{00}a_{30} \neq 0$.

By Definition 2.1, an algebraic curve (3.1) is an *invariant cubic curve* for (1.1) if and only if there exists a polynomial $K_\Phi(x,y) = c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + c_{10}x + c_{01}y$, with real coefficients, such that the following identity holds

$$(3a_{30}x^2 + 2a_{20}x + a_{10}) \cdot P(x,y) - 2y \cdot Q(x,y) \equiv \Phi(x,y) \cdot K_\Phi(x,y). \tag{3.2}$$

Identifying the coefficients of the monomials $x^i y^j$ in (3.2), we reduce this identity to a system of 18 equations $\{F_{ij} = 0\}$ for the unknowns $a_{30}, a_{20}, a_{10}, a_{00}, c_{ij}$. We find that

$$c_{10} = 0,\ c_{01} = -2b,\ c_{20} = 3k,\ c_{11} = 3m,\ c_{02} = 3p,\ a_{10} = -2ba_{00},$$
$$r = 0,\ 2l + 3p = 0,\ 2n + 3m = 0,\ 3k + 2ab = 0,\ l - bf = 0 \tag{3.3}$$

and a_{00}, a_{20}, a_{30} are the solutions of the following algebraic system:

$$\begin{cases} F_{40} \equiv 9aa_{30} + 2aba_{20} = 0, \\ F_{31} \equiv (2b+3c)a_{30} - ma_{20} + 2s = 0, \\ F_{22} \equiv 9fa_{30} + 2bfa_{20} - 6ab + 6q = 0, \\ F_{30} \equiv 6aa_{20} - 8ab^2 a_{00} = 0, \\ F_{21} \equiv 3a_{30} + 2(b+c)a_{20} + 4bma_{00} + 2g = 0, \\ F_{12} \equiv 3fa_{20} - 4b^2 fa_{00} + 3d = 0, \\ F_{11} \equiv 2a_{20} - (4b^2 + 2bc + 3m)a_{00} + 2 = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

We solve the system (3.4) assuming that one set of conditions (I) - (IV) holds. In this way we determine the conditions for the existence of two invariant straight lines and one invariant elliptic cubic curve of the form (3.1).

Theorem 3.1. *The cubic system (1.1) has two distinct invariant straight lines* $l_1 = 0, l_2 = 0$ *and one invariant cubic* $\Phi = 0$ *of the form (3.1) if and only if one the following eight sets of conditions holds:*

(i) $a = d = f = k = l = p = q = r = 0, n = 3(2b+c)(b+c),$
$m = -2(2b+c)(b+c), s = (4b^2 + 4bc + 2bg + 3cg)/3;$

(ii) $a = d = f = k = l = p = q = r = 0, n = b(2b+3c)/3,$
$m = -2b(2b+3c)/9, s = (3g - 3c - 2b)(2b+3c)/9;$

(iii) $a = d = f = k = l = p = q = r = 0, n = -3m/2;$

(iv) $a = k = r = 0, f = d, g = b + c,\ m = -2b(2b+3c)/9, q = bd/3,$
$l = bd, n = b(2b+3c)/3, p = (-2bd)/3, s = b(2b+3c)/9;$

(v) $d = r = 0, c = (-7b)/3, f = a,\ g = (-4b)/3, l = q = ab, m = (-8b^2)/9,$
$n = (4b^2)/3, k = p = (-2ab)/3, s = (4b^2)/9;$

(vi) $a = k = r = 0, d = f = -1,\ g = (3c - b)/3, m = -2(bc+2)/3,$
$l = -b, n = bc + 2, p = (2b)/3, q = b, s = -bc - 2, b^2 = 3;$

(vii) $a = k = r = 0,\ g = (3c - b)/3,\ d = b(b^2 - 3bc - 24)/(21b + 9c),$

$q = (5b^3c - 2b^4 + 3b^2c^2 + 27b^2 - 6bc - 9c^2)/(21b + 9c),$

$m = 2(b^2 - 3bc - 9)/9,\ n = (9 + 3bc - b^2)/3,\ p = (2b)/3,$

$l = -b,\ s = (2b^3 - 5b^2c - 3bc^2 - 20b - 12c)/(7b + 3c),$

$f = -1,\ 19b^3 - 33b^2c - 63bc^2 - 252b - 27c^3 - 108c = 0;$

(viii) $d = r = 0,\ a = s = 2/3,\ c = (-7b)/3,\ f = -1,\ g = (-4b)/3,\ k = (-4b)/9,$

$l = -b,\ m = 2,\ n = -3,\ p = q = (2b)/3,\ b^2 = 3/2.$

Proof. To prove Theorem 3.1, we solve the system (3.4) assuming that one set of conditions (I) - (IV) holds.

In Case (I) the equations of (3.4) yield $d = q = 0$ and the system (3.4) becomes

$$\begin{cases} F_{31} \equiv (2b + 3c)a_{30} - ma_{20} + 2s = 0, \\ F_{21} \equiv 3a_{30} + 2(b + c)a_{20} + 4bma_{00} + 2g = 0, \\ F_{11} \equiv 2a_{20} - (4b^2 + 2bc + 3m)a_{00} + 2 = 0. \end{cases}$$

We find a_{30} from $F_{21} = 0$ and a_{20} from $F_{11} = 0$, then $F_{31} = 0$ looks

$$F_{31} \equiv 4(2b + 3c)(b + c - g) + 6m + 12s - f_1 f_2 a_{00} = 0, \tag{3.5}$$

where $f_1 = 4b^2 + 6bc + 2c^2 + m,\ f_2 = 4b^2 + 6bc + 9m.$

If $f_1 = 0,$ then (3.5) implies

$$m = -2(2b + c)(b + c),\ s = (4b^2 + 4bc + 2bg + 3cg)/3$$

and we obtain the set of conditions (i) of Theorem 3.1. The invariant curves are

$$l_1 \equiv 2(b + c)x + 1 = 0,\ l_2 = (2b + c)x - 1 = 0,$$

$$\Phi \equiv 2(g - c - b)x^3 + 3(x^2 + y^2) - 3(2bx + 2cx + 1)(2bx + cx - 1)^2 a_{00} = 0$$

and have the cofactors

$$K_1 = -2(b + c)(2bx + cx - 1)y,\ K_2 = -(2b + c)(2bx + 2cx + 1)y,$$

$$K_\Phi = -2by - 6(2b + c)(b + c)xy.$$

If $f_1 \neq 0,\ f_2 = 0$, then (3.5) implies

$$m = -2b(2b + 3c)/9,\ s = (3g - 3c - 2b)(2b + 3c)/9.$$

In this case we get the set of conditions (ii) of Theorem 3.1. The invariant curves are

$$l_1 \equiv (2b + 3c)x + 3 = 0,\ l_2 = 2bx - 3 = 0,$$

$$\Phi \equiv 18(g - c - b)x^3 + 27(x^2 + y^2) + (2bx - 3)^3 a_{00} = 0$$

and have the cofactors

$$K_1 = y(3 - 2bx)(2b + 3c)/9,\ K_2 = -2by(3(cx + 1) + 2bx)/9,$$

$$K_\Phi = -2by((2b + 3c)x + 3)/3.$$

Let $f_1 \neq 0,\ f_2 \neq 0$. In this case the equation (3.5) yields

$$a_{00} = [4(2b+3c)(b+c-g)+6m+12s]/(f_1 f_2)$$

and we obtain the set of conditions (iii). The invariant curves are

$$l_{1,2} \equiv 2+(c \pm \sqrt{c^2-4m})x = 0,\ \Phi(x,y) \equiv a_{30}x^3 + a_{20}x^2 + a_{10}x + a_{00} - y^2 = 0,$$

where $a_{00} = [4(2b+3c)(b+c-g)+6m+12s]/(f_1 f_2)$, $a_{10} = -2ba_{00}$,

$$a_{20} = ((4b^2+2bc+3m)a_{00}-2)/2,\ a_{30} = -2(2bma_{00}+(b+c)a_{20}+g)/3.$$

The cofactors of the invariant algebraic curves are

$$K_{1,2}(x,y) = [y(c+2mx \pm \sqrt{c^2-4m})]/2,\ K_{\Phi} = -y(2b-3mx).$$

In Case (II) the system (3.4) looks

$$\begin{cases} F_{40} \equiv 9aa_{30} + 2aba_{20} = 0, \\ F_{31} \equiv (2b+3c)a_{30} - ma_{20} - m = 0, \\ F_{22} \equiv (a+d)(9a_{30}+2ba_{20}) + 2bd = 0, \\ F_{30} \equiv 6aa_{20} - 8ab^2 a_{00} = 0, \\ F_{21} \equiv 3a_{30} + 2(b+c)a_{20} + 4bma_{00} + 2(b+c) = 0, \\ F_{12} \equiv (a+d)(3a_{20} - 4b^2 a_{00}) + 3d = 0, \\ F_{11} \equiv 2a_{20} - (4b^2+2bc+3m)a_{00} + 2 = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

If $a = d = 0$, then (3.6) yields $a_{30} = -a_{00}(4b^3+6b^2c+2bc^2+7bm+3cm)/3$, $a_{20} = ((4b^2+2bc+3m)a_{00}-2)/2$ and $(4b^2+6bc+2c^2+m)(4b^2+6bc+9m) = 0$. This subcase is contained in the case (iii) of Theorem 3.1.

If $a = 0, d \neq 0$, then the equations of (3.6) imply

$$a_{20} = (4b^2 a_{00} - 3)/3,\ a_{30} = (-8a_{00}b^3)/27,\ m = -2b(2b+3c)/9.$$

In this subcase we obtain the set of conditions (iv) of Theorem 3.1. The invariant algebraic curves are

$$l_{1,2} \equiv x^2 + y^2 = 0,\ \Phi(x,y) \equiv (2bx-3)^3 a_{00} + 27(x^2+y^2) = 0,$$

and have the cofactors

$$K_{1,2}(x,y) = 2by(-3-2bx-3cx-3dy)/3,\ K_{\Phi} = -2by(2bx+3cx+3dy+3)/3.$$

If $a \neq 0$, then from the equations of (3.6) we find

$$a_{30} = (8b)/81,\ a_{20} = (-4)/9,\ a_{00} = (-1)/(3b^2),\ d = 0,\ m = (-8b^2)/9,\ c = (-7b)/3.$$

In this subcase we get the set of conditions (v). The invariant algebraic curves are

$$l_{1,2} \equiv x^2 + y^2 = 0,\ \Phi(x,y) \equiv (2bx-3)^3 - 9b(2b-3c)y^2 = 0$$

and have the cofactors $K_{1,2}(x,y) = -2(2abx^2 + 3aby^2 + 4b^2xy - 3ax + 3by)/3$,

$$K_{\Phi} = -2b(3ax^2 + 3ay^2 + 4bxy + 3y)/3.$$

In Case (III) the equations $F_{40} = 0$, $F_{30} = 0$ of (3.4) implies $a_{20} = (4b^2 a_{20})/3$, $a_{30} = (-2ba_{20})/9$, where $b \neq 0$. From the relations (3.3) we obtain $p = (2b)/3$,

$g=(-2b)/3,\ f=-1,\ n=b(3c-b)/3$. In this case $F_{31}\neq 0$ and the system of algebraic equations (3.4) is not compatible.

In Case (IV) the relations (3.3) yield $f=-1,\ g=(3c-3ac-b-ab)/3$,

$$k=(-2ab)/3,\ s=[(1-a)(b^2-3bc-3d+9a-12)]/3$$

and the equations $F_{40}=0, F_{30}=0$ of (3.4) looks

$$F_{40}\equiv a(2ba_{20}+9a_{30})=0,\ F_{30}\equiv a(3a_{20}-4b^2a_{00})=0.$$

Assume $a=0$, then from equations $F_{12}=0$ and $F_{22}=0$ we express a_{20} and a_{30}, respectively. Then $F_{11}\equiv a_{00}(3-b^2)+d+1=0$.

If $b^2=3$, then $d=-1$ and we obtain the set of conditions (vi) of Theorem 3.1. The invariant algebraic curves looks $l_1\equiv 1+A_1x-y=0$, $l_2\equiv 1+A_2x-y=0$,

$$\Phi(x,y)\equiv(8bx^3+18bx-36x^2-9)a_{00}-8bx^3+9(x^2+y^2)=0,$$

where A_1, A_2 are distinct solutions of the equation $3A^2+(b-3c)A-3bc-6=0$. The cofactors of these invariant algebraic curves are $K_\Phi=2y(by-bcx-2x-b)$,

$$K_{1,2}=[(3c-b-3A)x^2+3A(c-A)xy+3x+3by^2+3Ay]/3.$$

If $a=0$ and $b^2\neq 3$, then from the equations $F_{11}=0, F_{21}=0$ of (3.4) we find that

$$a_{00}=(d+1)/(b^2-3),\ d=b(b^2-3bc-24)/(21b+9c).$$

In this subcase we get the set of conditions (vii) of Theorem 3.1. The invariant algebraic curves are $l_1\equiv 1+A_1x-y=0$, $l_2\equiv 1+A_2x-y=0$,

$$\Phi(x,y)\equiv 2(25b^4-66b^3c-27b^2c^2-315b^2+54bc+81c^2)x^3+54b(b-3c)x+$$
$$+9b(72-7b^2+21bc)x^2+27(3c-b)+81(7b+3c)y^2=0,$$

where A_1, A_2 are distinct solutions of the equation

$$3(7b+3c)A^2+(7b^2-9c^2-18bc)A+3(2b^3-5b^2c-3bc^2-20b-12c)=0.$$

The cofactors of these invariant algebraic curves are

$$K_{1,2}=((3c-b-3A)x^2+(bA-3bc+b^2-9)xy+3x+3by^2+3Ay)/3,$$
$$K_\Phi=2y(b^2x-3bcx+3by-9x-3b)/3.$$

If $a\neq 0$, then the equations $F_{30}=0, F_{40}=0$ of (3.4) yield $a_{20}=(4b^2a_{00})/3$, $a_{30}=(-8b^3a_{00})/27$. We express $a_{00}=1/(3a+b^2-1)$ from $F_{11}=0$. Then the equations of (3.4) imply $d=0,\ c=b(3-a)/(3a-3),\ a=(9-2b^2)/9,\ b^2=3/2$.

In this subcase we obtain the set of conditions (viii). The invariant algebraic curves are $l_1\equiv 1+A_1x-y=0$, $l_2\equiv 1+A_2x-y=0$, $\Phi(x,y)\equiv 8bx^3-36x^2+36bx-18+9y^2=0$, where A_1, A_2 are distinct solutions of the equation $3A^2+8bA+6=0$. The cofactors of these invariant algebraic curves are $K_\Phi=2(3by^2-2bx^2-3by+9xy)/3$ and

$$K_{1,2} = (-(A+4b)x^2 + (bA+9)xy + 3x + 3by^2 + 3Ay)/3.$$

The proof of Theorem 3.1 is complete.

4. Integrability conditions for cubic system (1.1) with three algebraic curves

Let the cubic system (1.1) have at least two invariant straight lines and one invariant elliptic cubic curve, i.e. one of the sets of conditions (i) - (viii) of Theorem 3.1 is satisfied. In this section, we pay attention to the problem of the center for system (1.1) and prove that the origin $O(0,0)$ is a weak focus of order at most two.

Lemma 4.1. The following three sets of conditions are sufficient conditions for the origin to be a center:

(1) $a = d = f = k = l = p = q = r = 0, n = 3(2b+c)(b+c),$
$m = -2(2b+c)(b+c), s = (4b^2 + 4bc + 2bg + 3cg)/3;$

(2) $a = d = f = k = l = p = q = r = 0, n = b(2b+3c)/3,$
$m = -2b(2b+3c)/9, s = (3g - 3c - 2b)(2b+3c)/9;$

(3) $a = k = r = 0, f = d, g = b + c, m = -2b(2b+3c)/9, q = bd/3,$
$l = bd, n = b(2b+3c)/3, p = (-2bd)/3, s = b(2b+3c)/9.$

Proof. In Cases (1), (2) and (3), the cubic system (1.1) has two invariant straight lines and one invariant elliptic curve. The system has a Darboux first integral of the form

$$l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \Phi^{\alpha_3} = C. \tag{4.1}$$

The first integral (4.1) can be easily constructed by using the identity (2.3) and the cofactors K_1, K_2, K_Φ of the invariant algebraic curves $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, $\Phi = 0$.

In Case (1): $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = -1$, $l_1 \equiv 2(b+c)x + 1 = 0, l_2 \equiv (2b+c)x - 1 = 0$ and

$$\Phi \equiv 2(g - c - b)x^3 + 3(x^2 + y^2) - 3(2bx + 2cx + 1)(2bx + cx - 1)^2 a_{00} = 0.$$

In Case (2): $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = -1$, $l_1 \equiv (2b+3c)x + 3 = 0, l_2 \equiv 2bx - 3 = 0$ and

$$\Phi \equiv 18(g - c - b)x^3 + 27(x^2 + y^2) + (2bx - 3)^3 a_{00} = 0.$$

In Case (3): $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1$, $l_{1,2} \equiv x \pm iy = 0$ and

$$\Phi(x,y) \equiv (2bx - 3)^3 a_{00} + 27(x^2 + y^2) = 0.$$

Lemma 4.2. The following set of conditions is sufficient for the origin to be a center

(4) $a = d = f = k = l = p = q = r = 0, n = -3m/2.$

Proof. When the set of conditions (4) is satisfied, the cubic system (1.1) has two invariant straight lines $l_{1,2} \equiv 2 + (c \pm \sqrt{c^2 - 4m})x = 0$ and one invariant elliptic cubic

$$\Phi(x,y) \equiv a_{30}x^3 + a_{20}x^2 + a_{10}x + a_{00} - y^2 = 0,$$

where $a_{10} = -2ba_{00}$,

$$a_{00} = [4(2b+3c)(b+c-g) + 6m + 12s]/[(4b^2 + 6bc + 2c^2 + m)(4b^2 + 6bc + 9m)],$$

$$a_{20} = [(4b^2 + 2bc + 3m)a_{00} - 2]/2, \; a_{30} = -2[2bma_{00} + (b+c)a_{20} + g]/3.$$

The system (1.1) is Darboux integrable and has an integrating factor of the form

$$\mu = l_1^{-1} l_2^{-1} \Phi. \tag{4.2}$$

The existence of an integrating factor (4.2) can be easily verified by using the identity (2.3) with cofactors

$$K_{1,2}(x, y) = [y(c + 2mx \pm \sqrt{c^2 - 4m})]/2, \; K_\Phi = -y(2b - 3mx).$$

Lemma 4.3. The following set of conditions is sufficient for the origin to be a center:

(5) $\quad a = k = r = 0, d = f = -1, \; g = (3c - b)/3, m = -2(bc + 2)/3,$

$$l = -b, n = bc + 2, p = (2b)/3, q = b, s = -bc - 2, b^2 = 3.$$

Proof. When the set of conditions (5) holds, the cubic system (1.1) has three invariant straight lines

$$l_1 \equiv 1 + A_1 x - y = 0, \; l_2 \equiv 1 + A_2 x - y = 0, \; l_3 \equiv 1 - bx + y = 0,$$

where A_1, A_2 are distinct solutions of the equation $3A^2 + (b - 3c)A - 3bc - 6 = 0$ and one invariant elliptic cubic $\Phi(x, y) \equiv (8bx^3 + 18bx - 36x^2 - 9)a_{00} - 8bx^3 + 9(x^2 + y^2) = 0.$

The system (1.1) has a Darboux first integral

$$l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} l_3^{\alpha_3} \Phi^{\alpha_4} = C, \tag{4.3}$$

where $\alpha_1 = b\sqrt{\Delta} + b^2 - 3bc - 18, \; \alpha_2 = b\sqrt{\Delta} - (b^2 - 3bc - 18), \; \alpha_3 = 2b\sqrt{\Delta}, \alpha_4 = -2b\sqrt{\Delta}$ and $\Delta = b^2 + 30bc + 9c^2 + 72.$

The first integral (4.3) was constructed by using the identity (2.3) with cofactors

$$K_{1,2} = [(3c - b - 3A)x^2 + 3A(c - A)xy + 3x + 3by^2 + 3Ay]/3,$$

$$K_3 = [3by^2 - (2b + 3c)x^2 - (3bc + 3)xy - 3by - 3x]/3,$$

$$K_\Phi = 2y(by - bcx - 2x - b).$$

Theorem 4.1. *The origin $O(0,0)$ is a center for cubic system (1.1) with two invariant straight lines and one invariant elliptic cubic curve (3.1) if and only if the first two Lyapunov quantities vanish.*

Proof. By using the algorithm described in [4], we compute the first two Lyapunov quantities L_1, L_2 for each set of conditions (i)–(viii) of Theorem 3.1. In the expressions for L_j we will neglect the denominators and non-zero factors.

In Cases (i) and (ii) the first two Lyapunov quantities vanish. Then we obtain the center conditions (1) and (2) of Lemma 4.1.

In Case (iii) the first two Lyapunov quantities vanish. Then Lemma 4.2.

In Case (iv) the first two Lyapunov quantities vanish. Then Lemma 4.1, (3).

In Case (v) the vanishing of L_1 gives $c = (-5b)/3$ and the second Lyapunov quantity looks $L_2 = ab^3 \neq 0$. In this case a singular point $O(0,0)$ is a focus.

In Case (vi) the first two Lyapunov quantities vanish. Then Lemma 4.3.

In Case (vii) the vanishing of the first Lyapunov quantity gives $c = (-4b)/3$. The second one looks $L_2 = 5b^2 + 9 \neq 0$ and therefore a singular point $O(0,0)$ is a focus.

In Case (viii) the first Lyapunov quantity looks $L_1 = b \neq 0$. In this case a singular point $O(0,0)$ is a focus. Theorem 4.1 is proved.

References

1. Romanovski V.G and Shafer D.S. The center and cyclicity problems: a computational algebra approach. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 2009.
2. Sadovskii A.P. Polynomial ideals and varieties. Minsk: BGU, 2008. (in Russian).
3. Amel'kin V.V., Lukashevich N.A., Sadovskii A.P. Non-linear oscillations in the systems of second order. Minsk: Belarusian University Press, 1982. (in Russian).
4. Cozma D. Integrability of cubic systems with invariant straight lines and invariant conics. Chișinău: Știința, 2013. 240 p.
5. Schlomiuk D. Algebraic particular integrals, integrability and the problem of centre. In: Trans. of the Amer. Math. Soc., 1993, vol. 338, no. 2. pp. 799-841.
6. Cozma D. Darboux integrability and rational reversibility in cubic systems with two invariant straight lines. In: E. J. of Diff. Equa., 2013, vol. 2013, no. 23. pp. 1-19.
7. Cozma D. The problem of the center for cubic systems with two parallel invariant straight lines and one invariant cubic. In: Romai Journal, 2015, vol. 11, no. 2. pp. 63-75.
8. Sadovskii A.P., Shcheglova T.V. Solution of the center-focus problem for a nine-parameter cubic system. In: Differential Equations, 2011, vol. 47, no. 2. pp. 208-223.

PRINCIPIILE METODOLOGICE ALE CONCEPTULUI DE COORDONATE

Dorin AFANAS, conf. univ., dr.
Mitrofan CIOBAN, academician, prof. univ., dr. hab.
Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. În prezenta lucrare sunt cercetate principiile metodologice ale conceptului de coordonate şi este alcătuită din scurt istoric; principiile liniar, algebric şi funcțional; aplicații.

Cuvinte cheie: sistem de coordonate, principiu liniar, principiu algebric, principiu funcțional, metoda coordonatelor.

METHODOLOGICAL PRINCIPLES OF THE COORDINATE CONCEPT

Abstract. In the present paper are studied the methodological principles of the concept of coordinates and it is structured in: short history; linear, algebraic and functional principles; applications.

Keywords: coordinate system, linear principle, algebraic principle, functional principle, coordinate method.

1. Scurt istoric

Originile matematicii şi, în particular, ale geometriei sunt strâns legate de conceptele de număr, mărime şi formă, care au făcut parte din viața cotidiană a societăților preistorice. La baza cunoștințelor geometrice au fost anumite principii empirice, determinate de concepte: ca distanța, lungimea, unghiul, aria, volumul. Thales din Milet (624 - 546 î.H.) a adus geometria în Grecia antică şi a fost primul care a propus deducția matematică pentru a obține noi cunoştințe geometrice. Thales a contribuit la dezvoltarea matematicii, astronomiei, filozofiei și a geografiei, fiind considerat părintele ştiințelor. Geometria analitică reprezintă o modalitate de abordare a geometriei cu ajutorul algebrei. Pentru aceasta spațiul cercetat se dotează cu sisteme de coordonate carteziene [2, 3, 4, 6, 7].

Meritul principal în crearea conceptului metodei coordonatelor îi aparține matematicianului francez René Descartes (1596 – 1650). Până în zilele noastre a ajuns următoarea istorie care i-a sugerat descoperirea acestei metode. Ocupând în teatru un anumit loc, conform biletului cumpărat, noi nici nu bănuim cine şi când a propus această metodă de numerotație a fotoliilor după rânduri şi locuri. Idee i-a venit vestitului filosof şi matematician Descartes – în cinstea cui şi sunt numite coordonatele dreptunghiulare. Vizitând teatrele din Paris, el rămânea uimit de învălmăşeala ce avea loc în sală la ocuparea fotoliilor de către spectatori. Sistemul său de numerație, în care fiecare fotoliu primea numărul de rând şi de ordine de la margine, a înlăturat această învălmăşeală şi a produs furori în societatea de elită din Paris. Descartes a descris ştiințific pentru prima dată sistemul dreptunghiular de coordonate în lucrarea „Cugetări asupra metodei" (1637).

De aceea sistemul dreptunghiular/rectangular de coordonate se mai numeşte *Sistemul Cartezian de coordonate*. În lucrarea sa „Geometria” (1637), unde s-a descoperit legătura dintre algebră şi geometrie, Descartes a introdus primele noțiuni de *mărime variabilă* şi *funcție*. Anume în sistemul cartezian de coordonate şi-au găsit interpretarea reală numerele negative. Un aport esențial la dezvoltarea metodei coordonatelor a fost adus şi de către Piere Fermat (1601-1665), ale cărui lucrări au fost publicate însă după moartea sa. Descartes şi Fermat aplicau metoda coordonatelor numai în plan. În spațiu, această metodă a fost aplicată pentru prima dată de Leonard Euler (1707 – 1783) în secolul al XVIII-lea. Aceste lucrări au avut influențe considerabile asupra dezvoltării geometriei analitice, a analizei matematice şi cartografiei. Ele au permis să „măsurăm armonia cu ajutorul algebrei”.

Ideea de a reprezenta numerele sub formă de puncte, iar punctelor să le pună valori numerice a apărut încă în antichitate în legătură cu dezvoltarea astronomiei, geografiei și a picturii. Primele aplicații ale coordonatelor sunt legate de astronomie şi geografie, de necesitatea de a determina poziția corpurilor cereşti de pe bolta cerească şi a anumitor puncte de pe suprafața Pământului, de a întocmi calendarele și hărțile geografice. Urmele aplicației coordonatelor dreptunghiulare au fost găsite pe pereții uneia din camerele funerare din Egiptul Antic. În cartografie conceptul de sistem de coordonate a fost implementat de către Thales. Anaximandru (Anaximandros) din Milet (610 – 546 î.H.), matematician şi filozof grec din şcoala ionică, este considerat primul alcătuitor al hărții geografice. El a descris, destul de exact pentru acele timpuri, latitudinea şi longitudinea locului, utilizând proiecțiile ortogonale. Aceste idei au fost dezvoltate de Eratostene din Cyren (276 – 195 î.Hr.), matematician, poet, geograf şi astronom antic grec, fondatorul geografiei matematice. Mai mult cu 100 de ani î.H. Hipparh (sau Hipparchus, 190 – 120 î.H.) a propus paralelele şi meridianele pe harta globului Pământesc, care sunt cunoscute în zilele noastre drept coordonate geografice: latitudinea şi longitudinea notate cu numere. Faptul că $\sqrt{2}$ nu este număr rațional a adus la diferențierea algebrei de geometrie, care şi a împiedicat dezvoltarea conceptului geometric de sistem de coordonate până la lucrările lui Descartes.

2. Rolul teoretic al sistemului de coordonate

Din punct de vedere formal, sistemul cartezian de coordonate în spațiu permite ca fiecărui punct M să i se asocieze un triplet de numere (x, y, z), numite coordonatele punctului M, notate: $M = (x, y, z)$ sau $M(x, y, z)$. Această asociere satisface următoarele principii:

Principiul 1 (Unicitatea şi Existența). Coordonatele punctului se determină în mod unic.

Principul 2 (Reversibilitatea). Coordonatele determină în mod unic punctul, adică pentru orice triplet de numere (x, y, z) există un unic punct cu aceste coordonate.

Principiul 3 (Măsurabilitatea şi ordinea punctelor). Există o unitate de măsură a lungimii față de care numărul $d(A,B) = ((a - p)^2 + (b - q)^2 + (c - r)^2)^{1/2}$ este egal cu distanța dintre punctele $A = (a, b, c)$ şi $B = (p, q. r)$. Punctul M este situat între punctele A şi B, dacă şi numai dacă punctele M, A, B sunt diferite şi $d(A, M) + d(M, B) = d(A, B)$.

Principiul 4 (Coliniaritatea). Fie $A = (a, b, c)$ şi $B = (p, q, r)$ două puncte diferite. Dreapta (AB) ce trece prin punctele A şi B este formată din totalitatea punctelor $M(A, B, t) = (t(p - a) + a, t(q - b) + b, t(r - c) + c)$, $t \in \mathbf{R}$, unde $\mathbf{R}$ este totalitatea numerelor reale. Totalitatea punctelor $[A, B) = \{M(A, B, t): t \in \mathbf{R}, t \geq 0\}$ este semidreapta cu originea A ce trece prin punctul B, iar $(A, B] = \{M(A, B, t): t \in \mathbf{R}, t \leq 0\}$ este a doua semidreaptă cu originea A situată pe dreapta (AB). $[A, B] = [A, B) \cap (A, B] = \{M(A, B, t): t \in \mathbf{R}, 0 \leq t \leq 1\}$ este segmentul cu extremitățile A şi B.

Principiul 5 (Coplanaritatea). Fie $A = (a, b, c)$, $B = (p, q, r)$ şi $C = (u, v, w)$ trei puncte necoliniare (care nu sunt situate pe o dreaptă). Atunci planul (ABC) este format din totalitatea punctelor $M = (x, y, z)$ coordonatele cărora satisfac ecuația:

$$\det \begin{bmatrix} x-a & y-b & z-c \\ p-a & q-b & r-c \\ u-a & v-b & w-c \end{bmatrix} = 0. \tag{2.1}$$

Patru puncte A , B , C , D se numesc coplanare, dacă există un plan α ce le conține. În caz contrar, punctele sunt necoplanare.

Proprietățile numerelor reale permit să stabilim că spațiul coordonat conform principiilor enumerate mai sus satisface Axiomele lui Hibert ale spațiului Euclidian tridimensional şi viceversa: Axiomele lui Hibert ale spațiului Euclidian tridimensional permit să coordonăm spațiul Euclidian tridimensional [1, 4, 5].

3. Principiile liniar, algebric şi funcțional

La cercetarea figurilor prin metoda coordonatelor se evidențiază următoarele două probleme (vezi [2, 3, 4, 6, 7]):

1) determinarea ecuației figurii după proprietățile ei;

2) după ecuația dată a figurii de cercetat proprietățile geometrice ale ei (problema inversă).

Problemele referitoare la determinarea punctelor planului realizează ambele scopuri de cercetare a metodei coordonatelor. În cursul preuniversitar de geometrie metoda coordonatelor permite să demonstrăm şi să rezolvăm probleme mai rațional decât prin metodele geometriei sintetice.

La rezolvarea problemelor prin metoda coordonatelor poate să apară numai un obstacol geometric. Una şi aceeaşi problemă se poate interpreta analitic în mod diferit, în funcție de sistemul de coordonate ales. Alegerea unui sistem de coordonate convenabil ne va permite numai experiență suficientă.

Pentru a rezolva probleme de tipul întâi şi doi prin metoda coordonatelor, este necesar de respectat următorul algoritm:

Pentru problemele de tipul întâi (probleme despre determinarea ecuației figurii date):

1. Evidențierea proprietății caracteristice a figurii date, adică evidențierea unei aşa proprietăți geometrice a ei, care satisfac numai acele puncte ale planului care îi aparțin figurii.
2. Alegerea pe plan a sistemului rectangular cartezian.
3. Scrierea proprietății caracteristice a figurii în limbajul coordonatelor.

Pentru problemele de tipul doi (probleme geometrice care se rezolvă prin metoda analitică):

1. Traducerea ecuației în limbajul analitic.

Pentru spațiul Euclidian n-dimensional E^n un sistem de coordonate cartezian rectangular generează o corespondență dintre punctele spațiului şi sistemele ordonate de n numere $(x_1; x_2; ...; x_n)$.

Această corespondență este în concordanță cu anumite principii: principiul liniar, principiul algebric şi cel funcțional.

Principiul liniar permite ca:

1. Planul $(n + 1)$-dimensional sau hiperplanul să se reprezinte printr-o ecuație liniară:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + a_{n+1} = 0. \tag{3.1}$$

2. Planul k-dimensional să se reprezinte printr-un sistem de $(n–k)$ ecuații liniare:

$$\begin{cases} a_{(1,1)}x_1 + a_{(1,2)}x_2 + \cdots + a_{(1,n)}x_n + a_{(1,n+1)} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{(k,1)}x_1 + a_{(k,2)}x_2 + \cdots + a_{(k,n)}x_n + a_{(k,n+1)} = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

3. Dreapta ca plan unu-dimensional să se reprezinte parametric prin n-ecuații liniare:

$$\begin{cases} x_1 = a_1t + b_1, \\ x_2 = a_1t + b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_n = a_nt + b_n. \end{cases} \tag{3.3}$$

Principiul algebric ne permite să reprezentăm suprafețele algebrice prin polinoame de n variabile:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x_1^{m_{(1,i)}} x_2^{m_{(2,i)}} \dots x_n^{m_{(n,i)}} = 0. \tag{3.4}$$

Gradul ecuației (3.4) este numărul

$$sup\{m_{(1,i)} + m_{(2,i)} + \cdots + m_{(n,i)}: i \le k\}, \tag{3.5}$$

care reprezintă şi ordinul suprafeței algebrice. Hiperplanele sunt suprafețele de ordinul întâi cu ecuațiile (1).

Principiul funcțional ne permite să prezentăm orice suprafață printr-o ecuație implicită

$$F(x_1; x_2; ...; x_n) = 0. \tag{3.6}$$

Curbele se prezintă prin n ecuații de un parametru:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t), \\ x_2 = f_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_n = f_n(t). \end{cases} \tag{3.7}$$

Aceste momente ne permit să studiem obiectele geometrice prin metoda vectorială, metode algebrice şi metode funcționale.

Reprezentările geometrice sunt un instrument favorabil în analiza diverselor probleme practice şi deci metoda coordonatelor împreună cu metoda reprezentărilor geometrice devin un instrument puternic în cercetarea şi rezolvarea problemelor teoretice şi practice. Prin urmare, teoria spațiilor vectoriale joacă un rol important la rezolvarea problemelor geometriei analitice.

4. Aplicații

Ne punem scopul să indicăm cum se aplică metoda coordonatelor la rezolvarea problemelor şi demonstrația teoremelor. Rezolvarea pur geometrică a acestor probleme necesită deseori construcții foarte complicate, iar metoda coordonatelor ne permite de a face acest lucru mai simplu.

Problema 1. Demonstrați teorema lui Stewart: *dacă este dat un triunghi ABC şi un punct D, situat între punctele B şi C, atunci este justă egalitatea*:

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD. \tag{4.1}$$

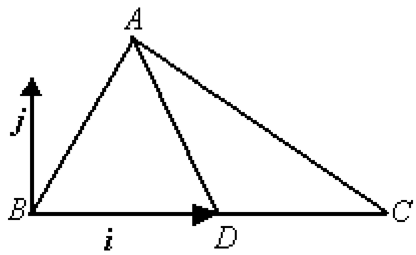


Figura 1.

Demonstrație. Considerăm un sistem rectangular cartezian de coordonate (vezi figura 1). Să notăm coordonatele punctelor A, C şi D: $A(a;\ b)$, $C(c;\ 0)$, $D(d;\ 0)$. Atunci $BC = c$ şi $BD = c - d$. Calculăm toate mărimile din egalitatea (4.1). Se obține:

$$AB^2 = a^2 + b^2,\ BC = c,\ AC^2 = (a - c)^2 + b^2,\ BD = d,$$
$$AD^2 = (a - d)^2 + b^2,\ DC = c - d.$$

Substituind aceste expresii în formula (1), obținem:

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = (a^2 + $$
$$+b^2)(c - d) + ((a - c)^2 + b^2)d - ((a - d)^2 + b^2)c =$$
$$= a^2c - a^2d + b^2c - b^2d + a^2d - 2acd + c^2d +$$
$$+ b^2d - a^2c + 2adc - d^2c - b^2c =$$
$$= c^2d - d^2c = cd(c - d) = BC \cdot DC \cdot BD.$$

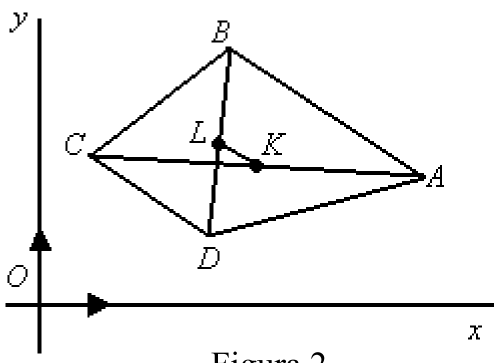


Figura 2.

Problema 2. Fie $ABCD$ un patrulater arbitrar, iar K şi L corespunzător mijlocurile diagonalelor AC şi BD. Demonstrați teorema lui Euler:

$$(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2) -$$
$$- (AC^2 + BD^2) = 4KL^2.$$

Demonstrație. Să considerăm patrulaterul $ABCD$ într-un sistem rectangular cartezian de coordonate (vezi figura 2).

Admitem că vârfurile patrulaterului au coordonatele: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, $D(x_4; y_4)$. Deoarece punctele K şi L sunt mijlocurile segmentelor AC şi BD, respectiv, atunci:

$$K\left(\frac{x_1 + x_3}{2}; \frac{y_1 + y_3}{2}\right),\ L\left(\frac{x_2 + x_4}{2}; \frac{y_2 + y_4}{2}\right).$$

Utilizând formula distanței dintre două puncte, obținem:

$$(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2) - (AC^2 + BD^2) =$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 +$$
$$+ (x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2 - (x_3 - x_1)^2 - (y_3 - y_1)^2 - (x_4 - x_2)^2 - (y_4 - y_2)^2 =$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 - x_1x_3 - x_2x_4) +$$
$$+ y_1^2 + + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - 2(y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_4 + y_4y_1 - y_1y_3 - y_2y_4).$$

Aceeaşi expresie se obține şi pentru $4KL^2$.

Problema 3. Aflați mulțimea tuturor punctelor, pentru fiecare dintre care diferența pătratelor distanțelor până la două puncte A şi B este o mărime constantă α.

Rezolvare. Alegem sistemul dreptunghiular de coordonate, cum este indicat în figura 3. Dacă $AB = a$, atunci în sistemul dat $A(0; 0)$ şi $B(a; 0)$.

Fie $M(x; y)$ un punct arbitrar al planului. Atunci

$$AM^2 = x^2 + y^2 \text{ şi } MB^2 = (x - a)^2 + y^2.$$

Pentru ca punctul $M(x; y)$ să aparțină locului geometric de puncte căutat este necesar şi suficient ca

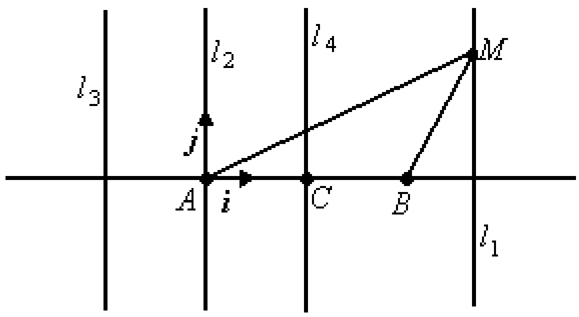


Figura 3.

$$x^2 + y^2 - ((x - a)^2 + y^2) = \alpha,$$
$$x^2 + y^2 - x^2 + 2ax - a^2 - y^2 = \alpha,$$
$$2ax = \alpha + a^2,\ x = \frac{\alpha + a^2}{2a}.$$

Această ecuație determină o dreaptă paralelă la axa (Oy) (perpendiculară pe AB) la distanța $\frac{|\alpha + a^2|}{2a}$. Această dreaptă intersectă semidreapta AB, dacă $\alpha + a^2 > 0$, trece prin A, dacă $\alpha + a^2 = 0$ şi intersectează semi-dreapta complementară, dacă $\alpha + a^2 < 0$ (dreptele l_1, l_2 şi l_3).

Observaţie. Dacă $\alpha = 0$, atunci locul geometric de puncte constă din acele şi numai acele puncte M pentru care $AM^2 - BM^2 = 0$ sau $AM = BM$. Am obţinut cunoscuta teoremă: *mulţimea tuturor punctelor egal depărtate de la două puncte A şi B este mediatoarea segmentului AB* (dreapta l_4).

Problema 4. Pe dreapta AB, ce trece prin centrul O a unui cerc, sunt depuse în ambele părţi de la centru segmentele $OA = OB = 2R$, unde R este raza cercului (vezi figura 4). De demonstrat că suma pătratelor distanţelor de la orice punct al cercului până la punctele A, B este de cinci ori mai mare decât aria pătratului înscris în acest cerc.

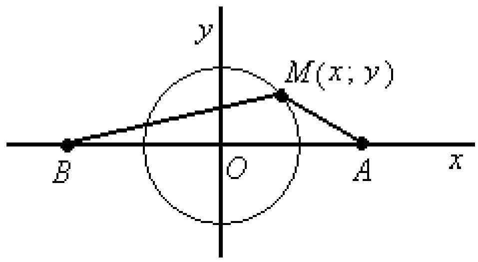


Figura 4.

Demonstraţie. Introducem un sistem rectangular cartezian de coordonate, aşa cum este indicat în figura 4. Atunci: $A(2R; 0)$, $B(-2R; 0)$. Fie $M(x; y)$ un punct arbitrar al cercului, atunci

$$AM^2 = (x - 2R)^2 + y^2 \text{ şi } BM^2 = (x + 2R)^2 + y^2.$$

Prin urmare,

$$AM^2 + BM^2 = (x - 2R)^2 + y^2 + (x + 2R)^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2) + 8R^2.$$

Deoarece punctul M aparţine cercului, atunci $x^2 + y^2 = R^2$. Aria pătratului înscris în cerc este egală cu $2R^2$. Aşa dar,

$$AM^2 + BM^2 = 2(x^2 + y^2) + 8R^2 = 2R^2 + 8R^2 =$$
$$= 10R^2 = 5 \cdot 2R^2.$$

Problema 5. Funcţia $f(t)$ este reprezentată grafic pe intervalul $t \in [0; 9]$ (vezi figura 5). Alcătuiţi expresiile analitice ale ei.

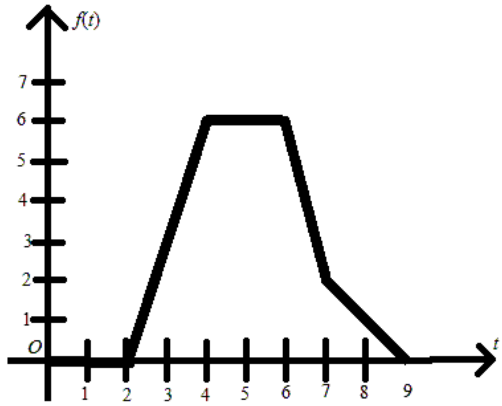


Figura 5.

Rezolvare. Graficul funcţiei $f(t)$ reprezentată în figura 5 poate fi notat cu segmentele de drepte $[OA]$, $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ şi $[DE]$ (vezi figura 6). Pentru a alcătui expresiile analitice ale funcţiei $f(t)$ este necesar de alcătuit ecuaţiile segmentelor acestor drepte, utilizând formula:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Fiecare segment se va cerceta aparte.

1) Segmentul OA este dat pe intervalul $t \in [0; 2)$ şi el coincide cu axa absciselor (Ox). Deoarece axa absciselor are ecuaţia $y = 0$, atunci pentru segmentul OA putem scrie:

$$f(t) = 0, \text{ dacă } 0 \le t < 2.$$

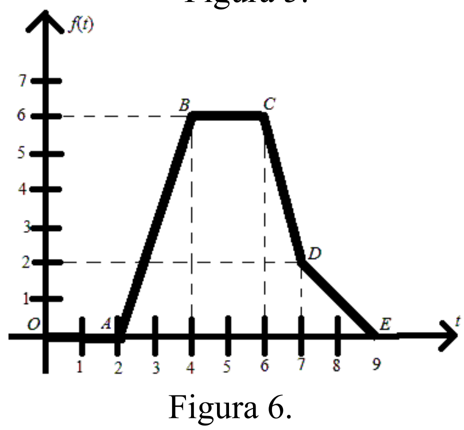


Figura 6.

2) Segmentul AB este dat pe intervalul $t \in [2;\ 4)$ şi, conform graficului, el trece prin punctele $A(2;\ 0)$ şi $B(4;\ 6)$. Scriem ecuaţia dreptei AB:

$$\frac{f - f_A}{f_B - f_A} = \frac{t - t_A}{t_B - t_A};\quad \frac{f - 0}{6 - 0} = \frac{t - 2}{4 - 2};$$

$$\frac{f}{6} = \frac{t - 2}{2} \text{ sau } f = 3(t - 2), \text{ de unde } f = 3t - 6.$$

Astfel, ecuaţia segmentului AB ia forma:

$$f(t) = 3t - 6, \text{ dacă } 2 \le t < 4.$$

3) Segmentul BC este dat pe intervalul $t \in [4;\ 6)$ şi, conform graficului, el este paralel cu axa absciselor. Ecuaţia dreptei paralele cu axa absciselor este un caz particular al ecuaţiei dreptei cu coeficient unghiular şi are forma: $y = b$. Din figura 6 rezultă că el trece prin punctele $B(4;\ 6)$ şi $C(6;\ 6)$. De aceea ecuaţia segmentului BC are forma:

$$f(t) = 6, \text{ dacă } 4 \le t < 6.$$

4) Segmentul CD este dat pe intervalul $t \in [6;\ 7)$ şi trece prin punctele $C(6;\ 6)$ şi $D(7;\ 2)$. Scriem ecuaţia dreptei CD:

$$\frac{f - f_C}{f_D - f_C} = \frac{t - t_C}{t_D - t_C};\quad \frac{f - 6}{2 - 6} = \frac{t - 6}{7 - 6};$$

$$\frac{f - 6}{-4} = \frac{t - 6}{1};\ f - 6 = -4(t - 6);$$

$$f - 6 = -4t + 24;\ f = 30 - 4t.$$

Prin urmare, ecuaţia segmentului CD are forma:

$$f(t) = 30 - 4t, \text{ dacă } 6 \le t < 7.$$

5) Segmentul DE este dat pe intervalul $t \in [7;\ 9]$ şi trece prin punctele $D(7;\ 2)$ şi $E(9;\ 0)$. Scriem ecuaţia dreptei DE:

$$\frac{f - f_D}{f_E - f_D} = \frac{t - t_D}{t_E - t_D};\quad \frac{f - 2}{0 - 2} = \frac{t - 7}{9 - 7};$$

$$\frac{f - 2}{-2} = \frac{t - 7}{2};\ f - 2 = -1 \cdot (t - 7);$$

$$f - 2 = -t + 7;\ f = 9 - t.$$

Deci, ecuaţia segmentului DE primeşte forma:

$$f(t) = 9 - t, \text{ dacă } 7 \le t \le 9.$$

Cercetând aparte toate segmentele funcţiei $f(t)$, dată grafic pe intervalul $t \in [0;\ 9]$, scriem expresiile analitice ale ei:

$$
f(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru} \quad 0 \le t < 2, \\ 3t - 6, & \text{pentru} \quad 2 \le t < 4, \\ 6, & \text{pentru} \quad 4 \le t < 6 \\ 30 - 4t, & \text{pentru} \quad 6 \le t < 7, \\ 9 - t, & \text{pentru} \quad 7 \le t \le 9. \end{cases}
$$

Bibliografie

1. Albu A. C., Obădeanu V., Popescu I. P., Rado F., Smaranda D. Geometrie pentru perfecționarea profesorilor. Bucureşti: EDP, 1983. 138 p.
2. Calmuțchi L., Afanas D., Cioban M. Geometrie analitică în plan. Chişinău: UST, 2014. 182 p.
3. Darboux G. Principes de Géométrie Analytique. Paris: Gauthier-Villars et C[16], Editeurs, 1917. 230 p.
4. Haimovici A., Borş C. Elemente de geometrie a spațiului. Bucureşti: EDP, 1970. 180 p.
5. Miron R. Geometrie elementară. Bucureşti: EDP, 1968. 282 p.
6. Атанасян Л.С. и др. Геометрия. Учебник 10-11 класс. Москва: Просвещение, 2009. 255 с.
7. Шемелова О. В., Макусева Т. Г., Бакеева Л. В. Руководство к самостоятельному решению задач по аналитической геометрии на плоскости. Санкт–Петербург: Свое издательство, 2015. 150 с.

CRITERII NOETHERIENE PENTRU UNELE ECUAȚII SINGULARE CU CONJUGARE COMPLEXĂ

Diana BÂCLEA*, conf. univ., dr.
Vasile NEAGU**, prof. univ., dr. hab.
*Universitatea de Stat din Cahul
**Universitatea de Stat din Moldova

Rezumat. În această lucrare se construieşte simbolul operatorilor integrali singulari cu conjugare complexă. Se demonstrează că simbolul este o matrice de ordin variabil: în punctele unghiulare ale conturului de integrare ordinul este egal cu patru, iar în celelalte puncte ordinul este egal cu doi. Condițiile noetheriene şi indicele operatorului se exprimă prin determinantul simbolului său.
Cuvunte cheie: operator integral singular, operator noetherian, simbol.

NOETHERIAN CRITERIA FOR SOME SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS WITH COMPLEX CONJUGATION

Abstract. In this paper we construct the symbol of singular integral operators with complex conjugation. It is proved that the symbol is a variable matrix: its order is equal to four at the corner points of the contour of integration and is equal to two in other points. The Noetherian conditions and the index of operator are expressed by the determinant of its symbol.
Keywords: singular integral operator, noetherian operator, symbol.

I. Introducere

Fie Γ un contur orientat, închis şi de tip Liapunov pe porțiuni, care împarte planul complex în domeniile F^+ şi F^- $\left(\infty \in F^-\right)$, $t_1,\dots,t_n -$ punctele unghiulare ale conturului Γ cu unghiurile θ_k, formate în aceste puncte de tangentele laterale la Γ. În spațiul $L_p(\Gamma,\rho)$ considerăm ecuația integrală singulară

$$(A\varphi)(t) = a_1(t)\varphi(t) + a_2(t)\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + a_3(t)\overline{\varphi(\mathrm{t})} + a_4(t)\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{\varphi(t)\tau}}{\tau - t}d\tau \ , \qquad (1)$$

unde $\rho(t) = \prod_{k=1}^{n}\left|t - t_k\right|^{\beta_k}$ $\left(-1 < \beta_k < p - 1\right)$ şi $a_j(t)$ $\left(j = 1,2,3,4\right)$ sunt funcții continue în orice punct ,$t \in \Gamma$ cu excepția punctelor t_k $\left(k = 1,\dots,n\right)$, în care există limitele finite $a\left(t_k \pm 0\right)$. În cele ce urmează este comod ca operatorul, generat de ecuația (1), să fie scris sub o altă formă. În acest scop facem următoarele notații:

$$a_1(t) + a_2(t) = a(t),\ a_1(t) - a_2(t) = b(t),$$

$$a_3(t) + a_4(t) = c(t),\ a_3(t) - a_4(t) = d(t),$$

$$(V\varphi)(t) = \ \overline{\varphi(t)}(t),\ P = (I + S)/2 \ \text{ şi } Q = I - P,$$

unde S este operatorul integral singular cu nucleul Cauchy,

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \ \ (t \in \Gamma).$$

Cu aceste notații operatorul (1) se scrie sub forma

$$A = aP + bQ + (cP + dQ)V \quad . \tag{2}$$

Operatorul A devine liniar în spațiul $L_p(\Gamma,\rho)$ dacă acest spațiu este considerat peste câmpul numerelor reale. Notăm acest spațiu prin $\widetilde{L}_p(\Gamma,\rho)$.

În cazul conturului Liapunov operatorul A a fost studiat în monografia [1]. În determinarea condițiilor noetheriene pentru operatorul (2) un rol important l-a jucat faptul că în cazul conturului de tip Liapunov operatorul $VSV + S$ este compact în spațiul $L_p(\Gamma,\rho)$. Aşa cum se arată în această lucrare, dacă conturul Γ are puncte unghiulare, atunci operatorul $VSV + S$ nu mai este compact şi raționamentele din lucrările menționate mai sus nu pot fi aplicate. În plus, se demonstrează că înseşi condițiile noetheriene pentru operatorul A depind şi de mărimile unghiurilor de pe conturul Γ.

În această lucrare se construieşte simbolul operatorilor integrali singulari cu conjugare complexă de forma (2). Se demonstrează că simbolul este o matrice de ordin variabil: în punctele t_k $(k = 1,...,n)$ ordinul este egal cu patru, iar în celelalte puncte acest ordin este egal cu doi. Simbolul mai depinde de coeficienții operatorului, de spațiul $L_p(\Gamma,\rho)$ şi de mărimile unghiurilor de pe conturul de integrare. Condițiile noetheriene şi indicele operatorului A se exprimă prin determinantul simbolului său. Se stabilesc anumite relații dintre operatorii de forma (2) şi problemele la frontieră de tip Riemann [1-3] pentru funcții analitice.

Rezultate similare sunt obținute şi pentru operatorii $\sum_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{r} A_{jk}$, unde A_{jk} sunt operatori de forma (2).

II. Proprietăți ale operatoruluI $VSV + S$

Teorema 1. *Fie Γ un contur închis de tip Liapunov. Atunci operatorul $VSV + S$ este compact în spațiul $L_p(\Gamma,\rho)$.*

Demonstrație. Notăm prin Γ_0 cercul unitate ($\Gamma_0 = \{t : |t| = 1\}$) şi prin S_0 operatorul S_{Γ_0}. Atunci

$$(VS_0V + S_0)\varphi \;= -\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\varphi(\tau)\overline{d\tau}}{\overline{\tau} - \overline{t}} + \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \;= \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau \,.$$

Aşadar, dacă Γ este cercul unitate, atunci operatorul $VS_0V + S_0$ este compact în $L_p(\Gamma,\rho)$. Vom considera cazul în care Γ este orice contur Liapunov închis. Fie $\nu : \Gamma_0 \to \Gamma$ o aplicație care verifică condițiile: există derivata $\nu'(t)$ diferită de zero şi $\nu'(t)$ satisface condițiile lui Hölder. Notăm cu $B : (L_p(\Gamma,\rho) \to (L_p(\Gamma_0,\rho_0)$, unde

$$\rho_0(z) = \prod_{k=1}^{n}|\nu(z) - \nu(z_k)|^{\beta_k} \;\; (\nu(z_k) = t_k),$$

operatorul definit prin relația $(B\varphi)(z) = \varphi(\nu(z))$ ($z \in \Gamma_0$). Atunci

$$\left(BSB^{-1}-S_0\right)\varphi=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0}\left(\frac{\nu'(\xi)}{\nu(\xi)-\nu(z)}-\frac{1}{\xi-z}\right)\varphi(\xi)d\xi \quad . \qquad (3)$$

Aşa cum $\nu'(\xi)$ este diferită de zero şi satisface condiţiile lui Hölder, operatorul $BSB^{-1}-S_0$ are (a se vedea [4]) singularitate slabă pe $\Gamma_0\times\Gamma_0$ şi, prin urmare, este compact în spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$. Deoarece operatorii V şi B comută, din (3) şi din cele deja demonstrate obţinem că operatorul

$$B(VSV+S)B^{-1}-VS_0V-S_0 \qquad (4)$$

este compact în $L_p(\Gamma,\rho)$, de aici rezultă că şi $VSV+S$ de asemenea este compact în $L_p(\Gamma,\rho)$. Teorema este demonstrată.

O altă demonstraţie a acestei teoreme poate fi găsită în [1, p.36].

Să arătăm că afirmaţiile teoremei 1 sunt false dacă conturul Γ are puncte unghiulare. Să presupunem, de exemplu, că $\Gamma\supset\Gamma_1\cup\Gamma_2$, unde Γ_1 şi Γ_2 sunt segmente de dreaptă care unesc punctul $z=0$ cu $z=1$ şi, respectiv $z=0$ cu $z=i$. În punctul $z=0\in\Gamma$ conturul formează un unghi de măsură $\pi/2$. Vom arăta că în acest caz operatorul $VSV+S$ nu este compact în $L_2(\Gamma)$. Admitem, prin absurd, că $VSV+S\in\mathrm{T}(L_2(\Gamma))$. Fie X funcţia caracteristică a lui Γ_2 şi $M=\mathrm{X}(VSV+S)$. Vom arăta că $M\notin\mathrm{T}(L_2(\Gamma))$ şi, în consecinţă, vom obţine o contrazicere.

În spaţiul $L_2(\Gamma)$ să considerăm şirul $\{\varphi_n(t)\}$ de funcţii definit prin relaţiile

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}\sqrt{n}, \text{ pentru } t\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right];\\ 0, \quad \text{pentru } t\in\Gamma\setminus\left[0;\dfrac{1}{n}\right].\end{cases} \qquad n\in\mathrm{N}.$$

Avem $\|\varphi_n\|_{L_2(\Gamma)}=1.$ Vom arăta că din şirul $\psi_n=M\varphi_n$ nu se poate extrage niciun subşir convergent. În baza definiţiei operatorului M avem

$$(M\varphi_n)(t)=\mathrm{X}(t)(VSV+S)\varphi_n=\frac{\mathrm{X}(t)\sqrt{n}}{\pi i}\int_0^{1/n}\left(\frac{1}{\tau-t}-\frac{1}{\tau-\bar{t}}\right)d\tau=$$

$$=\frac{\mathrm{X}(t)}{\pi i}\sqrt{n}\int_0^{1/n}\frac{t-\bar{t}}{(\tau-t)(\tau-\bar{t})}d\tau.$$

Prin urmare,

$$\|M\varphi_n\|^p_{L_p(\Gamma)}=\frac{n^{p/2}}{\pi^p}\int_\Gamma\left|\frac{t-\bar{t}}{(\tau-t)(\tau-\bar{t})}d\tau\right|^p|\,dt\,|=$$

$$=c_pn^{p/2}\int_0^1\left|\operatorname{arctg}\frac{1}{nt}\right|^p dt\le c_pn^{\frac{p-2}{2}}\int_0^n\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{t}\right)^p dt\le\ c_pn^{\frac{p-2}{2}}\int_0^\infty\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{t}\right)^p dt=\tilde{c}_pn^{\frac{p-2}{2}},$$

unde c_p şi $\tilde{c}_p$ sunt constante ce depind numai de p. De aici rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\|M\varphi_n\|_{L_p(\Gamma)}=0, \text{ pentru } 1<p<2.$$

Astfel, dacă şirul $\psi_n = M\varphi_n (\in L_2(\Gamma))$ ar conține un subşir convergent, atunci acest subşir ar converge în mod necesar la zero. Însă

$$\|\psi_n\|^2_{L_2(\Gamma)} = \|M\varphi_n\|^2_{L_2(\Gamma)} \geq \tilde{\tilde{c}}_p \int_0^n arctg^2 \frac{1}{t} dt \geq \tilde{\tilde{c}}_p \int_0^1 arctg^2 \frac{1}{t} dt > 0,$$

de unde rezultă că $\{\psi_n\}$ nu conține niciun subşir convergent în spațiul $L_2(\Gamma)$. Aşadar, operatorul M nu este compact în spațiul $L_2(\Gamma)$.

III. Criterii noetheriene

Vom stabili că condițiile în care operatorul de forma (2) (şi operatorii mai complicați) sunt de tip Noether se exprimă cu ajutorul determinantului simbolului. De aceea vom defini mai întâi simbolul operatorilor $aI,\ P,\ Q$ şi V. Notăm prin $a(t,\xi)$, $\mathsf{P}(t,\xi)$, $\mathsf{Q}(t,\xi)$ şi $V(t,\xi)$ $(t \in \Gamma, -\infty \leq \xi \leq \infty)$ simbolurile respective ale acestor operatori. Punem

$$a(t,\xi) = \begin{cases} \begin{Vmatrix} a(t) & 0 \\ 0 & a(t) \end{Vmatrix}, & \text{pentru } t \in \Gamma \setminus \{t_1,..,t_n\} \\ \begin{Vmatrix} a(t_k+0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{a(t_k+0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t_k-0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{a(t_k-0)} \end{Vmatrix}, & \text{pentru } t = t_k \ (k=1,..,n), \end{cases} \tag{4}$$

$$\mathsf{P}(t,\xi) = \begin{cases} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, & pentru\ t \in \Gamma \setminus \{t_1,...,t_n\}, \\ \dfrac{1}{z_k^{2\pi}-1} \begin{Vmatrix} z_k^{2\pi} & 0 & -z_k^{\theta_k} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & z_k^{2\pi-\theta_k} \\ z_k^{2\pi-\theta_k} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -z_k^{\theta_k} & 0 & z_k^{2\pi} \end{Vmatrix}, & pentru\ t = t_k\ (k=1,...,n), \end{cases} \tag{5}$$

unde $z_k = exp(\xi + i\dfrac{1+\beta_k}{p})\ \ (-\infty \leq \xi \leq +\infty)$.

$$\mathsf{Q}(t,\xi) = E(t) - \mathsf{P}(t,\xi) \text{ în care } E(t) = \begin{cases} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, & pentru\ t \in \Gamma \setminus \{t_1,...,t_n\}, \\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, & pentru\ t = t_k\ (k=1,..,n). \end{cases} \tag{6}$$

În sfârşit,

$$V(t,\xi)=\begin{cases}\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}, & pentru\ t\in\Gamma\setminus\{t_1,\dots,t_n\},\\ \begin{Vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{Vmatrix}, & pentru\ \ t=t_k\ \ (k=1,\dots,n).\end{cases} \tag{7}$$

Dacă operatorul A are forma (2), atunci simbolul lui, $A(t,\xi)$, îl definim prin relaţia

$$A(t,\xi)=a(t,\xi)\mathsf{P}(t,\xi)+b(t,\xi)\mathsf{Q}(t,\xi)+(c(t,\xi)\mathsf{P}(t,\xi)+d(t,\xi)\mathsf{Q}(t,\xi))v(t,\xi). \tag{8}$$

Dacă $a,b,c,d\in CP_m(\Gamma)$, atunci simbolul operatorului $A\in L(L_p^m(\Gamma,\rho))$ se defineşte prin relaţia (8), în care $a(t,\xi), b(t,\xi), c(t,\xi)$ şi $d(t,\xi)$ sunt respectiv matrice de ordinul $2m$, sau $4m$, definite de egalităţile (4).

Teorema 2. *Operatorul*

$$A=aP+bQ+(cP+dQ)V$$

$(a,b,c,d\in CP(\Gamma))$ *este noetherian în spaţiul* $\widetilde{L}_p(\Gamma,\rho)$, *dacă şi numai dacă*

$$det\, A(t,\xi)\neq 0\,(t\in\Gamma,-\infty\leq\xi\leq\infty).$$

În prealabil vom demonstra două leme.

Lema 1. *Operatorul* A *este noetherian în spaţiul* $\widetilde{L}_p(\Gamma,\rho)$, *dacă şi numai dacă în spaţiul* $\widetilde{L}_p^2(\Gamma,\rho)=\widetilde{L}_p(\Gamma,\rho)\times\widetilde{L}_p(\Gamma,\rho)$ *este noetherian operatorul*

$$\widetilde{A}=\begin{Vmatrix}aP+bQ & cP+dQ\\ \bar{c}VPV+\bar{d}VQV & \bar{a}VPV+\bar{b}VQV\end{Vmatrix}. \tag{9}$$

În plus, $Ind\, A=\frac{1}{2}Ind\,\widetilde{A}$.

Demonstraţie. Are loc [5] identitatea

$$\begin{Vmatrix}X+YW & 0\\ 0 & X-YW\end{Vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}I & W\\ I & -W\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}X & Y\\ WYW & WXW\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}I & I\\ W & -W\end{Vmatrix}, \tag{10}$$

unde X,Y,W sunt orice operatori liniari şi mărginiţi care acţionează într-un spaţiu Banach B şi $W^2=I$.

În identitatea (10) punem $X=aP+bQ,\ Y=cP+dQ$, atunci

$$\widetilde{A}=H\begin{Vmatrix}A & 0\\ 0 & A_1\end{Vmatrix}H^{-1}, \tag{11}$$

unde

$$A_1=aP+bQ-(cP+dQ)V,\ \ H=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}I & I\\ V & -V\end{Vmatrix}.$$

Fie $(M\varphi)(t)=i\varphi(t)$, atunci se verifică imediat că $MA_1M^{-1}=A$ şi afirmaţiile lemei rezultă din egalitatea (11).

Observația 1. *Fie* Γ *de tip Liapunov, atunci în baza teoremei 1 avem* $VSV = S + T_1$ *şi, prin urmare,* $VPV = Q + T_2$, $VQV = P + T_3$, *unde* $T_j \in \mathrm{T}\left(\widetilde{L}_p(\Gamma,\rho)\right)$ $(j = 1,2,3)$. *De aici rezultă că operatorul* $\widetilde{A}$ *diferă de operatorul*

$$\widetilde{A}_0 = \begin{Vmatrix} a & c \\ \overline{d} & \overline{b} \end{Vmatrix} P + \begin{Vmatrix} a & c \\ \overline{c} & \overline{a} \end{Vmatrix} Q$$

printr-un termen compact.

Operatorul $\widetilde{A}_0$ este un operator integral singular cu coeficienți matriceali continui pe porțiuni. Pentru aceşti operatori sunt cunoscute [5] condițiile în care ei sunt de tip Noether. Aceste condiții constau în faptul că $det\,\widetilde{A}_0(t,\xi) \neq 0$ pentru orice $(t,\xi) \in \Gamma \times \overline{\mathrm{R}}$. Se observă că în acest caz $det\,\widetilde{A}_0(t,\xi)$ coincide cu $det\,A(t,\xi)$, definit de egalitatea (8).

Din lema 1 rezultă

Corolarul 2. *Fie* Γ *de tip Liapunov. Pentru ca operatorul* A *să fie noetherian este necesar şi suficient ca*

$$det\,A(t,\xi) \neq 0 (t \in \Gamma, -\infty \leq \xi \leq \infty).$$

Lema 2. *Operatorul* A *este local noetherian în punctul* $t_0 \in \Gamma \setminus \{t_1,...,t_n\}$, *dacă şi numai dacă*

$$det\,A_0(t,\xi) \neq 0 (-\infty \leq \xi \leq \infty).$$

Demonstrație. Notăm cu $u(t_0) \subset \Gamma \setminus \{t_1,...,t_n\}$ o vecinătate a punctului t_0. Fie $\widetilde{\Gamma}$ un contur închis Liapunov care conține vecinătatea $u(t_0)$. În spațiul $\widetilde{L}_p(\Gamma)$ considerăm operatorul

$$B = \widetilde{a}\widetilde{P} + \widetilde{b}\widetilde{Q} + \left(\widetilde{c}\widetilde{P} + \widetilde{d}\widetilde{Q}\right)V,$$

unde $\widetilde{P} = \left(I + S_{\widetilde{\Gamma}}\right)/2$, $\widetilde{Q} = I - \widetilde{P}$, iar $\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}, \widetilde{d}$ sunt funcții continue pe $\widetilde{\Gamma}$, restricțiile cărora pe $u(t_0)$ coincid cu funcțiile a,b,c,d. Evident, operatorii A şi B sunt cvasi-echivalenți în punctul t_0. Prin urmare, ambii sunt în acelaşi timp locali noetherieni în punctul t_0. Conform corolarului 2, condiția $det\,B(t_0,\xi) \neq 0 (\xi \in \overline{\mathrm{R}})$ este necesară şi suficientă în care B este local noetherian în punctul t_0. Aşa cum $det\,B(t,\xi) = det\,A(t_0,\xi)$, lema este demonstrată.

Demonstrația teoremei. În baza lemei 2, este îndeajuns să arătăm că condiția $det\,A(t_k,\xi) \neq 0 (-\infty \leq \xi \leq \infty)$ este necesară şi suficientă în care operatorul A este noetherian în punctul $t_k (k = 1,...,n)$.

Presupunem pentru început că $n = 1$. De rând cu conturul Γ considerăm conturul $\Gamma_1 (= \Gamma_{\theta_1})$, care are de asemenea un singur punct unghiular z_1 de aceeaşi măsură $\theta = \theta(t_1)$ cu proprietatea că dacă $z \in \Gamma_1$, atunci şi punctul $\bar{z} \in \Gamma_1$. Prin urmare, $z_1 = 0$. Atunci există o aplicație $\mu: \Gamma_1 \to \Gamma$, astfel încât $\mu'(t) \neq 0$ $(t \in \Gamma_1)$ şi satisface condițiile Hölder. Notăm cu $B: L_p(\Gamma,\rho) \to L_p(\Gamma_1,\rho_1)$ $\left(\rho(t) = |t - t_1|^{\beta_1}, \rho_1(t) = |z|^{\beta_1}\right)$ operatorul

$$(B\varphi)(z) = \varphi(\mu(z)).$$

Avem $BaB^{-1} = a_1 I(a_1(z) = a(\mu(z))),\ BVB^{-1} = V$ şi $BSB^{-1} = S_1 + T_1$, unde $S_1 = S_{\Gamma_1}$ şi $T_1 \in \mathsf{T}\left(L_p^2(\Gamma_1, \rho_1)\right)$. Ținând cont de acestea, obținem:

$$\widetilde{B}\widetilde{A}\widetilde{B}^{-1} = \begin{Vmatrix} a_1 P_1 + b_1 Q_1 & c_1 P_1 + d_1 Q_1 \\ \overline{c}\, V P_1 V + \overline{d}_1 V Q_1 V & \overline{a}\, V P_1 V + \overline{b}_1 V Q_1 V \end{Vmatrix} + T, \tag{12}$$

unde

$$\widetilde{B} = \begin{Vmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix}, P_1 = (I + S_1)/2, Q_1 = I - P_1 \quad \text{şi } T \in \mathsf{T}\left(L_p^2(\Gamma_1, \rho_1)\right).$$

Notăm cu W operatorul de translație, definit prin relația

$$(W\varphi)(z) = \varphi(\omega(z)),$$

unde $\omega(z) = \bar{z}(z \in \Gamma_1)$. Observăm că derivata $\omega'(z)$ este discontinuă în punctul $z = 0$, şi $\omega'(+0) = exp(i\theta_1), \omega'(-0) = exp(-i\theta_1)$. Se verifică uşor că

$$VS_1V = WS_1W \tag{13}$$

Înlocuind (13) în (12) şi utilizând lema 1, obținem că operatorul A este local noetherian în punctul t_1, dacă şi numai dacă această proprietate o are în punctul $z = 0$ operatorul

$$M_1 = \begin{Vmatrix} a_1 P_1 + b_1 Q_1 & c_1 P_1 + d_1 P_1 \\ \overline{c}_1 W P_1 W + \overline{d}_1 W Q_1 W & \overline{a}_1 W P_1 W + \overline{b}_1 W Q_1 W \end{Vmatrix}.$$

Operatorul M_1 este un operator integral singular cu translația W studiat în lucrarea [7]. Din această lucrare obținem că operatorul M_1 este local noetherian în punctul $z = 0$, dacă şi numai dacă $det\, M_1(0,\xi) = 0 (\xi \in \overline{\mathsf{R}})$. Aşa cum $det\, A(t_1, \xi) = det\, M_1(0,\xi)$, rezultă că pentru $n = 1$ teorema este demonstrată.

Trecem la cazul general. Fie $u_k = u(t_k)(\subset \Gamma)$ o vecinătate a punctului t_k ce nu conține niciun punct $t_j \neq t_k$. Ca şi mai sus considerăm conturul $\Gamma_k (= \Gamma_{\theta_k})$ cu un singur punct unghiular $z = 0$ şi cu condiția că împreună cu orice punct z conține şi punctul $\bar{z}$. Notăm cu μ_k o aplicație a vecinătății u_k pe o vecinătate $v_k = v_k(0)(\subset \Gamma_k)$ şi, în plus, $\mu_k(t_k) = 0$. Aşa cum Γ şi Γ_k în punctul t_k şi, respectiv, în $z = 0$ formează unghiuri de aceeaşi măsură θ_k, atunci μ_k poate fi aleasă astfel încât $\mu_k'(t) \neq 0 (t \in u(t_k))$ şi această derivată să satisfacă condițiile lui Holder. Dacă $f \in CP(\Gamma)$, atunci convenim ca prin $f_k(z)(z \in v_k(0))$ să notăm funcția $f(\mu_k^{-1}(z))$, unde μ_k^{-1} este inversa lui μ_k. Prelungim funcțiile $a_k(z), b_k(z), c_k(z), d_k(z)$ prin continuitate pe conturul Γ_k şi le notăm prin aceleaşi litere.

În spațiul $L_p^2(\Gamma_k, |z|^{\beta_k})$ considerăm operatorul

$$M_k = \left\| \begin{matrix} a_k P_k + b_k Q_k & c_k P_k + d_k Q_k \\ \overline{c}_k W P_k W + \overline{d}_k W Q_k W & \overline{a}_k W P_k W + \overline{b}_k W Q_k W \end{matrix} \right\|,$$

unde $(W\varphi)(z) = \varphi(\overline{z})$ şi $S_k = S_{\Gamma_k}$. Operatorul $\widetilde{A}$, definit de relația (11), este cvasi-echivalent în punctul t_k cu operatorul M_k în punctul $z = 0$:

$$T_{\mu_k} P_{u_k} \widetilde{A} P_{u_k} T_{\mu_k^{-1}} \overset{o}{\sim} P_{v_k} M_k P_{v_k},$$

unde

$$(P_F\varphi)(t) = \begin{cases} \varphi(t), t \in \Gamma, \\ 0, \; t \in \Gamma \setminus F, \end{cases} \qquad (T_\varphi f)(t) = \begin{cases} f(\varphi(t)), t \in u, \\ 0, \; t \in \Gamma \setminus u. \end{cases}$$

Prin urmare, $\widetilde{A}$ şi M_k simultan sunt operatori local noetherini ($\widetilde{A}$ în punctul t_k iar operatorul M_k în $z = 0$). În baza teoremei 2, operatorul M_k are această proprietate dacă şi numai dacă $det\, M_k(0,\xi) \neq 0 (\xi \in \overline{\mathrm{R}})$. Rămâne să ne convingem că $det\, M_k(0,\xi) = det\, A(t,\xi)$ şi teorema este demonstrată.

În calitate de consecință se poate formula următorul rezultat

Teorema 3. *Fie funcțiile a,b,c și d aparțin mulțimii $CP_m(\Gamma)$. Operatorul*

$$A = aP + bQ + (cP + dQ)V$$

este noetherian în spațiul $L_p^m(\Gamma,\rho)$, dacă și numai dacă

$$det\, A(t,\xi) \neq 0 (t \in \Gamma, \xi \in \overline{\mathrm{R}}).$$

Fie operatorul A are forma

$$A = \sum_{j=1}^{r} A_{j1} A_{j2} \ldots A_{js},$$

unde $A_{jk} = a_{jk}P + b_{jk}Q + (c_{jk}P + d_{jk}Q)V \left(a_{jk}, b_{jk}, c_{jk}, d_{jk} \in CP_m(\Gamma)\right)$.

Definim simbolul operatorului A în felul următor

$$A(t,\xi) = \sum_{j=1}^{r} A_{j1}(t,\xi) A_{j2}(t,\xi) \ldots A_{js}(t,\xi),$$

unde $A_{jk}(t,\xi)$ este simbolul operatorului A_{jk}. Cu ajutorul teoremei 2, repetând raționamentele de la demonstrația teoremei 1, se obține ușor următorul rezultat.

Teorema 4. *Operatorul A este noetherian în spațiul $L_p^m(\Gamma,\rho)$, dacă și numai dacă*

$$det\, A(t,\xi) = det \sum_{j=1}^{r} \prod_{k=1}^{s} A_{jk}(t,\xi) \neq 0, \left(t \in \Gamma, \xi \in \overline{\mathrm{R}}\right).$$

IV. Observații de incheiere

În această secțiune se arată că condițiile în care operatorul $A = aP + bQ + (cP + dQ)V$ este noetherian depind de prezența punctelor unghiulare pe conturul Γ și de măsura acestor unghiuri.

În secțiunea 1 s-a demonstrat că operatorul $VSV+S$ nu este, în general, compact în spațiul $\widetilde{L}_p(\Gamma,\rho)$. Cu ajutorul teoremei 2 se poate demonstra că $VSV+S\in \mathbf{T}(L_p(\Gamma,\rho))$, dacă și numai dacă conturul Γ este de tip Liapunov. Într-adevăr, suficiența este stabilită de teorema 1. Fie Γ un contur Liapunov pe porțiuni și t_0 un punct unghiular cu unghiul $\theta_0=\theta(t_0)(0<\theta_0<\pi)$. Amintim că dacă operatorul $VSV+S$ se presupune compact în spațiul $L_p(\Gamma,|t-t_0|^{\beta_0})$, atunci operatorul $A_\lambda=VSV+S-\lambda I$ trebuie să fie noetherian pentru orice $\lambda\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$.

Simbolul operatorului A_λ în punctul t_0 are forma

$$A_\lambda(t_0,\xi)=\begin{Vmatrix} -\lambda & 0 & \omega(\xi) & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & \omega(\xi) \\ \omega(\xi) & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & \omega(\xi) & 0 & -\lambda \end{Vmatrix},$$

unde

$$\omega(\xi)=2\cdot\frac{exp[(2\pi-\theta_0)(\xi+i(1+\beta_0)/p)]-exp[\theta_0(\xi+i(1+\beta_0)/p)]}{exp[2\pi(\xi+i(1+\beta_0)/p)]-1}.$$

În baza teoremei 1, operatorul A_λ este noetherian dacă și numai dacă $det\, A_\lambda(t,\xi)\neq 0(t\in\Gamma,-\infty\leq\xi\leq\infty)$. În particular, pentru toate valorile lui λ care verifică condițiile

$$det\, A_\lambda(t_0,\xi)=0(-\infty\leq\xi\leq\infty)$$

operatorul A_λ nu este noetherian în $\widetilde{L}_p(\Gamma,|t-t_0|^{\beta_0})$. Adică pentru toate valorile $\lambda=\pm\omega(\xi)$ $(-\infty\leq\xi\leq\infty)$ operatorul A_λ nu este noetherian. Așa cum $\theta_0\neq\pi$, rezultă că $\omega(\xi)\not\equiv 0$. Am obținut o contradicție cu ipoteza.

Simbolul operatorului

$$A=aP+bQ+(cP+dQ)V$$

depinde de măsurile unghiurilor formate de tangentele laterale în punctele conturului Γ. Aceasta se vede din definiția simbolului operatorilor P și Q. Dacă considerăm $c(t)\equiv d(t)\equiv 0$, atunci operatorul A are forma $A=aP+bQ$, și, după cum se cunoaște [3,4,8], condițiile în care el este noetherian nu depind de unghiurile $\theta(t_k)$, cu toate că simbolul definit în această lucrare depinde, în mod explicit, de $\theta(t_k)$. În legătură cu aceasta, apare firesc întrebarea dacă este esențială dependența simbolului operatorului A de mărimile $\theta(t_k)(k=1,...,n)$. Altfel spus, condițiile în care operatorul $A\left(|c(t)|+|d(t)|\not\equiv 0\right)$ este noetherian depind într-adevăr de $\theta_k=\theta(t_k)$? Vom arăta că răspunsul la această întrebare este afirmativ.

Fie $A=\left(1+\sqrt{2}\right)P+\left(1-\sqrt{2}\right)Q+V.$

Dacă conturul Γ este de tip Liapunov, atunci operatorul A este noetherian în toate spațiile $\widetilde{L}_p(\Gamma,\rho)$. Fie conturul Γ posedă un punct unghiular t_0 cu unghiul $\theta(t_0)=\dfrac{\pi}{2}$ și $p=2.$ Atunci simbolul acestui operator în punctul $(t_0,0)$ are forma

$$A(t_0,0)=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1+i & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1-i \\ 1-i & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1+i & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

și $det\, A(t_0,0)=0.$ Astfel, operatorul

$$A=\left(1+\sqrt{2}\right)P+\left(1-\sqrt{2}\right)Q+V$$

nu este noetherian în spațiul $\widetilde{L}_2(\Gamma)$. Acest exemplu ne arată că prezența punctelor unghiulare influențează în mod esențial condițiile noetheriene ale operatorului (2).

În încheierea acestei secțiuni considerăm problema generalizată la frontiera lui Riemann, care constă în următoarele [9]. Să se determine două funcții analitice $\Phi^+(z)$ ți $\Phi^-(z)$ în F^+ și, respectiv, în F^- cu următoarele proprietăți: pot fi reprezentate în F^+ și, respectiv, în F^-cu ajutorul integralei lui Cauchy; valorile la limită $\Phi^+(t)$ și $\Phi^-(t)$ pe conturul Γ aparțin spațiului $L_p(\Gamma,\rho)$; limitele $\Phi^+(t)$ și $\Phi^-(t)$ la frontieră satisfac condițiile

$$\Phi^+(t)=a(t)\Phi^-(t)+b(t)\overline{\Phi^-(t)}+c(t), \tag{14}$$

unde a,b,c sunt funcții cunoscute. În cazul conturului Liapunov teoremele lui Noether pentru problema (14) sunt demonstrate în lucrările [1,2] ș.a. Din aceste lucrări se deduce, în particular, că dacă $a,b,c\in C(\Gamma)$, atunci problema la frontieră (14) este noetheriană dacă și numai dacă $|\,a(t)|\neq 0\,(\forall t\in\Gamma)$. În cazul conturului Liapunov pe porțiuni are loc următorul rezultat.

Teorema 5. *Problema la frontieră Riemann (14) este noetheriană în spațiul* $\widetilde{L}_p(\Gamma,\rho)$ *dacă și numai dacă sunt verificate condițiile:*

(i) $|a(t)|>0,\ \forall t\in\Gamma;$

(ii) $|a(t_k)|^2-|b(t_k)|^2\left(\dfrac{z_k^{2\pi-\theta_k}-z_k^{\theta_k}}{z_k^{2\pi}-1}\right)\neq 0$ *pentru orice* $k=1,\ldots,n$ *şi orice* $t\in\Gamma$, *unde* $z_k=exp\left(\xi+i(1+\beta_k)/p\right),\ -\infty\leq\xi\leq\infty.$

Demonstrația se face în mod obişnuit. Cu ajutorul formulelor lui Plemelj şi Sohotski de la problema (14) se trece la o ecuație integrală singulară cu conjugare complexă, se scrie simbolul acestei ecuații, apoi se aplică teorema 2.

Observăm că în cazul conturului Liapunov pe porțiuni condițiile noetheriene pentru problema (14) depind, de asemenea, de mărimile unghiurilor θ_k și, în plus, depind și de coeficientul $b(t)$, ceea ce nu se observă în cazul conturului Liapunov.

Rezultatele acestei lucrări pot fi extrapolat şi la cazul în care conturul este format dintr-un număr finit de curbe Liapunov pe porțiuni fără puncte de auto-intersecție.

V. Concluzii

Metodele algebrelor Banach cu simbol au permis stabilirea criteriilor noetheriene pentru ecuațiile singulare cu conjugare complexă în cazul conturului de tip Liapunov pe porțiuni. Metodele utilizate și rezultatele obținute în această lucrare pot fi folosite în studiul ulterior al operatorilor singulari în vederea lărgirii clasei de contururi de integrare (*de exemplu cu puncte de auto-intersecție*), a spațiilor de cercetare, precum și a coeficienților operatorilor.

Bibliografie

1. Kravcenko V., Litvinchiuk G. Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift. Kluwer, 2012.
2. Muskelischvili N. Singular integral equations. Moskva: Fizmatgiz, 1962.
3. Gohberg I., Krupnik N. One-dimensional Linear Singular Integral Equations. vol. 1, Operator Theory 53. Basel-Boston: Birkhäuser, 1992.
4. Krupnik N. Banach Algebras with Symbol and Singular Integral Operators. Operator Theory, 26. Basel-Boston: Birkhäuser, 1987.
5. Gohberg I., Krupnik N. Extension theorems for invertibility symbols in Banach algebras. Operator Theory, 15. Basel-Boston: Birkhäuser, 1992. pp. 991-1008.
6. Neaga V. The symbol of singular integral operators with conjugation the case of piecewise Lyapunov contour. American Math. Society, vol.27, №1, 1983. pp. 173-176.
7. Krupnik N., Neaga V. О сингулярных операторах со сдвигом в случае кусочно-ляпуновского контура. Soobsch. Akad. Nauk Gruz SSR, 76 (1974). c. 25-28.
8. Duduchava R. Integral equations with fixed singularities. Leipzig: Teubner, 1979.
9. Neagu V. On the Riemann boundary value problem in the case of a piecewise Lyapunov contour. In: Proceedings of the Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova, Chișinău, 2017. pp.305-310.

O METODĂ DE CONSTRUCŢIE A QUASIGRUPURILOR MEDIALE ŞI NEPARAMEDIALE

Natalia BOBEICA, conf. univ., dr.
Liubomir CHIRIAC, prof. univ., dr. hab.
Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. În acest articol este propusă şi demonstrată o metodă nouă de construcţie a quasigrupurilor mediale şi neparamediale, folosind conceptul de produs direct special al unui grup comutativ.
Cuvinte-cheie: quasigrup medial, quasigrup paramedial, *AG*-grupoid, *AD*-quasigrup.

A METHOD OF CONSTRUCTING MEDIAL AND NONPARAMEDIAL QUASIGROUPS

Abstract. In this paper we develop a new method of constructing medial and nonparamedial quasigroups, using a special direct product of commutative groups.
Keywords: medial quasigroup, nonparamedial quasigroup, *AG*-groupoid, *AD*-quasigroup.

Introducere

Problema construcţiilor quasigrupurilor mediale cu anumite proprietăţi rămâne a fi deschisă la momentul dat în teoria quasigrupurilor.

Autorii au introdus conceptul de produs direct special al unui grup Abelian G şi au demonstrat că pe mulţimea $G \times G$ poate fi definită o operaţie binară, astfel încât noua structură algebrică este quasigrup neasociativ, medial şi neparamedial.

În lucrarea respectivă a fost examinată următoarea problemă concretă.

Problema. Fie $(G, +)$ grup comutativ. În ce condiţii pe mulţimea $G \times G$ poate fi definită operaţia binară $(\circ)$ astfel, încât $(G\times G, \circ)$ este quasigrup neasociativ, medial şi neparamedial?

Astfel soluţionând problema formulată mai sus, s-a demonstrat că orice grup comutativ poate fi *transformat* în quasigrup medial şi neasociativ folosind metoda elaborată.

1. Noţiuni fundamentale

O mulţime nevidă G se numeşte *grupoid* cu operaţia binară notată prin $\{\cdot\}$, dacă pentru orice pereche ordonată de elemente $(a, b) \in G$ se defineşte în mod unic produsul $ab \in G$.

Grupoidul $(G, \cdot)$ se numeşte *AD*-grupoid dacă este satisfăcută legea $a \cdot (bc) = c \cdot (ba)$ pentru orice $a, b, c \in G$.

Grupoidul $(G, \cdot)$ se numeşte grupoid Abel-Grassmann sau *AG*-grupoid dacă elementele lui satisfac legea inversă la stânga, adică $(a \cdot b) \cdot c = (c \cdot b) \cdot a$ pentru orice $a, b, c \in G$.

Grupoidul $(G, \cdot)$ se numeşte medial dacă este satisfăcută legea $xy \cdot zt = xz \cdot yt$ pentru orice $x, y, z, t \in G$ [1,2]. Unele proprietăţi ale quasigrupurilor mediale şi paramediale au fost studiate în [3-10].

2. Construcţia quasigrupurilor mediale folosind produsul direct special

Teorema 1. Fie $(G, +)$ grup comutativ. Mulţimea $G \times G$ cu operaţia " $\circ$ " definită astfel

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (-x_1 - y_1 + y_2, -x_2 - y_2 + x_1).$$

Atunci $(G \times G, \circ)$ este quasigrup neasociativ, neparamedial, medial, AG-quasigrup, AD-quasigrup.

Demonstraţie. Vom demonstra că $(G \times G, \circ)$ este:

1. Quasigrup;
2. Quasigrup neasociativ;
3. Quasigrup medial;
4. AG-quasigrup;
5. AD-quasigrup;
6. Quasigrup neparamedial.

1. Pentru a demonstra că grupoidul $(G \times G, \circ)$ este quasigrup, este necesar să arătăm că ecuaţiile $ax = b$ şi $ya = b$ au soluţii unice în grupoidul dat.

Fie ecuaţia $ya = b$. Fie $y = (y_1, y_2)$, $a = (a_1, a_2)$ şi $b = (b_1, b_2)$. Deoarece $ya = b$ putem scrie

$$(y_1, y_2) \circ (a_1, a_1) = (b_1, b_2). \tag{1}$$

Conform condiţiei Teoremei 1 avem

$$(y_1, y_2) \circ (a_1, a_2) = (-y_1 - y_2 + a_2, -a_1 - a_2 + y_1). \tag{2}$$

Din (1) şi (2) obţinem

$$-y_1 - y_2 + a_2 = b_1 \tag{3}$$

şi

$$-a_1 - a_2 + y_1 = b_2. \tag{4}$$

Din (4) avem

$$y_1 = a_1 + a_2 + b_2. \tag{5}$$

Substituim în (3) expresia obţinută pentru y_1 şi obţinem

$$y_2 = -b_2 - a_1 - b_1. \tag{6}$$

Deci $y_1 = a_1 + a_2 + b_2$ şi $y_2 = -b_2 - a_1 - b_1$.

Vom arăta că orice altă soluţie coincide cu (y_1, y_2). Presupunem că (y'_1, y'_2) este o altă soluţie a ecuaţiei $ya = b$. Atunci

$$(y'_1, y'_2) \circ (a_1, a_1) = (b_1, b_2). \tag{7}$$

Conform condiţiei Teoremei 1 avem

$$(y'_1, y'_2) \circ (a_1, a_2) = (-y'_1 - y'_2 + a_2, -a_1 - a_2 + y'_1). \tag{8}$$

Din (7) şi (8) obţinem

$$-y'_1 - y'_2 + a_2 = b_1 \tag{9}$$

şi

$$-a_1 - a_2 + y'_1 = b_2. \tag{10}$$

Din (10) avem
$$y_1' = a_1 + a_2 + b_2. \tag{11}$$
Substituim în (9) expresia obţinută pentru y_1' şi obţinem
$$y_2' = -a_1 - b_2 - b_1. \tag{12}$$

Deci $y_1' = a_1 + a_2 + b_2$ şi $y_2' = -b_1 - b_2 - a_1$.

Din (5) şi (11) am obţinut $y_1 = y_1'$. Din (6) şi (12) avem $y_2 = y_2'$.

Din cele de mai sus am obţinut că ecuaţia $ya = b$ are o singură soluţie.

În mod analog procedăm cu ecuaţia $ax = b$. Fie $x = (x_1, x_2)$, $a = (a_1, a_2)$ şi $b = (b_1, b_2)$. Deoarece $ax = b$ putem scrie
$$(a_1, a_2) \circ (x_1, x_2) = (b_1, b_2). \tag{13}$$
Conform condiţiei Teoremei 1 avem
$$(a_1, a_2) \circ (x_1, x_2) = (-a_1 - a_2 + x_2, -x_1 - x_2 + a_1). \tag{14}$$
Din (13) şi (14) obţinem
$$-a_1 - a_2 + x_2 = b_1 \tag{15}$$
şi
$$-x_1 - x_2 + a_1 = b_2. \tag{16}$$
Din (15) avem
$$x_2 = a_1 + a_2 + b_1. \tag{17}$$
Substituim în (16) expresia obţinută pentru x_2 şi obţinem
$$x_1 = -a_2 - b_2 - b_1. \tag{18}$$

Deci $x_1 = -a_2 - b_2 - b_1$ şi $x_2 = a_1 + a_2 + b_1$.

Vom arăta că orice altă soluţie coincide cu (x_1, x_2). Presupunem că (x_1', x_2') este o altă soluţie a ecuaţiei $ax = b$. Prin urmare,
$$(a_1, a_2) \circ (x_1', x_2') = (b_1, b_2). \tag{19}$$
Conform condiţiei Teoremei 1 avem
$$(a_1, a_2) \circ (x_1', x_2') = (-a_1 - a_2 + x_2', -x_1' - x_2' + a_1). \tag{20}$$
Din (19) şi (20) obţinem
$$-a_1 - a_2 + x_2' = b_1 \tag{21}$$
şi
$$-x_1' - x_2' + a_1 = b_2. \tag{22}$$
Din (21) avem
$$x_2' = a_1 + a_2 + b_1. \tag{23}$$

Substituim în (22) expresia obţinută pentru x_2' şi obţinem

$$x_1' = -b_2 - b_1 - a_2. \tag{24}$$

Deci $x_1' = -a_2 - b_2 - b_1$ şi $x_2' = a_1 + a_2 + b_1$.

Din (17) şi (23) obţinem $x_2 = x_2'$. Din (18) şi (24) obţinem $x_1 = x_1'$. Din cele de mai sus am primit că ecuaţia $ax = b$ are o singură soluţie.

Deci grupoidul $(G \times G, \circ)$ este quasigrup.

2. Vom arăta că în $(G \times G, \circ)$ nu se îndeplineşte legea asociativă, adică $(ab)c = a(bc)$. Notăm $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2), c = (x_3, y_3)$. Deci, $((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ (x_3, y_3) = (x_1, y_1) \circ$ $\circ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3))$.

Aplicând legea din Teorema 1 pentru $((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ (x_3, y_3)$ avem

$$((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ (x_3, y_3) = (-x_1 - y_1 + y_2, -x_2 - y_2 + x_1) \circ (x_3, y_3) =$$

$$= (x_1 + y_1 - y_2 + x_2 + y_2 - x_1 + y_3, -x_3 - y_3 - x_1 - y_1 + y_2) =$$

$$= (y_1 + x_2 + y_3, -x_3 - y_3 - x_1 - y_1 + y_2). \tag{25}$$

În mod analog procedăm cu $(x_1, y_1) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3))$ şi obţinem

$$(x_1, y_1) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3)) = (x_1, y_1) \circ (-x_2 - y_2 + y_3, -x_3 - y_3 + x_2) =$$

$$= (-x_1 - y_1 - x_3 - y_3 + x_2, x_2 + y_2 - y_3 - x_3 + y_3 - x_4 + x_1) =$$

$$= (-x_1 - y_1 - x_3 - y_3, y_2 + x_3 + x_1). \tag{26}$$

Din (25) şi (26) observăm că nu se îndeplineşte legea asociativă.

3. Demonstrăm că $(G \times G, \circ)$ este medial, adică are loc legea $xy \cdot zt = = xz \cdot yt$. Notăm $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2), z = (x_3, y_3), t = (x_4, y_4)$, atunci $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot$ $\cdot (x_4, y_4)) = ((x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3)) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_4, y_7))$. Aplicăm legea din Teorema 1 pentru $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_4, y_4))$ şi obţinem

$$((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ ((x_3, y_3) \circ (x_4, y_4)) =$$

$$= ((-x_1 - y_1 + y_2, -x_2 - y_2 + x_1)) \circ ((-x_3 - y_3 + y_4, -x_4 - y_4 + x_3)) =$$

$$(x_1 + y_1 - y_2 + x_2 + y_2 - x_1 - (x_4 + y_4 - x_3), x_3 + y_3 - y_4 + x_4 + y_4 - x_3 - (x_1 + y_1 - y_2)) =$$

$$(x_3 + y_1 - (x_4 + y_4 - x_2), x_4 + y_4 - (x_1 + y_1 - y_2)). \tag{27}$$

În mod similar procedăm cu $((x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3)) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_4, y_4))$, avem

$$((x_1, y_1) \circ (x_3, y_3)) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_4, y_4)) =$$

$$= ((-x_1 - y_1 + y_3, -x_3 - y_3 + x_1)) \circ ((-x_2 - y_2 + y_4, -x_4 - y_4 + x_2)) =$$

$$= (x_1 + y_1 - y_3 + x_3 + y_3 - x_1 - (x_4 + y_4 - x_2), x_2 + y_2 - y_4 + x_4 + y_4 - x_2 - (x_1 + y_1 - y_3)) =$$

$$(x_3 + y_1 - (x_4 + y_4 - x_2), x_4 + y_3 - (x_1 + y_1 - y_2)). \tag{28}$$

Din (27) şi (28) observăm că quasigrupul $(G \times G, \circ)$ este medial.

4. Demonstrăm că $(G \times G, \circ)$ este AG-grupoid, adică are loc legea $(xy)z = (zy)x$. Notăm $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2), z = (x_3, y_3)$, atunci $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) = ((x_3, y_3) \cdot (x_2, y_2)) \cdot$ $\cdot (x_1, y_1)$.

Aplicăm legea din Teorema 1 pentru $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3)$ şi obţinem

$$((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) = (-x_1 - y_1 + y_2, -x_2 - y_2 + x_1) \circ (x_3, y_3) =$$

$$= (x_1 + y_1 - y_2 + x_2 + y_2 - x_1 + y_3, -x_3 - y_3 - x_1 - y_1 + y_2) =$$

$$= (y_1 + x_2 + y_3, -x_3 - y_3 - x_1 - y_1 + y_2). \tag{29}$$

În mod similar procedăm cu $((x_3, y_3) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_1, y_1)$, avem

$$((x_3, y_3) \circ (x_2, y_2)) \circ (x_1, y_1) = (-x_3 - y_3 + y_2, -x_2 - y_2 + x_3) \circ (x_1, y_1) =$$

$$= (x_3 + y_3 - y_2 + x_2 + y_2 - x_3 + y_1, -x_1 - y_1 - x_3 - y_3 + y_2) =$$

$$= (y_3 + x_2 + y_1, -x_1 - y_1 - x_3 - y_3 + y_2). \tag{30}$$

Din (29) şi (30) observăm că quasigrupul $(G \times G, \circ)$ este AG-grupoid.

5. Demonstrăm că $(G \times G, \circ)$ este AD-grupoid, adică are loc legea $x(yz) = z(yx)$. Notăm $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2), z = (x_3, y_3)$, atunci $(x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)) = (x_3, y_3) \cdot ((x_2, y_2) \cdot$ $\cdot (x_1, y_1))$.

Aplicăm legea din Teorema 1 pentru $(x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3))$ şi obţinem

$$(x_1, y_1) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3)) = (x_1, y_1) \circ (-x_2 - y_2 + y_3, -x_3 - y_3 + x_2) =$$

$$= (-x_1 - y_1 - x_3 - y_3 + x_2, y_2 + x_3 + x_1). \tag{31}$$

În mod similar procedăm cu $(x_3, y_3) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1))$, avem

$$(x_3, y_3) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_1, y_1)) = (x_3, y_3) \circ (-x_2 - y_2 + y_1, -x_1 - y_1 + x_2) =$$

$$= (-x_3 - y_3 - x_1 - y_1 + x_2, x_2 + y_2 - y_1 + x_1 + y_1 - x_2 + x_3) =$$

$$= (-x_1 - y_1 - x_3 - y_3 + x_2, y_2 + x_1 + x_3). \tag{32}$$

Din (31) şi (32) observăm că quasigrupul $(G \times G, \circ)$ este AD-grupoid.

6. Demonstrăm că $(G \times G, \circ)$ nu este paramedial, adică nu are loc legea $xy \cdot zt = ty \cdot zx$. Notăm $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2), z = (x_3, y_3), t = (x_4, y_4)$, atunci $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot$ $\cdot (x_4, y_4)) = ((x_4, y_4) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_1, y_1))$.

Aplicăm legea din Teorema 1 pentru $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_4, y_4))$ şi obţinem

$$((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ ((x_3, y_3) \circ (x_4, y_4)) =$$

$$= ((-x_2 - y_2 + x_1, -x_1 - y_1 + y_2)) \circ ((-x_4 - y_4 + x_3, -x_3 - y_3 + y_4)) =$$

$$= (x_4 + y_4 - x_3 + x_3 + y_3 - y_4 - (x_2 + y_2 - x_1), x_2 + y_2 - x_1 + x_1 + y_1 - y_2 - (x_3 + y_3 - y_4)) =$$

$$= (x_4 + y_3 - (x_2 + y_2 - x_1), x_2 + y_1 - (x_3 + y_3 - y_4)). \tag{33}$$

În mod similar procedăm cu $((x_4, y_4) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_1, y_1))$, avem

$$((x_4, y_4) \circ (x_2, y_2)) \circ ((x_3, y_3) \circ (x_1, y_1)) =$$
$$= ((-x_4 - y_4 + y_2, -x_2 - y_2 + x_4)) \circ ((-x_3 - y_3 + y_1, -x_1 - y_1 + x_3)) =$$
$$= (x_4 + y_4 - y_2 + x_2 + y_2 - x_4 - (x_1 - y_1 + x_3), x_3 + y_3 - y_1 + x_1 + y_1 - x_3 - (x_4 + y_4 - y_2)) =$$
$$= (x_2 + y_4 - (x_1 + y_1 - x_3), x_1 + y_3 - (x_4 + y_4 - y_2)). \tag{34}$$

Din (33) şi (34) observăm că quasigrupul $(G \times G, \circ)$ nu este paramedial.

Teorema este demonstrată.

Exemplul 1. Fie $(G, +)$ grup abelian de ordinul 3.

(+)	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Examinăm $(G \times G, \circ)$, unde operaţia " $\circ$ " este definită astfel:

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (-x_1 - y_1 + y_2, -x_2 - y_2 + x_1).$$

Obţinem un exemplu de quasigrup medial de ordinul 9, neparamedial, AG-quasigrup şi AD-quasigrup.

(+)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	5	7	2	4	6	1	3	8
1	6	2	4	8	1	3	7	0	5
2	3	8	1	5	7	0	4	6	2
3	7	0	5	6	2	4	8	1	3
4	4	6	2	3	8	1	5	7	0
5	1	3	8	0	5	7	2	4	6
6	5	7	0	4	6	2	3	8	1
7	2	4	6	1	3	8	0	5	7
8	8	1	3	7	0	5	6	2	4

În aşa mod $(G \times G, \circ)$ este quasigrup medial, neparamedial, AG-quasigrup şi AD-quasigrup.

Exemplul 2. Fie $(G, +)$ grup abelian de ordinul 4.

(+)	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Examinăm $(G \times G, \circ)$, unde operaţia " $\circ$ " este definită astfel:

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (-x_1 - y_1 + y_2, -x_2 - y_2 + x_1).$$

Obţinem exemplu de quasigrup medial de ordinul 16, neparamedial, AG-quasigrup şi AD-quasigrup.

(+)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	7	10	13	3	6	9	12	2	5	8	15	1	4	11	14
1	12	3	6	9	15	2	5	8	14	1	4	11	13	0	7	10
2	8	15	2	5	11	14	1	4	10	13	0	7	9	12	3	6
3	4	11	14	1	7	10	13	0	6	9	12	3	5	8	15	2
4	13	0	7	10	12	3	6	9	15	2	5	8	14	1	4	11
5	9	12	3	6	8	15	2	5	11	14	1	4	10	13	0	7
6	5	8	15	2	4	11	14	1	7	10	13	0	6	9	12	3
7	1	4	11	14	0	7	10	13	3	6	9	12	2	5	8	16
8	10	13	0	7	9	12	3	6	8	15	2	5	11	14	1	4
9	6	9	12	3	5	8	15	2	4	11	14	1	7	10	13	0
10	2	5	8	15	1	4	11	14	0	7	10	13	3	6	9	12
11	14	1	4	11	13	0	7	10	12	3	6	9	15	2	5	8
12	7	10	13	0	6	9	12	3	5	8	15	2	4	11	14	2
13	3	6	9	12	3	5	8	15	1	4	11	14	0	7	10	13
14	15	2	5	8	14	1	4	11	13	0	7	10	12	3	6	9
15	11	14	1	4	10	13	0	7	9	12	3	6	8	15	2	5

În aşa mod $(G \times G, \circ)$ este quasigrup medial, neparamedial, AG-quasigrup şi AD-quasigrup.

Bibliografie

1. Belousov V. D. Foundation of the theory of quasigroups and loops. Moscow: Nauka, 1967.
2. Choban M. M., Kiriyak L. L. The topological quasigroups with multiple identities. Quasigroups and Related Systems. 9, 2002. p. 19-31.
3. Bobeica N., Chiriac L. L. On a method of constructing medial and paramedial quasigroups. In: The Third Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova dedicated to the 50^{th} anniversary of the foundation of Institute of Mathematics and Computer Science IMCS-50, August 19-23, 2014, Chisinau, Republic of Moldova. p. 18-21.
4. Chiriac L. L. On Topological Quasigroups and Homogeneous Isotopies. In: Analele Universităţii din Piteşti, Buletin Ştiinţific, Seria Matematică şi informatica, 9, 2003. p. 191-196.
5. Chiriac L. L., Chiriac L. L. Jr, Bobeica N. On topological groupoids and multiple identities. In: Buletinul Academiei de Ştiinţe a RM, Matematica, 1(59), 2009. p. 67-78.

6. Chiriac L. L. Topological paramedial groupoids with multiple identities. In: The 17^{th} Conference on Applied and Industrial Mathem., Constantza, CAIM-2009, Romania, 2009. p. 28.
7. Bobeica N. On Paramedial Loops. In: The 17^{th} Conference on Applied and Industrial Mathem., Constantza, CAIM-2009, Romania, 2009. p. 20.
8. Bobeica N. Topological Hexagonal Groupoids with Multiple Identities. MITRE-2009, State University of Moldova, October, 2009. p. 5-6.
9. Pontrjagin L. S. Neprerivnie gruppi. Moskow: Nauka, 1984.
10. Chiriac L. L. Topological Algebraic System. Chişinău: Ştiinţa, 2009.

CERCETAREA EXPERIMENTALĂ A FENOMENELOR GALVANOMAGNETICE ÎN ALIAJELE $GaSb + Fe$

Boris COROLEVSCHI, conf. univ., dr.
Leonid GUȚULEAC, conf. univ., dr.
Igor POSTOLACHI, conf. univ., dr.
Pantelei UNTILĂ, conf. univ., dr.
Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. Au fost obținute aliaje de $GaSb$ cu Fe în diferite proporții. Au fost cercetate experimental fenomenele galvanomagnetice în aceste materiale în intervalul de temperaturi $77 \div 300\,K$. Sunt prezentate dependențele de temperatură pentru coeficientul Hall, conductivitatea electrică, concentrația și mobilitatea purtătorilor.
Cuvinte-cheie: semiconductoare, grupul $A^{III}B^{V}$, antimoniul de galiu, efectul Hall, conductivitate electrică, concentrația și mobilitatea purtătorilor.

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF GALVANOMAGNETIC PHENOMENA IN $GaSb + Fe$ ALLOYS

Abstract. $GaSb$ alloys doped with Fe in various proportions are obtained. Galvanomagnetic phenomena occurring in these materials at 77 ÷ 300 K are investigated experimentally. The temperature dependencies for the Hall coefficient, electrical conductivity, carrier mobility and concentration are presented.
Keywords: semiconductors, $A^{III}B^{V}$ group, gallium antimonide, Hall effect, electrical conductivity, carrier concentration and mobility.

Introducere

Semiconductorii reprezintă o clasă destul de numeroasă de materiale, care au o importanță deosebită pentru microelectronica modernă și nu numai. Interesul practic față de aceste materialele rămâne sporit. Un șir întreg de dispozitive electronice, care se folosesc în diferite segmente din tehnica comunicațiilor funcționează în baza semiconductorilor [1].

Se poate menționa faptul, că proprietățile fizice ale materialelor semiconductoare au fost cercetate mult mai amplu decât cele ale dielectricilor și conductorilor. Această situație este determinată în mare măsură de faptul, că în materialele semiconductoare se poate observa o mulțime de efecte, care nu se produc în dielectrici și conductori. Anume acest fapt determină importanța practică a semiconductorilor. Principalul motiv de a studia semiconductorii este folosirea lor la producerea dispozitivelor semiconductoare și schemelor integrale. Siliciul se folosește pe larg la confecționarea celulelor solare și a fotodiodelor, însă nu poate servi în calitate de sursă efectivă de lumină. În acest scop în afara concurenței sunt semiconductorii din grupul $A^{III}B^{V}$, printre care se poate menționa $GaSb$ [2].

Antimoniul de galiu este un compus cu structură directă a benzilor energetice, cu o lățime a benzii interzise de $0{,}726\,eV$ la temperatura de $300\,K$. Se produce prin intermediul topirii amestecului de Ga și Sb cu un exces de 5 % în containere din cuarț. După aceasta lingoul obținut se omogenizează prin metoda topirii zonale. Se folosește la producerea fotodiodelor destinate pentru domeniul infraroșu și a diodelor cu efect tunel. Pentru modificarea proprietăților $GaSb$ materialul se poate dopa cu diferite elemente compatibile [2]. În afară de aceasta, doparea ar putea purifica acest compus, care conține cantități sporite de defecte proprii ale rețelei. Prezintă interes doparea cu Fe [3], care ar putea conduce, în particular, la apariția unor proprietăți magnetice.

Fenomenele galvanomagnetice permit de a obține informație utilă despre proprietățile principale ale materialelor semiconductoare cercetate. Se pot determina tipul conductivității electrice, conductivitatea electrică specifică, concentrația și mobilitatea purtătorilor de curent majoritari. De obicei aceste proprietăți se studiază la diferite temperaturi. Este interesant de a studia evoluția lor la modificarea temperaturii.

Metode și materiale aplicate

La pregătirea acestei lucrări au fost cercetate experimental proprietățile fizice ale aliajelor $GaSb + Fe$ cu conținutul fierului de 5 %, 10 % și 15 % $atomice$.

Compușii menționați mai sus au fost obținuți prin sinteza aliajelor în containere de cuarț la temperatura de 1100 °C. Apoi materialele obținute au fost prelucrate termic la temperatura de 680 °C. În fine a fost folosită metoda topirii zonale, care a permis de a obține omogenitate de-a lungul lingourilor.

Din lingourile masive au fost tăiate eșantioane în formă de paralelipipede dreptunghice cu dimensiuni caracteristice $8 \times 2 \times 4\ mm$. Eșantioanele au fost șlefuite cu praf de diamant în câteva etape. Apoi ele au fost prelucrate chimic. Eșantioanele, care urmau să fie cercetate experimental, au fost notate convențional $F - 5$, $F - 10$ și $F - 15$ (în conformitate cu conținutul fierului).

Pentru cercetarea conductivității electrice și a efectului Hall s-a folosit metoda celor patru sonde cu folosirea curentului electric continuu. Pe fețele laterale ale eșantioanelor au fost sudate câte două perechi de sonde potențiale din cupru. Măsurările s-au efectuat într-un câmp magnetic exterior cu inducția egală cu $1\ T$. Eșantionul era fixat într-un susținător masiv cu ajutorul a două blocuri de cupru. Aceste blocuri au servit și în calitate de contacte pentru curentul electric, care s-a lansat prin eșantion.

Susținătorul cu eșantionul fixat pe el s-a introdus în vasul Dewar, care conținea azot lichid. Azotul lichid în fierbere asigura temperatura de $77\ K$. După vaporizarea azotului temperatura din criostat crește lent până la cea a camerei. Măsurările s-au efectuat în intervalul de temperaturi $77 \div 300\ K$. Controlul temperaturii s-a efectuat cu ajutorul termocuplului din cupru-constantan, care era situat în blocul susținătorului.

Efectul Hall și conductivitatea electrică s-au cercetat în mod complex. La început pentru măsurarea conductivității electrice prin eșantion s-a lansat curent electric continuu și s-au măsurat intensitatea acestui curent și tensiunea aplicată. S-au aplicat tensiuni de circa $50\ mV$. Apoi pentru măsurarea coeficientului Hall s-a inclus câmpul magnetic și s-a mai măsurat tensiunea Hall. Măsurările s-au efectuat la diferite valori ale temperaturii din intervalul menționat. Măsurările au fost repetate multiplu pentru a exclude erorile eventuale.

Rezultate obținute și discuții

În lucrarea curentă sunt prezentate și puse în discuție rezultatele experimentale obținute la cercetarea fenomenelor galvanomagnetice în eșantioanele aliajelor $GaSb + Fe$ cu conținutul fierului de $5\ \%$, $10\ \%$ și $15\ \%$ (respectiv $F - 5$, $F - 10$ și $F - 15$) în intervalul de temperaturi $77 \div 300\ K$.

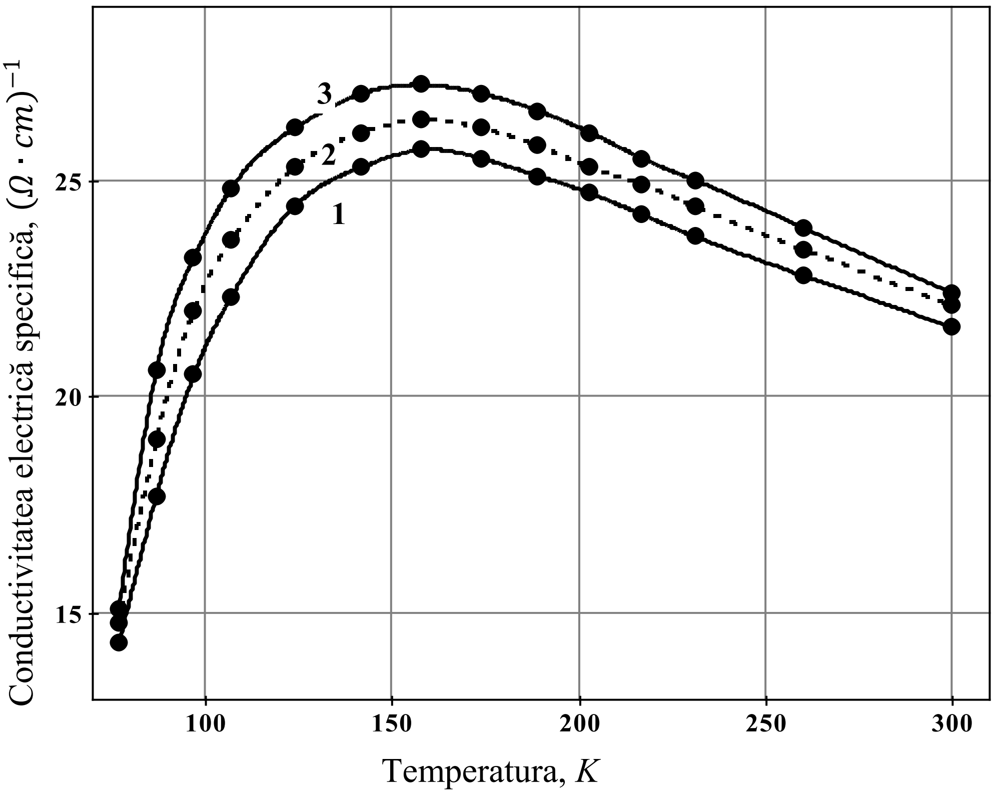


Figura 1. Dependența conductivității electrice specifice de temperatură pentru aliajele $GaSb + Fe$ (aici și în continuare: 1) F-5; 2) F-10; 3) F-15).

S-a stabilit, că toate aliajele obținute posedau proprietăți de semiconductori, conductivitate electrică de tip $\boldsymbol{p}$ (prin intermediul golurilor) și o concentrație relativ mare a defectelor acceptoare ($10^{17} cm^{-3}$ la temperatura camerei). Aceste concentrații sunt caracteristice antimoniului de galiu.

În figura 1 sunt prezentate rezultatele cercetării conductivității electrice. Graficele din această figură reflectă modificarea conductivității specifice (σ) pentru cele trei eșantioane la modificarea temperaturii. În fiecare grafic pot fi distinse două regiuni.

Prima din ele demonstrează o creștere bruscă a conductivității electrice la creșterea temperaturii. Regiunea aceasta începe la temperaturi mici și continuă până la circa $160\,K$, când conductivitatea electrică atinge o valoare maximală. Se cunoaște, că conductivitatea electrică este determinată de produsul dintre concentrația și mobilitatea purtătorilor. La creșterea temperaturii concentrația crește, iar în acest interval de temperaturi crește și mobilitatea. Anume aceste două creșteri în comun determină caracterul brusc al măririi conductivității electrice cu temperatura în prima regiune a fiecărui grafic.

În cea de-a doua regiune se observă o scădere lentă a conductivității electrice la creșterea temperaturii. Regiunea aceasta începe la temperatura de circa $160\,K$ și continuă până la temperatura camerei ($300\,K$) (la temperaturi mai mari nu s-au făcut măsurări, însă se poate prezice o descreștere în continuare a conductivității electrice). La temperaturi mai mari de circa $100\,K$ mobilitatea începe să scadă, deoarece la astfel de temperaturi ea este determinată în mare parte de împrăștierea purtătorilor pe oscilațiile acustice ale rețelei (creșterea temperaturii conduce la intensificarea acestor oscilații și mișcarea ordonată a purtătorilor este împiedicată mai mult). Această tendință de micșorare a mobilității întrece tendința de creștere a concentrației și din acest motiv conductivitatea electrică scade.

Dacă comparăm rezultatele obținute pentru cele trei eșantioane, atunci observăm, că creșterea cantității de fier la dopare conduce la creșterea conductivității electrice, precum era de așteptat. Însă această creștere este foarte mică. Spre exemplu, la temperatura azotului lichid valorile conductivității electrice specifice pentru $F-5$, $F-10$ și $F-15$ sunt respectiv 14,3, 14,8 și 15,1 $(\Omega\cdot\mathrm{cm})^{-1}$. Iar la temperatura camerei aceste mărimi au valorile de 21,6, 22,1 și 22,4 $(\Omega\cdot\mathrm{cm})^{-1}$ respectiv. Într-adevăr, raportul acestor valori este destul de mic în comparație cu raportul cantităților de fier folosite.

În figura 2 sunt prezentate rezultatele cercetării efectului Hall. Acest efect se observă în câmpuri magnetice și constă în apariția unei diferențe de potențial transversale în eșantionul parcurs de curent electric continuu (câmpul magnetic exterior este perpendicular pe direcția curentului). El permite de a stabili semnul sarcinii purtătorilor majoritari și de a face concluzie despre concentrația lor. Acest fenomen este descris cantitativ de tensiunea Hall, care poate fi măsurată. Apoi se calculează coeficientul Hall (R_H), care depinde de natura și starea materialului cercetat.

Cele trei dependențe din figura 2 descriu variația coeficientului Hall pentru cele trei eșantioane la variația temperaturii. În toate aceste grafice se produce o micșorare a acestui coeficient odată cu creșterea temperaturii. O așa scădere este obișnuită pentru materialele semiconductoare și este determinată de creșterea numărului de purtători liberi pe contul ionizării impurităților și al creșterii energiei oscilațiilor termice ale rețelei.

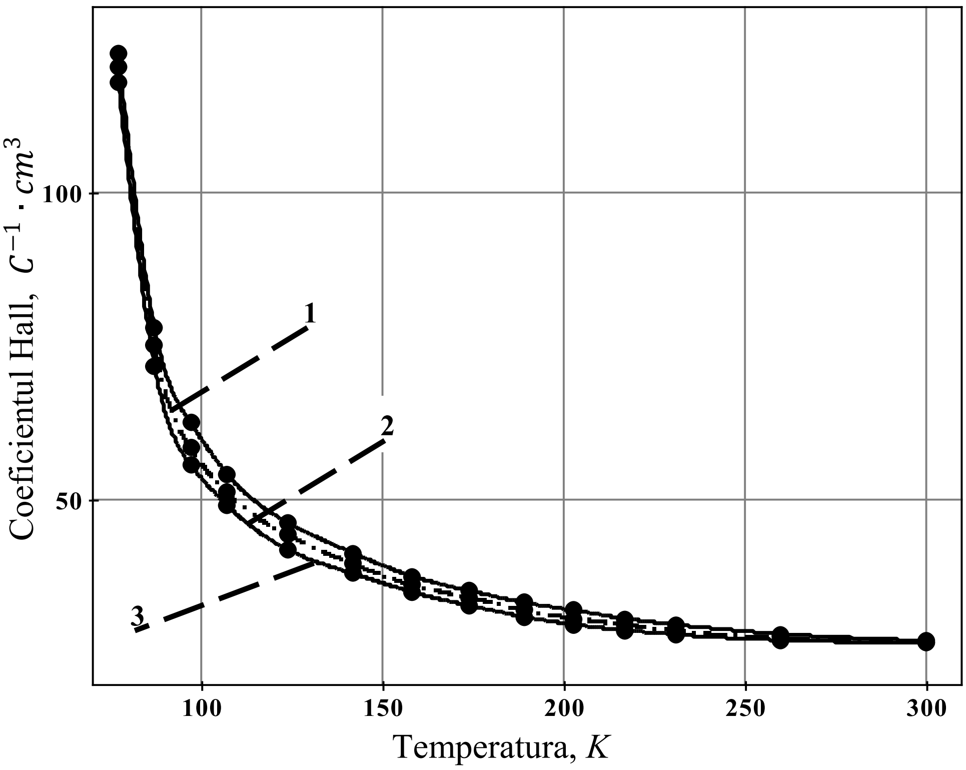


Figura 2. Dependența coeficientului Hall de temperatură pentru aliajele $GaSb + Fe$.

La temperaturi mici (până la $100\ K$) se observă o scădere bruscă a coeficientului Hall, iar la temperaturi mai mari (peste $150\ K$) scăderea este mult mai lentă. Așa dependențe sunt specifice pentru aceste intervale de temperaturi. La temperaturi mici se manifestă impuritățile, care se ionizează destul de intens, iar la temperaturi mari impuritățile sunt deja epuizate și tempoul scăderii coeficientului Hall se micșorează, deoarece ionizarea atomilor de bază ai rețelei este mult mai lentă. Se poate presupune, că temperatura de epuizare a impurităților are valoare din intervalul $100 \div 120\ K$.

Comparând rezultatele obținute pentru cele trei eșantioane se poate observa, că cele trei grafice sunt situate foarte aproape unul de altul. Deci, creșterea cantității de fier la dopare conduce la o micșorare nesemnificativă a coeficientului Hall.

Cunoașterea coeficientului Hall permite de a calcula concentrația purtătorilor majoritari:

$$p = \frac{1}{e \cdot R_H},$$

unde *e* este sarcina elementară.

În figura 3 sunt prezentate rezultatele calculelor concentrației golurilor pentru diferite temperaturi. Cele trei linii din această diagramă descriu variația concentrației pentru cele trei eșantioane la variația temperaturii. În toate aceste grafice se manifestă o creștere a concentrației odată cu creșterea temperaturii.

Din nou se observă, că creșterea cantității de fier folosit la doparea eșantioanelor examinate modifică foarte puțin concentrația. Ea crește foarte slab la creșterea concentrației fierului. Spre exemplu, la temperatura azotului lichid valorile concentrației pentru $F-5$, $F-10$ și $F-15$ sunt respectiv $5{,}1$, $5{,}2$ și $5{,}3 \cdot 10^{16} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$. Iar la temperatura camerei aceste mărimi au valorile de $23{,}0$, $23{,}2$ și $23{,}3 \cdot 10^{16} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$ respectiv.

Având la dispoziție rezultatele măsurărilor conductivității electrice specifice și ale coeficientului Hall, s-au calculat mobilitățile golurilor pentru diferite temperaturi:

$$\mu = \sigma \cdot R_H.$$

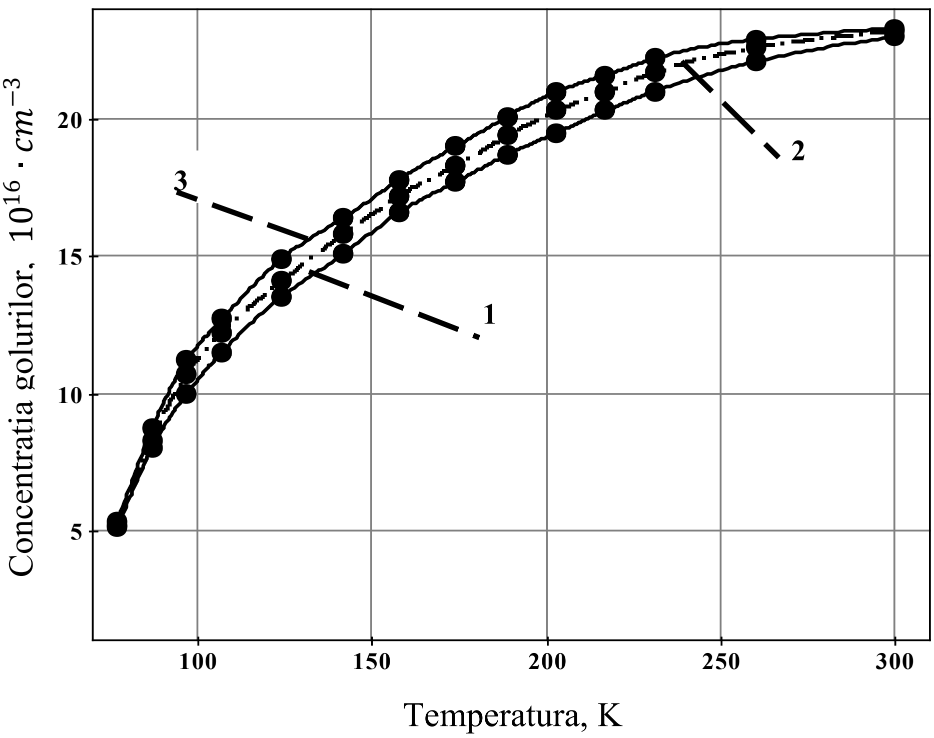


Figura 3. Dependența concentrației golurilor de temperatură în aliajele $GaSb + Fe$.

În figura 4 sunt prezentate dependențele mobilităților de temperatură pentru cele trei eșantioane. Toate aceste dependențe ne prezintă o scădere a mobilității la creșterea temperaturii. Astfel de dependențe sunt caracteristice pentru $GaSb$ în intervalul de temperaturi cercetat. Mobilitatea este determinată în aceste condiții, în fond, de împrăștierea golurilor de către fononii acustici ai rețelei. În conformitate cu teoria acestui mecanism de împrăștiere, descreșterea mobilității cu temperatura se produce după legea:

$$\mu \sim T^{-3/2}.$$

După cum se poate observa din această figură, cele trei grafice aproape că se suprapun. Deci, mobilitățile golurilor în cele trei eșantioane sunt practic aceleași. Mărirea cantității de fier folosit la dopare nu modifică esențial mobilitatea.

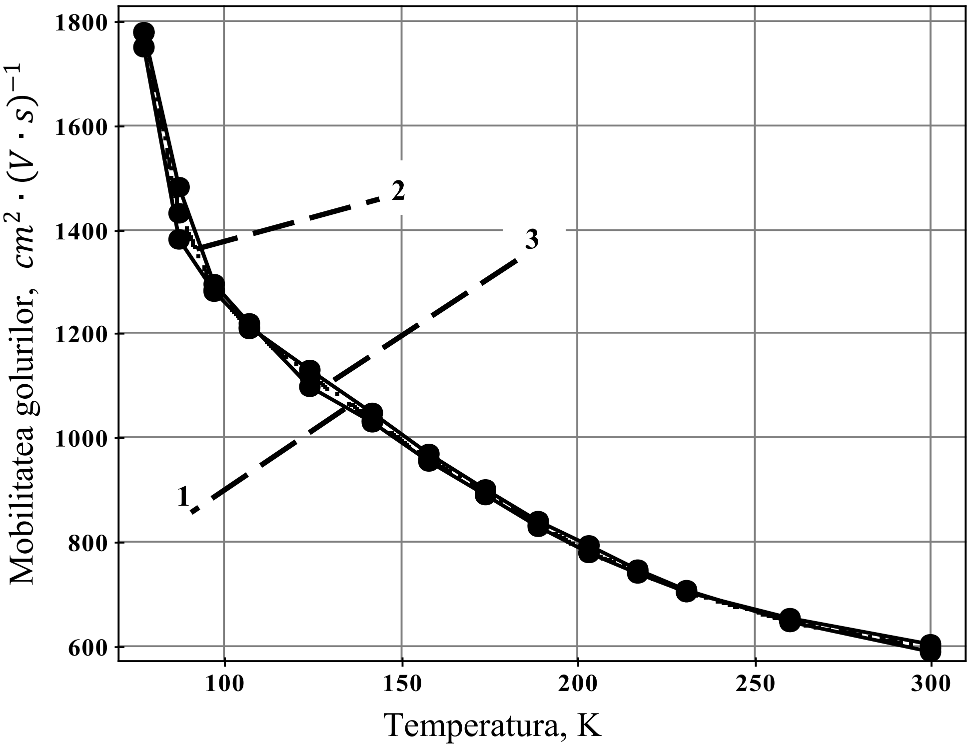


Figura 4. Dependența mobilității golurilor de temperatură în aliajele $GaSb + Fe$.

Concluzii

Rezultatele obținute la cercetarea fenomenelor galvanomagnetice în antimoniul de galiu dopat cu fier în concentrații relativ mari ($5 \div 15$ % $atomice$) au permis de a stabili, că modificarea cantității de fier folosit la dopare nu a condus la o schimbare esențială a proprietăților acestui material. Conductivitatea electrică specifică a materialului, concentrația și mobilitatea golurilor nu au variat semnificativ la variația cantității de dopant. Se poate presupune, că nu tot fierul folosit a reușit să se instaleze în rețea. O parte din dopant nu a fost acceptată la formarea rețelei cristaline. Cu alte cuvinte, pentru fier există o limită de solubilitate în $GaSb$. Cantitățile mici de fier se dizolvă în totalmente și atomii se includ în rețea, iar cantitățile mari – numai parțial. Pentru verificarea acestei ipoteze trebuie de cercetat și eșantioane cu alte concentrații de dopare.

Bibliografie

1. Gașin P., Gaugaş P., Focşa A. Fizica dispozitivelor semiconductoare. Chișinău: Tipografia Centrală, 1998.
2. Маделунг О. Физика полупроводниковых соединений элементов III и V групп. Москва: Мир, 1967.
3. Gheorghiță E. ş.a. Proprietățile fizice ale antimonidului de galiu dopat cu fier. În: „Fizică şi tehnică: Procese, modele, experimente”. Bălți: Universitatea de Stat „Alecu Russo”, 2007, nr.1, p. 5-10.

DEZVOLTAREA DURABILĂ A AGENȚILOR ADAPTIVI PENTRU IDENTIFICAREA INTRUZIUNILOR ÎN SISTEME ȘI REȚELE INFORMAȚIONALE

Andrei ȘESTACOV, doctorand

Academia Militară „Alexandru cel Bun”

Rezumat. În prezenta lucrare se cercetează dezvoltarea durabilă a agenților adaptivi pentru identificarea intruziunilor în sistemele și rețelele informaționale fiind structurată în: introducere; dezvoltarea durabilă a agenților adaptivi la identificarea intruziunilor în rețele informaționale; procesul de integrare a agenților adaptivi la identificarea intruziunilor în rețele informaționale; monitorizarea și analiza activității agenților adaptivi în rețele informaționale; concluzii și bibliografie.

Cuvinte cheie: identificarea intruziunilor, sisteme si rețele informaționale, dezvoltare durabilă, societate informațională, economie digitală, securitate informațională, Sisteme de Detecție și Prevenire a Intruziunilor.

SUSTAINABLE DEVELOPMENT OF ADAPTIVE AGENTS FOR THE IDENTIFICATION OF INTRUSIONS IN SYSTEMS AND INFORMATION NETWORKS

Abstract. In the present paper is researching sustainable development of adaptive agents to identify intrusion in systems and information network and it is structured in: introduction; sustainable development of adaptive agents to identify intrusion in information network; integration of adaptive agents to identify intrusion in information network; monitoring and analysis activities of adaptive agents in information network; conclusions and bibliography.

Keywords: identify intrusions; systems and information network; sustainable development; information society; digital economy; information security; Intrusion Detection-Prevention Systems.

Introducere

În condițiile modificării tehnologiei informaționale, globalizării mediului informațional și creșterii explozive a fluxului informațional devine tot mai evident rolul securității informaționale. În acest sens, conţinutul lucrăriii aduce în atenţie şi deschide noi oportunităţi de abordare a unor idei şi perspective de dezvoltare durabilă a sistemelor informatice, propune soluții realiste şi viabile în măsură să asigure identificarea intruziunilor în sisteme şi rețele informaționale.

Identificarea intruziunilor este o problemă actuală majoră cu care se confruntă societatea electronică, care se referă la asigurarea integrităţii, confidenţialităţii şi disponibilităţii informaţiei. Lucrul în reţea şi conectarea la Internet induc riscuri suplimentare, de acces neautorizat la date sau chiar fraudă pentru care organizaţiile trebuie să implementeze noi măsuri de control și protecție potrivită atacurilor din ce în ce mai sofisticate la nivel de rețea și nivel de aplicație [2, 5].

Este important ca organizaţiile să conştientizeze riscurile asociate cu utilizarea tehnologiei şi gestionarea informaţiilor, să abordeze pozitiv acest subiect printr-o conştientizare în rândul angajaţilor a importanţei securităţii informaţiilor, înţelegerea tipologiei amenințărilor, riscurilor şi vulnerabilităților specifice mediilor informatizate şi aplicarea practicilor de control [1, 3, 4, 6 – 14].

În Republica Moldova există mai multe instituții implicate în procesul de detectare și identificare a intruziunilor în sisteme si rețele informaționale, fiecare cu atribuțiile și responsabilitățile sale: Serviciul de Informații și Securitate, Ministerul Afacerilor Interne, Procuratura, Ministerul Tehnologii Informațiilor și Comunicației, Centrul de Telecomunicații Speciale, Centru Național de Protecție a Datelor cu Caracter Personal [15, 16].

Societatea informatică integrează obiectivele dezvoltării durabile, bazată pe dreptate socială şi egalitate a şanselor, protecţie ecologică, libertate, diversitate culturală şi dezvoltare inovativă, restructurarea industriei şi a mediului de afaceri.

Schimbările majore din ultimii ani - creşterea exponenţială a comunicaţiilor mobile şi a utilizatorilor de Internet, contribuţia sectorului Tehnologiei Informaţiei şi Comunicaţiilor (TIC) la creşterea economică şi la crearea locurilor de muncă, restructurarea/reingineria companiilor şi a business-ului în general pentru a beneficia mai eficient de noile tehnologii, dezvoltarea accelerată a comerţului electronic - susțin tranziția de la era industrială la cea post-industrială, trecerea la „noua economie”.

Noile tehnologii digitale fac ca accesul, stocarea şi transmiterea informaţiei să fie din ce în ce mai facile şi mai accesibile ca tarife. Dispunând de informaţia digitală, aceasta poate fi transformată în noi valori economice şi sociale, creând imense oportunități pentru dezvoltarea de noi produse şi servicii. Informaţia devine resursa-cheie şi factor de producţie pentru economia digitală.

Începând cu anii '90 penetrarea rapidă a calculatoarelor personale (PC), evoluţia tehnologiilor software, dezvoltarea explozivă a reţelelor de comunicaţie de date şi a serviciilor bazate pe Internet au produs schimbări profunde la scară mondială.

Comerţul electronic la scară globală, inter-companii (de tip „business-to-business”) a atins în anul 2016 valoarea de 844 miliarde euro şi se estimează să ajungă la 12.869 miliarde euro în 2017, adică cu o rată de creştere anuală de 73% .

Aceste evoluţii s-au datorat în mare măsură atât progreselor tehnologice cât şi promovării unor politici noi privind privatizarea şi promovarea competiţiei pe piaţa TIC, noilor reglementări tehnice şi juridice în domeniu, noilor strategii naţionale şi regionale de dezvoltare a societăţii informatice. Toate ţările dezvoltate şi-au elaborat şi implementat politici guvernamentale susţinute privind cercetarea, dezvoltarea şi adoptarea noilor tehnologii, consolidarea infrastructurilor informaţionale naţionale, formarea şi atragerea de specialişti în domeniul TIC (inclusiv din alte ţări), educarea populaţiei adulte, cooperarea cu sectorul privat şi încurajarea investiţiilor în această nouă ramură economică, promovarea de proiecte guvernamentale menite să demonstreze utilitatea serviciilor specifice societăţii informatice.

Construirea noului model de societate ridică astfel probleme socio-politice majore - atât la scară naţională, cât şi internaţională - de atenuare a fenomenului de excludere de la beneficiile noilor tehnologii a unor categorii sociale şi a unor regiuni/zone geografice şi de coeziune socială, de conservare şi promovare a culturii specifice fiecărei naţiuni şi comunităţi locale, de protecţie a cetăţeanului şi consumatorului. Soluţionarea acestor probleme nu se poate realiza decât printr-un dialog larg între autorităţile guvernamentale, reprezentanţii mediului de afaceri, ai mediului academic şi societatea civilă, atât la nivel naţional, regional, cât şi global.

Guvernele şi instituţiile acestora au rolul de a stimula, conduce, controla şi participa activ la acest proces de tranziţie către Societatea Informaţională prin programe de acţiune concrete şi prin iniţierea unui nou cadru de reglementări specifice. Prin noile legi, norme, standarde şi reglementări care vor fi elaborate, se va stimula, pe de o parte, dezvoltarea noilor servicii specifice Societăţii Informatice (comerţ şi tranzacţii electronice, informatizarea serviciilor publice, accesul cetăţeanului şi agenţilor economici la informaţia publică etc.), iar pe de altă parte, se vor asigura regulile etice de a munci şi trăi într-un nou tip de societate (protecţia vieţii private şi a datelor personale, confidenţialitatea tranzacţiilor, protecţia consumatorului etc.).

La rândul său, comunitatea de afaceri din domeniul tehnologiilor informaţiei şi comunicaţiilor oferă produse şi servicii de înalt nivel tehnologic, accesibile ca preţuri şi tarife. Totodată se formează o nouă cultură a competitivităţii agenţilor economici din toate sectoarele în noul tip de economie, economia digitală. Prin complexitatea fenomenelor pe care le implică dezvoltarea societăţii informaţionale, prin necesitatea formării unei noi culturi a cunoaşterii şi a învăţării în condiţiile utilizării noilor tehnologii a cercetării-dezvoltării şi inovării tehnologice, participarea activă a comunităţii academice (instituţii de cercetare, de educaţie şi de cultură) devine de asemenea esenţială.

Societatea civilă are de asemenea atât un rol proactiv prin formularea de cerinţe şi priorităţi privind modul de utilizare al noilor tehnologii în folosul întregii societăţi, cât şi reactiv faţă de politicile şi reglementările guvernamentale. Aceste roluri pot fi exercitate atât la nivel de grup (organizaţii non guvernamentale, asociaţii profesionale etc.), cât şi la nivel individual. Drepturile cetăţeanului şi consumatorului în societatea informaţională au noi dimensiuni şi se pot manifesta sub noi forme.

Dezvoltarea durabilă a agenţilor adaptivi la identificarea intruziunilor în reţele informaţionale

Etapa actuală de dezvoltare a Republicii Moldova se caracterizează prin dezvoltarea şi răspândirea rapidă a tehnologiilor informaţionale, prin rolul avansat al domeniului informaţional, ce include totalitatea informaţiei, infrastructurii tehnologiei informaţiei şi comunicaţiilor (TIC), instituţiilor care prelucrează informaţia şi a sistemului ce reglementează relaţiile sociale apărute în acest context.

Fiind o parte importantă şi indispensabilă a vieţii societăţii moderne, domeniul informaţional influenţează activ asupra stării componentelor de stat, sociale, militare, economice şi a altor componente ale securităţii naţionale. Totodată, securitatea naţională depinde considerabil de asigurarea securităţii informaţionale a persoanei, societăţii şi statului.

Pe parcursul ultimilor ani a crescut semnificativ necesitatea unei abordări complexe şi eficiente a procesului de asigurare a securităţii spaţiului informaţional naţional, inclusiv al infrastructurii critice naţionale, de asigurare şi protecţie a informaţiei atribuite la secret de stat, de prevenire şi combatere a crimelor informaţionale, extremismului şi terorismului în spaţiul informaţional.

Importanţa problemei a fost conturată în Concepţia securităţii naţionale şi Strategia securităţii naţionale a Republicii Moldova, care, stabilind obiectivele sistemului de securitate naţională, au reflectat atât ameninţările din domeniul tehnologiilor informaţionale, cât şi asigurarea securităţii informaţionale.

Adoptarea Concepţiei este determinată de necesitatea protecţiei intereselor persoanelor, societăţii, statului în domeniul informaţional, importanţa pericolelor securităţii informaţionale în societatea modernă, de necesitatea menţinerii unui echilibru între interesele persoanelor, societăţii, statului pentru asigurarea securităţii informaţionale.

Perfecţionarea bazei normative în domeniul dat este determinată de elaborarea şi consolidarea normativă a anumitor drepturi şi obligaţiuni ale statului, instituţiilor administraţiei publice, persoanelor cu funcţii de răspundere, organizaţiilor care asigură securitatea informaţională, mecanismelor de realizare a drepturilor şi obligaţiunilor date. Consolidarea acestora va permite sistematizarea relaţiilor sociale privind asigurarea securităţii informaţionale, înlăturarea incertitudinilor şi limitelor discreţionare în domeniul dat.

Echipele de răspuns la incidente de securitate există în toată lumea pentru a ajuta utilizatorii să reacţioneze la atacurile îndreptate asupra echipamentelor IT, indiferent de tehnologia utilizată sau din ce organizaţie face parte utilizatorul respectiv. Multe organizaţii au echipe interne de răspuns la incidente al căror scop este tratarea incidentelor din punctul de vedere al instituţiei respective pentru a proteja utilizatorii și/sau clienţii săi. Guvernele naţionale organizează echipe de răspuns la incidente de securitate la nivel de ţară, pentru a contracara atacuri masive și specializate asupra cetăţenilor, a companiilor și a infrastructurilor de importanţă naţională - unele dintre acestea critice pentru o bună existenţă și funcţionare a societăţii. Două exemple de astfel de atacuri sunt atacurile de tip distribuit asupra serviciilor (Distributed Denial of Service - DDoS) și atacurile de tip „phishing”.

Serviciul Trusted-Introducer a fost înfiinţat în Europa în anul 2000 pentru a facilita colaborarea între astfel de echipe de răspuns și, prin urmare, pentru a crește nivelul de securitate prin răspunsul mai rapid la atacurile în desfășurare și a amenințărilor de tip nou. TI asigură o bază de încredere, cu servicii adiționale specializate pentru toate echipele de răspuns la incidente de securitate. De asemenea, TI administrează o bază de date cu informații despre astfel de echipe existente și oferă o imagine de ansamblu actualizată asupra nivelului lor demonstrat de maturitate și abilitate. Pentru garantarea acestor informații a fost conceput un mecanism de acreditare și certificare bazat pe cele mai bune practici dezvoltate și testate de-a lungul timpului în cadrul aceleeași comunități TI.

Pentru îndeplinirea obiectivelor sale, acest serviciu, asigură tuturor utilizatorilor săi accesul gratuit la o bază de date cu echipele de răspuns. Această bază de date conține informații despre toate echipele de răspuns cunoscute și înregistrate care sunt acceptate de comunitatea Trusted-Introducer. Putem căuta în această bază de date echipa sau echipele adecvate în funcție de tipul echipei, țara unde activează și statutul în cadrul TI.

În Republica Moldova, există două astfel de echipe de răspuns la incidente de securitate: www.cert.gov.md şi www.cert.acad.md (www.cert.md). Denumirea CERT vine de la Echipă de răspuns la incidentele legate de securitatea calculatoarelor (Computer Emergency Response Team) ce reprezintă o echipă de experți în securitatea informațională, a cărei sarcină este să răspundă la incidente ce țin de securitatea sistemelor informaționale. Acesta asigură serviciile necesare pentru gestionarea incidentelor şi sprijinirea beneficiarilor lor în recuperarea de pe urma încălcărilor de securitate.

În vederea executării prevederilor Hotărârii Guvernului Nr. 746 din 18.08.2010 „Cu privire la aprobarea Planului Individual de Acțiuni al Parteneriatului Republica Moldova – NATO actualizat", în cadrul Întreprinderii de Stat „Centrul de telecomunicații speciale" a fost creat Centrul pentru Securitatea Cibernetică - CERT-GOV-MD [vezi și 15, 16].

Misiunea Centrului pentru Securitatea Cibernetică este de a susține societatea moldovenească în protejarea împotriva incidentelor IT. CERT-GOV-MD va fi punctul central de raportare şi coordonare privind incidentele de securitate în sistemele de comunicații şi informatice aflate în administrarea Întreprinderii de Stat „Centrul de telecomunicații speciale". CERT-GOV-MD va facilita schimbul de informații privind incidentele IT între organizațiile din societate şi va disemina informațiile legate de noi probleme, care ar putea împiedica funcționarea sistemelor IT guvernamentale. Totodată, CERT-GOV-MD asigură informații şi consultanță privind măsuri pro-active, precum compilarea şi completarea statisticilor.

CERT-GOV-MD a fost creat pentru a asista beneficiarii în utilizarea sistemelor informaționale şi de telecomunicații ale autorităților administrației publice în implementarea măsurilor pro active şi reactive în vederea reducerii riscurilor de incidente a securității IT şi acordarea asistenței în reacționarea la incidente. Centrul, de asemenea, examinează incidentele apărute în reţelele Moldoveneşti şi care sunt raportate de către cetăţeni şi instituţii din Republica Moldova, precum şi celor din străinătate.

Centrul de expertiză şi securitate pe internet MD-CERT - este un centru de expertiză a securității pe internet, situat la RENAM, (Asociația Națională Educație şi Cercetare din Republica Moldova). Centrul dat studiază vulnerabilități web, cercetează schimbările pe termen lung în sistemele de rețea și contribuie la dezvoltarea, informarea și instruirea cu scopul îmbunătățirii securității.

MD-CERT este un proiect necomercial fiind înregistrată oficial la CSIRT (Computer Security Incident Response Team) și este angajată în colectarea și analizarea faptelor de incidente informatice, în ceea ce privește resursele de rețea situate pe teritoriul Republicii Moldova. MD-CERT garantează confidențialitatea tuturor informațiilor trimise cu privire la incidente.

Sistemele informatice şi reţelele de calculatoare din cadrul organizaţiilor tot mai des sunt atacate şi securitatea este minimă, ceea ce duce la mari probleme atât organizaţiilor cât şi clienţilor acestor organizaţii. În urma acestor atacuri informaţionale datele confidenţiale sunt deteriorate, modificate sau chiar şterse.

Din această cauză mediul de afaceri are nevoie pentru a proteja resursele sale. Dar din păcate cele mai dese incidente de securitate a informației au loc în interiorul organizației, din cauza nerespectării măsurilor de securitate.

Procesul de integrare a agenților adaptivi de identificare a intruziunilor în rețele informaționale

Conceptele agenților adaptivi sânt totalitatea măsurilor, politicilor și principiilor luate în ansamblu pentru a spori nivelul de securitate în vederea protejării sistemului sau rețelei din care face parte o structură sau o organizație.

Trei concepte importante referitoare la securitatea în rețea sunt: *confidențialitatea*, *integritatea* şi *disponibilitatea*.

Confidențialitatea se referă la ideea că informația trebuie sa fie accesată doar de persoanele autorizate în a face aceasta, altcineva având interzis accesul la aceste date. Când informația este citită sau copiată de către cineva neautorizat, rezultatul este cunoscut ca *pierdere a confidențialității*. Uneori confidențialitatea este critică, în cazul informațiilor private, date secrete, coduri bancare, etc.

Integritatea constă în faptul că informația este primită identic după cum a fost trimisă, adică datele nu au fost interceptate sau modificate în timpul transferului. Informația poate fi coruptă dacă se află într-o rețea nesecurizată, iar în cazurile când ea este modificată neautorizat, aceasta se numeşte o *pierdere a integrităţii,* ceea ce înseamnă că informația a fost modificată din cauza erorilor întâmplătoare a personalului sau datele au fost interceptate de persoane neautorizate. Integritatea datelor poate fi foarte importantă în cazul datelor financiare, transferurilor de fonduri, etc.

Informația, de asemenea, poate fi inaccesibilă, chiar dacă se află în rețeaua necesară, făcând persoanele autorizate să rămână fără acces la datele de care au nevoie, acest fapt numindu-se *pierdere a disponibilității.* Un astfel de exemplu este atunci când un utilizator nu poate accesa o rețea sau un anumit serviciu, cel mai probabil suferind în urma unui atac de tipul *Denia of Service.*

Ca concepte distincte care tratează problema securității deosebim:

- securitatea bazată pe mai multe nivele – *security in depth;*
- securitatea implementată încă din faza de proiectare – *security by design.*

Pentru a reduce riscurile de securitate în utilizarea şi administrarea sistemelor IT, cea mai bună strategie este cea pe ansamblu (security in depth). Aceasta presupune evaluarea pe ansamblu a infrastructurii IT şi clasificarea expunerii la riscuri de securitate. Pentru fiecare dintre riscurile identificate trebuie realizate planuri de măsuri, fie pentru reducerea expunerii la acele riscuri (mitigation), fie pentru reducerea impactului odată ce riscul s-a produs (contingency).

La polul opus se află abordarea punctuală (limitată în a oferi protecție doar la un anumit nivel), a implementării unui sistem specific de securitate, de exemplu antivirus sau detectarea accesului neautorizat (Intrusion Detection Systems – IDS). Deşi aceste sisteme sunt foarte utile în cadrul ariei specifice de aplicabilitate, această abordare lasă descoperite alte zone cu posibile breşe de securitate.

Un sistem de detecție al intruziunilor - IDS (Intrusion Detection System) reprezintă un echipament (sau o aplicație) care monitorizează activitățile rețelei și/sau sistemului căutând activități malițioase sau violări ale politicilor.

Detecția intruziunilor este procesul de monitorizare a evenimentelor care au loc intr-un sistem sau o rețea de calculatoare și analiza lor pentru a detecta posibile incidente care sunt violări sau amenințări iminente de violare a politicilor de securitate, a politicilor de utilizare acceptate sau a practicilor standard de securitate. Prevenirea intruziunilor este procesul prin care se desfășoară detecția intruziunilor și încercarea de înlăturare a posibilelor incidente detectate. Sistemele de detecție și prevenire ale intruziunilor - IDPS (Intrusion Detection-Prevention Systems) au ca scop principal identificarea posibilelor incidente, înregistrarea informațiilor despre ele, încercarea de înlăturare a incidentelor si raportarea către administratorii de securitate. În plus, organizațiile pot folosi IDPS-urile si pentru alte scopuri: identificarea problemelor legate de politicile de securitate, documentarea amenințărilor existente si descurajarea indivizilor în a încălca politicile de securitate.

Pentru a avea o abordare de ansamblu, trebuie pornit de la lucrurile elementare: uniformitatea infrastructurii din punct de vedere al sistemelor utilizate, administrarea centralizată, menținerea la zi a sistemelor din punct de vedere al patch-urilor şi fix-urilor (pentru sistemele de operare şi aplicațiile instalate), aplicarea unor configurări standard de securitate pe toate serverele şi stațiile de lucru, în funcție de rolul funcțional al acestora precum şi realizarea unor proceduri standard de utilizare şi administrare.

Studiile arată că în medie 90% din breşele de securitate identificate nu sunt datorate problemelor tehnologice ci instalării şi configurării necorespunzătoare sau datorită nerespectării unor proceduri de utilizare şi administrare a sistemului. În multe cazuri, aceste proceduri nici nu există. Trebuie deci să privim problema pe ansamblu, adresând tehnologia, oamenii şi procedurile interne ale organizației.

Conceptul de „*security by design*" este foarte bun atunci când posibilitățile de implementare sunt justificate. De multe ori totuşi acest concept impune unele restricții care limitează foarte mult utilizarea sa în arii diferite, metoda fiind utilizată în zone speciale, foarte specializate (zone cu statut de importanță majoră, ca de exemplu, rețelele de calculatoare care controlează traficul aerian, laboratoare de cercetare, etc.), zone în care accesul prin definiție este foarte restrictiv.

Acest concept aplicat la „nivel software" generează un principiu de funcționare al aplicației cu restricții foarte clare – care de multe ori din cauza acestor limitări devine în scurt timp nefezabil.

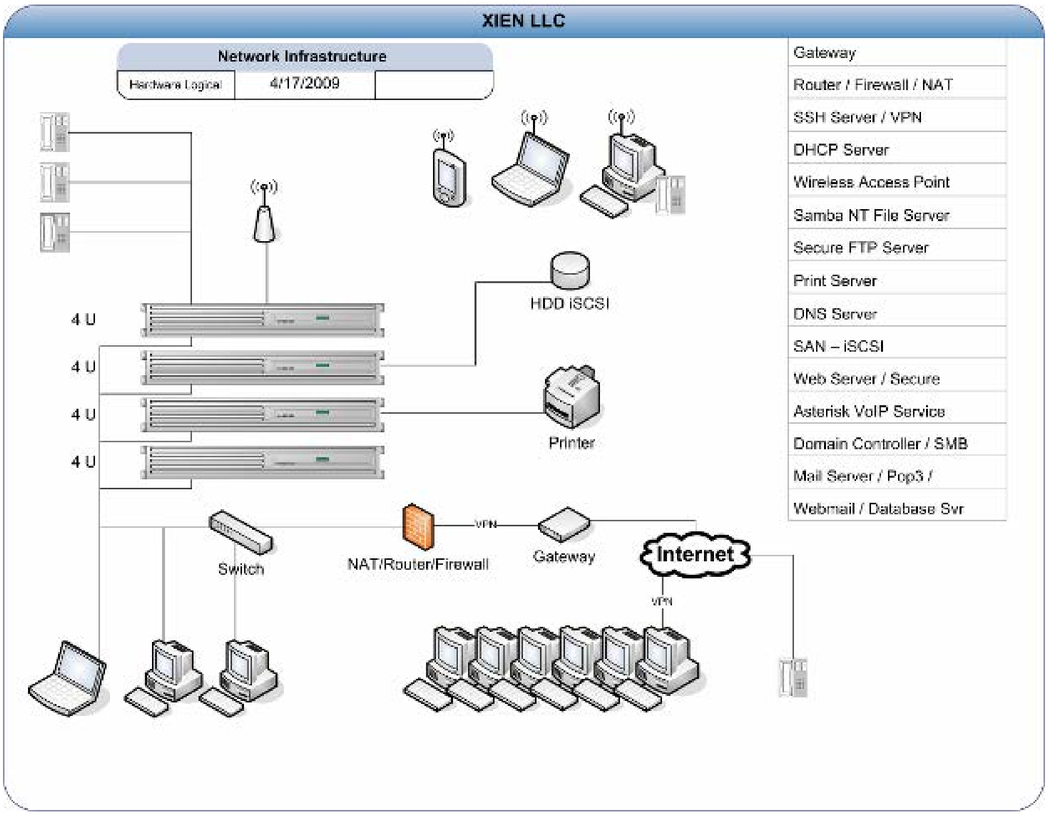


Figura 1. Exemplu de utilizare al conceptului de „security by design" la nivel IT

Pentru a exemplifica acest concept la nivel de aplicație (software) să presupunem că se citeşte de către o aplicație un şir de caractere care ar trebui să reprezinte un nume. Dacă se limitează prin definiție ca acel nume să conțină numai caractere alfabetice (litere mici şi/sau mari) vor fi persoane care se vor simți ofensate că nu pot introduce nume de tipul „best4you” sau diferite caractere gen /.$%@, etc. în acest caz acel program ajungând să-şi piardă din start unii utilizatori mai pretenţioşi. Totuşi merită semnalat faptul că implementarea unei astfel de metode este foarte binevenită în unele cazuri când netratarea corespunzătoare a unei astfel de secvenţe citite poate genera probleme de tipul „buffer overflow” generând apariţia unor breşe de securitate ce pot fi utilizate în scopuri malefice (cazul când se folosesc caractere speciale ce pot ascunde informaţii tratate distinct, de exemplu, dacă se acceptă introducerea unei secvenţe „%n” se poate interpreta ca „salt la linie nouă” de către o funcţie de afişare generând în acel caz o posibilă eroare, cel puţin la nivel estetic – ca formă de prezentare).

„*In-depth security*” sau „*defence in depth*” este un principiu bazat pe mai multe „straturi” de securitate în vederea protejării sistemului sau reţelei din care face parte.

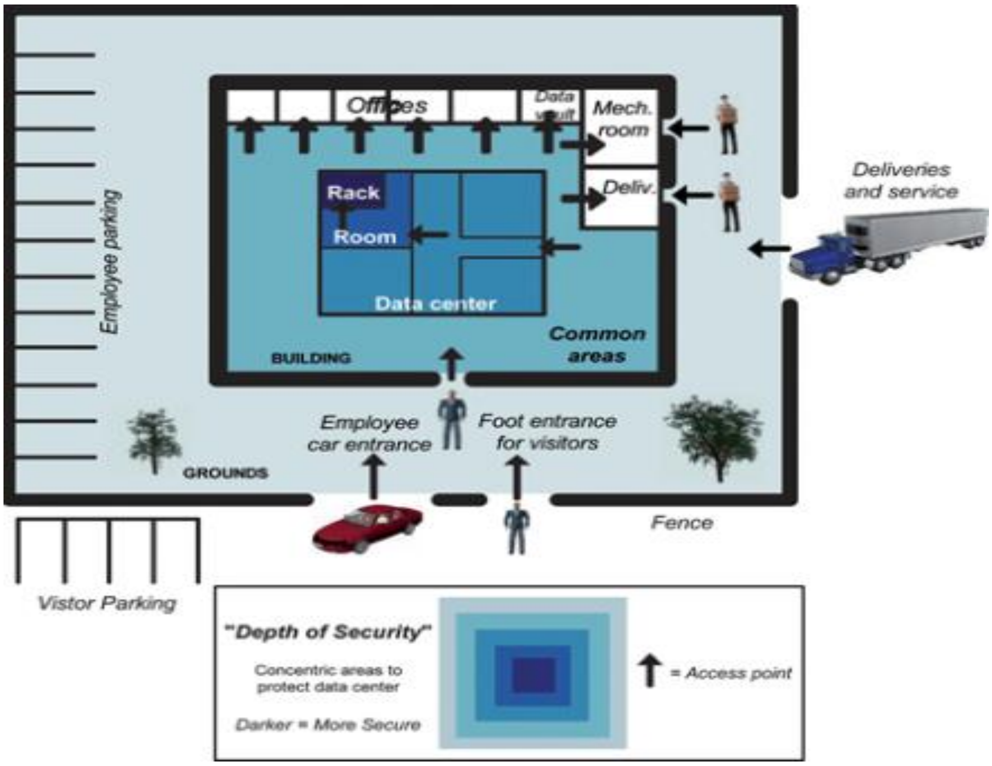


Figura 2. Evidenţierea conceptului de „Security in depth”

Trebuie să se înţeleagă că nu contează cât de bun este fiecare „strat” – privit singular, există cineva mai deştept, cu resurse materiale şi temporale suficiente încât să treacă de „strat”-ul dat. Acesta este motivul pentru care practicile uzuale de securitate sugerează existenţa mai multor nivele de securitate sau pe scurt „in-depth security”.

Ca o regulă de bază (nivele minime de securitate instalate) se sugerează următoarele produse:

- firewall – o barieră protectivă între calculator, reţeaua internă şi lumea din jur. Traficul din interior şi spre exterior este filtrat, restricţionat, blocând eventualele transmisii nenecesare. Folosind reguli stricte de acces la nivel de aplicaţii şi utilizatori, se poate îmbunătăţi substanţial securitatea sistemului şi a reţelei locale;

- antivirus – un software instalat cu scopul clar de a te proteja de viruşi, viermi şi alte coduri malițioase. Majoritatea aplicațiilor antivirus monitorizează traficul în fiecare moment, scanând în timp ce se navighează pe Internet sau scanând mesajele primite pe mail (cu tot cu ataşamente) şi periodic oferind posibilitatea rulării unei scanări la nivelul întregului sistem în căutarea de cod malițios;
- intrusion detection system (IDS) şi Intrusion Prevention System (IPS o varianta mai specială a IDS) – un dispozitiv sau o aplicaţie folosit(ă) pentru a inspecta întregul trafic dintr-o rețea şi de a trimite mesaje de alertă utilizatorului sau administratorului sistemului cu privire la încercări neautorizate de acces. În funcție de metodele utilizate IDS-ul poate rămîne la stadiul de a alerta utilizatori. Tehnologia VPN oferă asemenea conexiuni private, separând datele în „tuneluri”. În acest mod, o rețea privată poate fi creată prin rețele publice cum ar fi Internetul, folosind protocoale ca Generic Routing Incapsulation (GRE) sau Layer 2 Tunneling Protocol, pe scurt L2TP.

Pentru a oferi protecția datelor pe care le transportă, echipamentele hardware şi software VPN susțin tehnologia de criptare. Tot traficul care circulă printr-un tunel între două puncte într-un VPN este criptat.

Uneori, separarea datelor folosind tehnologii de tunneling oferă confidențialitate eficientă, de exemplu în cadrul rețelei locale. Deseori însă, cerințele suplimentare de confidențialitate necesită protecție mai mare, de exemplu prin folosirea unor tehnologii sau protocoale de criptare digitale ca IPSec.

IPSec. IPSec, sau protocolul de securitate IP, este un cadru de standarde deschise pentru asigurarea comunicațiilor private securizate pe Internet. IPSec asigură confidențialitatea, integritatea şi autenticitatea comunicațiilor de date prin rețea publică, fiind o componentă tehnică cheie pentru o soluție de securitate totală.

Acest protocol poate rezolva amenințările de securitate din infrastructura de rețea, fără a cere modificări costisitoare ale gazdei şi aplicațiilor. IPSec oferă criptare şi autentificare la nivelul de rețea IP. Deoarece pachetele criptate arată ca pachete IP obișnuite, ele pot fi redirecționate ușor către o rețea IP, ca Internetul, exact ca pachetele IP obișnuite. Singurele dispozitive care cunosc criptarea sunt punctele finale. IPSec utilizează diferite tehnologii existente, cum sunt criptarea DES şi certificatele digitale.

Criptare şi decriptare. Tehnologia de criptare asigură ca mesajele să nu fie interceptate sau citite de altcineva decât destinatarul autorizat.

Criptarea este utilizată pentru a proteja date care sunt transportate prin rețea publică, şi folosește algoritmi matematici avansați pentru a cifra mesajele şi documentele atașate. Există mai multe tipuri de algoritmi de criptare, dar unii sunt mai siguri decât alții. În cei mai mulți algoritmi, datele originale sunt criptate utilizînd o anumită cheie de criptare, iar computerul destinatar sau utilizatorul pot descifra mesajul folosind o cheie de decriptare specifică.

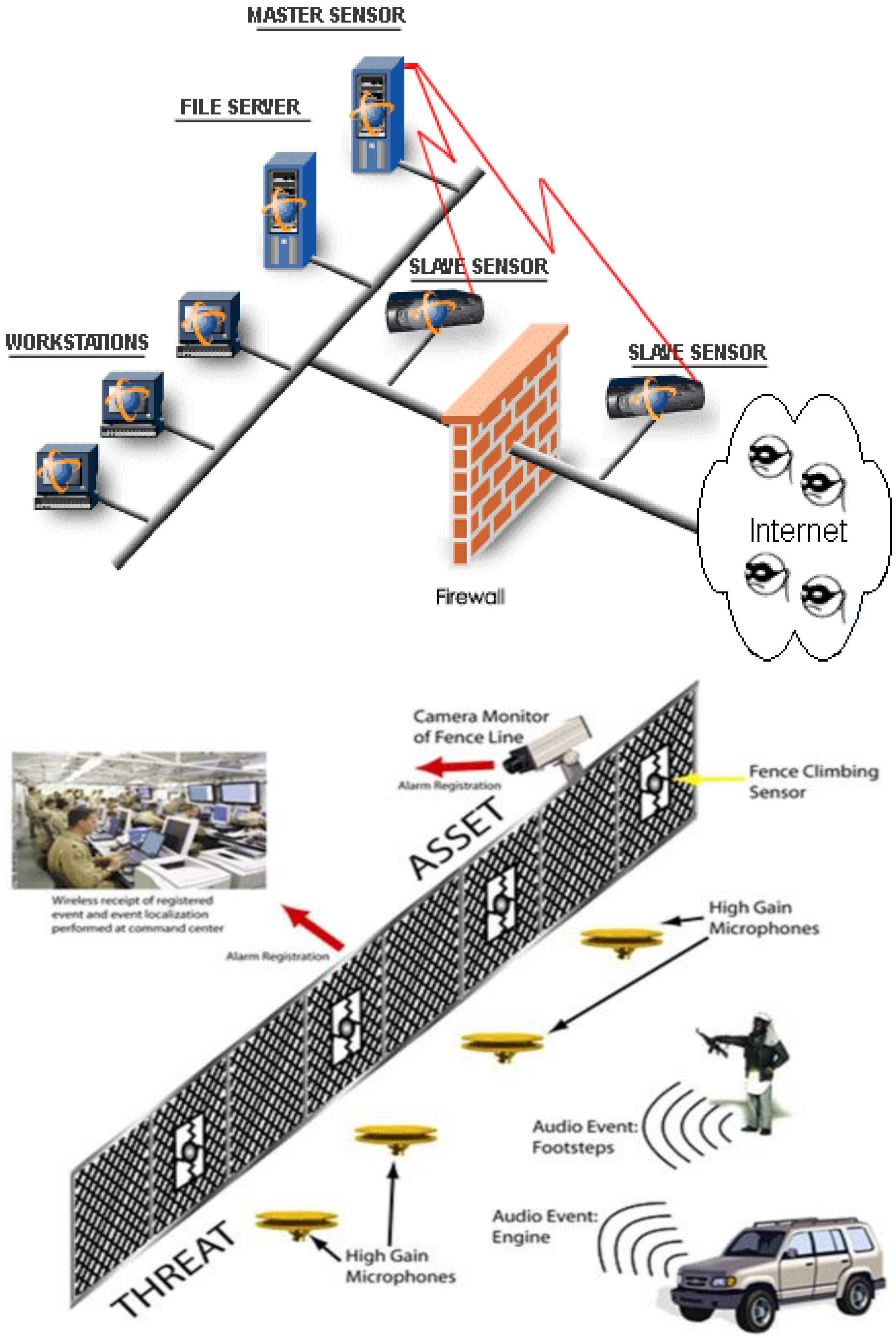


Figura 3. IDS la nivel software şi hardware

Aplicarea conceptelor enumerate mai sus reduce în mare parte ameninţările la care sunt supuse sistemele informaţionale a reţelelor IP şi sporeşte semnificativ nivelul de securitate astfel încât totalitatea informaţiilor de diferite categorii sa fie păstrată în structura de reţea.

Monitorizarea şi analiza activităţii agenţilor adaptivi în reţele informaţionale

Identificarea intruziunilor în sisteme si reţele informaţionale a devenit una din componentele majore ale securităţii informaţionale. Analiştii acestui concept au sesizat o contradicţie între nevoia de comunicaţii şi conectivitate, pe de o parte, şi necesitatea asigurării confidențialității, integrității şi autenticității informațiilor, pe de altă parte. Domeniul relativ nou al identificării intruziunilor caută soluții tehnice pentru rezolvarea acestei contradicții aparente. Viteza şi eficiența comunicațiilor „instantanee” de documente şi mesaje conferă numeroase atacuri actului decizional într-o societate modernă, bazată pe economie concurențială. Însă utilizarea serviciilor de poştă electronică, web, transfer de fonduri, etc. se bazează pe un sentiment, deseori fals, de securitate a comunicațiilor, care poate transforma potențialele câştiguri generate de accesul rapid la informații, în pierderi majore, cauzate de furtul de date sau de înserarea de date false sau denaturate.

În loc de a ne focaliza numai pe un anumit tip de securizare, este important să înțelegem că o soluție completă de identificare a intruziunilor în rețelele informaționale este necesară instituției pentru a-şi proteja datele şi resursele informaționale. Această soluție trebuie să includă autentificare şi autorizare, confidențialitatea datelor şi securizarea perimetrului.

Studierea materialelor şi practicii de până acum din domeniul identificării intruziunilor în sistemele și rețelele informaționale arată că metodele tehnice şi programul de aplicare a principiilor securității informaționale sunt bine documentate şi este foarte greu de ales vre-un domeniu unde aceste metode nu sunt subiectul unei cărți sau articol.

Păstrarea datelor a devenit o problemă tot mai importantă atât datorită faptului că se manipulează un volum tot mai mare de date, dar şi modului de accesare al acestor informații care trebuie să fie rapid, eficient, optim din punct de vedere al raportului timp, accesare/valoare a informației. Nu în ultimul rând, datele stocate trebuie să fie protejate astfel încât să se asigure o securitate adecvată în ceea ce priveşte persoanele care au acces la ele, dar şi din punct de vedere al concordanței cu legislația privind securitatea şi protecția informațiilor şi datelor cu caracter clasificat, utilizarea procedurilor de răspuns la incidente de securitate cibernetică și stabilirea responsabililor pentru astfel de activități.

Există numeroase direcții de cercetare în domeniul identificarii intruziunilor în sisteme si rețele informaționale, și mai ales în ceea ce privește estimarea de stare. Trebuie avute în vedere beneficiile introducerii tehnologiilor avansate de protecție a sistemului informatic: IDS/IPS, soluții antimalware de tip enterprise, criptare fișiere și conexiuni, acces la distanță prin VPN și capacitățile acestora de a trata erorile de topologie apărute în sistem.

Concluzii

Modelul societății viitorului - Societatea Informatică a pus în fața Uniunii Europene probleme de maximă prioritate şi urgență: crearea unui nou cadru de reglementări, promovarea unei noi culturi şi a spiritului întreprinzător în afaceri, obținerea poziției de lider în noile tehnologii, educarea şi instruirea cetățenilor, implementarea unor noi metode de a face afaceri.

În acest context Uniunea Europeană, prin organismele sale politice şi executive a acționat începând din anul 1993 printr-o serie de decizii strategice şi programe, cel mai recent document strategic fiind e-Europe - O Societate Informatică pentru toți. Comisia Europeană a luat această inițiativă prin adoptarea Comunicării „e-Europe an information Society for All" la 8 decembrie 1999, prin care se propune accelerarea implementării tehnologiilor digitale în Europa şi asigurarea competențelor necesare pentru utilizarea acestora pe scară largă. Această inițiativă are un rol central în agenda reînnoirii economico-sociale pe care şi-o propune UE, constituind totodată elementul cheie pentru modernizarea economiei europene, pentru tranziția la noua economie bazată pe cunoaştere în perspectiva anului 2020.

Aplicarea tehnologiilor digitale precum și implimentarea agenților adaptivi de identificare a intruziunilor în sisitemele și rețelele informaționale a devenit un factor vital. Deşi Europa este lider tehnologic în multe domenii (de exemplu, comunicații mobile, televiziune digitală, extinderea rețelelor informaționale), în altele - în special în utilizarea Internetului a rămas în urmă comparativ cu S.U.A. şi Canada.

În consecință inițiativa e-Europe îşi propune să aducă Europa în situația de a beneficia din plin de avantajele economiei digitale, de a valorifica la maxim prioritățile sale tehnologice, de a-şi creşte potențialul educațional şi antreprenorial necesar.

Obiectivele cheie sunt:

- ***asigurarea comunicării on-line pentru fiecare locuință, şcoală, întreprindere şi instituție din administrația publică;***
- ***crearea culturii digitale şi antreprenoriale a Europei, de care să beneficieze investitorii dinamici, care vor finanța şi dezvolta aceste idei noi;***
- ***asigurarea principiului conform căruia tranziția la era digitală să fie un proces care să includă întreaga societate, să asigure încrederea consumatorilor şi să întărească coieziunea socială.***

Pentru implementarea acestor obiective a fost adoptat planul de acțiune e-Europe (Feira, 2000), actualizat în 2006, la Sevilia (prin planul de acțiune e-Europe 2005). Planul de acțiuni e-Europe conține o serie de acțiuni pentru asigurarea accesului ieftin, sigur şi rapid la Internet, pentru asigurarea resurselor umane capabile să dezvolte şi să utilizeze noile tehnologii şi pentru stimularea utilizării Internet-ului la nivel european. Progresele importante ale țărilor membre UE au permis definirea unui nou plan de acțiune având ca orizont, care se va baza pe progresele tehnologice din domeniul comunicațiilor în bandă largă şi al multi-platformelor de acces, mizând totodată pe sinergia dintre dezvoltarea infrastructurii de bandă largă şi industria de servicii TI de conținut digital.

Obiectivele e-Europe sunt de maximă importanță nu numai pentru țările membre UE, ci şi pentru țările din Europa Centrală şi de Est candidate la aderare. Ritmurile de dezvoltare şi utilizare a TIC în toate sectoarele economico-sociale vor influenţa în mod direct ritmul procesului de integrare europeană şi vor oferi totodată noi oportunităţi de depăşire a dificultăţilor întâmpinate de ţările în plin proces de reformă. Conferinţa ministerială a ţărilor din Europa Centrală şi de Est, organizată sub patronajul şi cu participarea Comisiei Europene a decis elaborarea unui Plan de acţiune e-Europe pentru ţările în curs de aderare, complementar cu cel al ţărilor membre UE, dar convergent ca obiective. Faţă de obiectivele şi acţiunile prevăzute pentru ţările UE, planul e-Europe conţine un obiectiv suplimentar, care se referă la accelerarea asigurării elementelor fundamentale pentru Societatea Informatică în ţările candidate la aderare, prin dezvoltarea şi asigurarea accesibilităţii serviciilor de comunicaţie. Realizarea obiectivelor e-Europe necesită o angajare politică susţinută din partea ţărilor candidate.

Bibliografie

1. Held G. ş.a. Arhitecturi de securitate. Editura Teora, 2003.
2. Hontanon R.J. Securitatea reţelelor. Editura Teora, 2003.
3. Hsiao S.B., Stemp R. Advanced Computer Security. CS 4602. Monterey, California, 2006.
4. Mihai I.C. Securitatea informaţiilor. Editura Sitech, 2012. 317 p.
5. Mihai I.C. Securitatea sistemului informatic. Editura Dunărea de Jos, 2007.
6. Oprea D. Protecţia şi securitatea informaţiilor. Editura Polirom, 2007. 448 p.
7. Sarcinschi A. Vulnerabilitate, risc, ameninţare. Securitatea ca reprezentare psihosocială. Editura Militară, 2009.
8. Udroiu M. ş.a. Securitatea informaţiilor în societatea informaţională Editura Universitară, 2010. 402 p.
9. Institutul de Dezvoltare a Societăţii Informaţionale. https://idsi.md/node/515 (vizitat 01.01.2018)..
10. ISO 27001:2005. Sistemul de management al securităţii informaţiilor – Cerinţe.
11. ISO 27002:2005. Codul de practică al managementului securităţii informaţiilor.
12. ISO 27001:2013. Sistem de management al securităţii informaţiei: specificaţii şi ghid de utilizare.
13. ISO/IEC 27007:2011. Tehnologia Informaţiei – Tehnici de securitate – Ghid pentru auditarea SMSI.
14. ISO/IEC 27000:2014. Sisteme de management al securităţii informaţiei.
15. Hotărârea Parlamentului pentru aprobarea Strategiei securităţii naţionale a Republicii Moldova nr. 153 din 15.07.2011. În: Monitorul Oficial nr. 170-175 din 14.10.2011.
16. Hotărârea Guvernului cu privire la Strategia Naţională de dezvoltare a societăţii informaţionale „Moldova Digitală 2020” nr. 857 din 31.10.2013. În: Monitorul Oficial nr. 252-257 din 08.11.2013.

SISTEME DIFERENȚIALE CUBICE CU FOCAR SLAB ŞI CU O DREAPTĂ INVARIANTĂ REALĂ DE MULTIPLICITATE ALGEBRICĂ MAXIMALĂ

Alexandru ŞUBĂ, prof. univ., dr. hab.
Silvia TURUTA, doctorand
Institutul de Matematică şi Informatică al AŞM
Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. În lucrarea de față se arată că în mulțimea sistemelor cubice de ecuații diferențiale cu focar slab multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte invariante afine şi reale este egală cu patru. Astfel de clase de sisteme sunt trei. Pentru fiecare dintre aceste clase este rezolvată problema centrului.
Cuvinte cheie: sistem diferențial cubic, dreaptă invariantă, multiplicitate algebrică, problema centrului.

CUBIC DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH A WEAK FOCUS AND A REAL INVARIANT STRAIGHT LINE OF MAXIMAL ALGEBRAIC MULTIPLICITY

Abstract. In this article, we show that in the set of all cubic systems of differential equations with a weak focus the maximal algebraic multiplicity of an invariant affine and real straight line is four. There are three classes of these systems. For each of these classes the problem of center is solved.
Keywords: cubic differential system, invariant straight line , algebraic multiplicity, center problem.

1. Introducere

Considerăm sistemul polinomial de ecuații diferențiale

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y),\ \frac{dy}{dt} = Q(x,y),\quad \gcd(P,Q) = 1, \tag{1}$$

$P, Q \in \mathbb{R}[x,y]$ şi câmpul vectorial $\mathbb{X} = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ asociat sistemului (1). Cu $\gcd(P,Q)$ s-a notat cel mai mare divizor comun al polinoamelor P şi Q.

Fie $n = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$. Dacă $n = 2$ $(n = 3)$, atunci sistemul (1) se numeşte pătratic (cubic).

Vom spune că curba $f(x,y) = 0, f \in \boldsymbol{C}[x,y]$ (funcția $\mathrm{f} = \exp\left(\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{h}}\right); \mathrm{g}, \mathrm{h} \in \boldsymbol{C}[x,y]$) este o *curbă algebrică invariantă* (un *factor exponențial*) pentru sistemul (1), dacă există un aşa polinom $K_f(x,y) \in \boldsymbol{C}[x,y], degK_f \leq n-1$, încât în x şi y are loc identitatea

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot P(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot Q(x,y) \equiv f(x,y) \cdot K_f(x,y).$$

Polinomul $K_f(x,y)$ se numeşte *cofactorul* curbei algebrice invariante (factorului exponențial) f. Dacă m este cel mai mare număr natural astfel că f^m divide $\mathbb{X}(f)$, atunci se zice că f are multiplicitatea paralelă egală cu m. În cazul $\deg(f) = 1$, i.e. $f(x,y) \equiv \alpha x + \beta y + \gamma = 0, (\alpha, \beta) \neq (0,0)$, curba f se numeşte *dreaptă invariantă.*

Se spune că curba algebrică invariantă $f(x,y) = 0$ de gradul d are pentru sistemul (1) *multiplicitatea algebrică* egală cu m, dacă m este cel mai mare număr natural astfel că f^m împarte $E_d(\mathbb{X})$, unde

$$E_d(\mathbb{X}) = det\begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_j \\ \mathbb{X}(\nu_1) & \mathbb{X}(\nu_2) & \cdots & \mathbb{X}(\nu_j) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbb{X}^{(j-1)}(\nu_1) & \mathbb{X}^{(j-1)}(\nu_2) & \cdots & \mathbb{X}^{(j-1)}(\nu_j) \end{bmatrix},$$

iar $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_j$ este o bază a mulțimii polinoamelor de gradul d: $\boldsymbol{C}_d[x,y]$ (vezi [6]).

Dacă $d = 1$, adică în cazul dreptelor invariante, putem lua $\nu_1 = 1, \nu_2 = x, \nu_3 = y$, şi atunci $E_1(\mathbb{X})$ se scrie astfel:

$$E_1(\mathbb{X}) = P \cdot \mathbb{X}(Q) - Q \cdot \mathbb{X}(P).$$

Polinomul $E_d(\mathbb{X})$ are în x şi y gradul

$$d(d+1)(d+2)[8 + 3(d+3)(n-1)]/24$$

(vezi [19]). În cazul sistemelor cubice ($n = 3$) şi a dreptelor invariante ($d = 1$) avem $\deg(E_1(\mathbb{X})) = 8$.

O curbă algebrică invariantă $f = 0$ de gradul d a câmpului vectorial $\mathbb{X}$ are *multiplicitatea geometrică* egală cu m, dacă m este cel mai mare număr natural astfel că există un şir de câmpuri vectoriale $\{\mathbb{X}_r\}_{r\geq 1}$ ce tinde către $\mathbb{X}$ şi fiecare câmp $\mathbb{X}_r$ e de acelaşi grad ca şi $\mathbb{X}$ şi are m curbe algebrice invariante distincte $f_{r1}, f_{r2}, \dots, f_{rm}$, de grad nu mai mare ca d şi care converg către f când r tinde la infinit.

Fie D un domeniu din $\mathbb{R}^2$ şi $\mathrm{F} \in \mathrm{C}^1(\mathrm{D}, \mathbb{R})$ $\left(\mu \in \mathrm{C}^1(\mathrm{D}, \mathbb{R})\right)$. Funcția $\mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ $(\mu(\mathrm{x}, \mathrm{y}))$ se numeşte integrală primă (factor integrant) al sistemului (1), dacă în D are loc identitatea

$$P(x,y)\frac{\partial F}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial F}{\partial y} \equiv 0$$

$$\left(P(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y} \equiv -\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mu(x,y) \right).$$

Fie $\mathrm{f}_1, \dots, \mathrm{f}_\mathrm{r}$ $\left(\mathrm{f}_{\mathrm{r}+1} = \exp\left(\frac{\mathrm{g}_{\mathrm{r}+1}}{\mathrm{h}_{\mathrm{r}+1}}\right), \dots, \mathrm{f}_\mathrm{s} = \exp\left(\frac{\mathrm{g}_\mathrm{s}}{\mathrm{h}_\mathrm{s}}\right)\right)$ nişte curbe algebrice invariante ale (factori exponențiali ai) lui (1). Dacă sistemul (1) are integrală primă (factor integrant) de forma

$$F(x,y) = \prod_{j=1}^{s} f_j^{\alpha_j} \qquad \left(\mu(x,y) = \prod_{j=1}^{s} f_j^{\alpha_j}\right), \tag{2}$$

unde $\alpha_j \in \boldsymbol{C}, j = 1, \dots, s,$ $|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_s| \neq 0$, atunci se spune că el este *Darboux integrabil* (privitor la teoria Darboux referitoare la sistemele polinomiale de ecuații diferențiale a se vedea [25]). Darboux [12] a demonstrat că sistemul (1) ce posedă împreună cel puțin $s \geq n(n+1)/2$ curbe algebrice invariante şi factori exponențiali este Darboux integrabil.

Uşor se poate arăta că funcția $F(x,y)$ $\left(\mu(x,y)\right)$ din (2) este pentru sistemul (1) o integrală primă (un factor integrant), dacă şi numai dacă are loc în x şi y identitatea

$$\alpha_1 K_{f_1} + \alpha_2 K_{f_2} + \cdots + \alpha_s K_{f_s} \equiv 0 \tag{3}$$

$$\left(\alpha_1 K_{f_1} + \alpha_2 K_{f_2} + \cdots + \alpha_s K_{f_s} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \equiv 0 \right), \tag{4}$$

unde $K_{f_j}, j = 1,2, \dots, s,$ sunt cofactorii respectivi ai curbelor algebrice invariante $f_j, j = 1, \dots, r,$ şi ai factorilor exponenţiali $f_j, j = r + 1, \dots, s.$

În prezent studiului sistemelor polinomiale cu drepte invariante le sunt dedicate un număr impunător de lucrări ştiinţifice. Astfel, problema estimaţiei numărului de drepte invariante pe care le poate avea un sistem diferenţial polinomial este considerată în [2] unde, în particular, se arată că un sistem cubic ($n = 3$) nedegenerat nu poate avea mai mult de opt drepte invariante afine. Problema coexistenţei dreptelor invariante şi a ciclurilor limită este examinată în {[24]: $n = 2$}, {[15]: $n = 3$}, [14].

Clasificarea sistemelor cubice cu un număr maximal de drepte invariante, enumerându-se şi dreapta de la infinit şi ţinându-se cont de multiplicităţile lor, se găseşte în [16]. Sistemele cubice: cu exact opt şi cu exact şapte drepte invariante distincte afine au fost studiate în [16, 18]; cu drepte invariante de multiplicitate geometrică (paralelă) totală opt (şapte) – în [3-5] ([33]) şi cu şase drepte invariante de două (trei) direcţii – în [20] ([21]).

Familia de sisteme diferenţiale cubice cu infinitul degenerat şi cu drepte invariante de multiplicitate paralelă totală egală cu şase (cinci) a fost investigată în [22,31,32]. În [35] s-a arătat că în clasa sistemelor cubice multiplicitatea algebrică (geometrică) maximală a unei drepte invariante afine (a dreptei de la infinit) este egală cu şapte. În [36] sunt clasificate sistemele cubice cu două drepte invariante reale şi concurente a căror consecutivităţi de multiplicităţi sunt maximale.

În lucrarea de faţă sunt examinate sistemele de forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax^2 + cxy + fy^2 + kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3, \\ \dot{y} = -(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3). \end{cases} \tag{5}$$

În dependenţă de valorile parametrilor sistemului (5) pentru el originea sistemului de cordonate (0,0) este punct singular ori de tipul centru, ori de tipul focar. Acest punct singular are rădăcinile ecuaţiei caracteristice pur imaginare şi este numit *focar slab*. Apare problema determinării acelor condiţii asupra coeficiienţilor lui (5) ce ne asigură existenţa centrului în $(0,0)$. Problema dată se numeşte problema deosebirii centrului de focar sau, pe scurt, *problema centrului*.

Conform [17] sistemul (5) are în originea de coordonate $(0,0)$ centru, dacă şi numai dacă el are într-o vecinătate a lui $(0,0)$ o integrală primă $F(x,y)$ analitică, i.e. $F \in C^{\omega}$. La fel, sistemul (5) are în $(0,0)$ centru, atunci şi numai atunci când el are factor integrant de forma $\mu(x,y) = 1 + \sum \mu_j(x,y), \quad \mu \in C^{\omega}$.

Se poate arăta că există o aşa serie formală $F(x,y) = \sum F_j(x,y)$ încât derivata ei în puterea sistemului (5) reprezintă o combinaţie liniară a polinoamelor $\{(x^2 + y^2)^j\}_{j=2}^{\infty}$, i.e. $\frac{dF}{dt} = \sum_{j=2}^{\infty} L_{j-1}(x^2 + y^2)^j$. Mărimile $L_{j,}\ j = \overline{1,\infty}$, sunt polinoame de coeficienţii sistemului (5) şi se numesc *mărimile Lyapunov*. De exemplu, prima mărime Lyapunov pentru (5) arată astfel

$$L_1 = (-ac + bd + 2bf - cf - 2ag + dg + 3k - 3l + p - q)/4.$$

Sistemul (5) are în originea de coordonate (0,0) centru, dacă şi numai dacă toate mărimile Lyapunov se anulează, adică $L_j = 0, j = \overline{1,\infty}$. În acest caz funcția $F(x, y)$ este o integrală primă a lui (5).

Problema centrului este complet rezolvată pentru sistemul pătratic ($k = l = m = n = p = q = r = s = 0$) [13] şi pentru sistemul cubic simetric în raport cu originea sistemului de coordonate ($a = b = c = d = f = g = 0$) [26]. Pentru alte sisteme diferențiale polinomiale problema dată a fost soluționată doar în unele cazuri particulare (vezi, de exemplu, [7, 23]).

Coexistența dreptelor invariante şi a punctelor singulare de tip centru a fost stuadiată
în [7-11].

În această lucrare se va arăta că pentru sistemele cubice (5) ce au o dreaptă invariantă afină şi reală de multiplicitatea algebrică patru punctul singular (0,0) e de tip centru, dacă şi numai dacă se anulează prima mărime Lyapunov, i.e. $L_1 = 0$.

2. Clasificarea sistemelor cubice cu focar slab şi o dreaptă invariantă afină, reală şi multiplă

Fie (1) un sistem diferențial cubic ($n = 3$) pentru care punctul (x_0, y_0) este singular ($P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$) de tipul focar slab, adică rădăcinile λ_1 şi λ_1 ale ecuației caracteristice $\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$, unde $\sigma = P_x'(x_0, y_0) + Q_y'(x_0, y_0)$ şi $\Delta = P_x'(x_0, y_0)Q_y'(x_0, y_0) - P_y'(x_0, y_0)Q_x'(x_0, y_0)$, sunt pur imaginare, i.e. $\lambda_{1,2} = \beta i, \beta \in \mathbb{R}^*$, $i^2 = -1$. Cu ajutorul translației $x \to x - x_0, y \to y - y_0$, aducem punctul singular în originea sistemului de coordonate apoi, prin aplicarea unei transformări centro-afine de coordonate ($x \to a_1x + b_1y, y \to c_1x + d_1y, a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0$) şi rescalarea timpului ($t \to \omega t, \omega \neq 0$), scriem sistemul (1) sub forma (5). Menționăm, că la rotații ($x \to x\cos\varphi + y\sin\varphi,\ y \to -x\sin\varphi + y\cos\varphi$) şi la omotetii ($x \to \gamma x, y \to \gamma y,\ \gamma \neq 0$) sistemul (5) nu-şi schimbă forma.

Presupunem că (5) are o dreaptă invariantă reală $f = 0$. Cu ajutorul unei transformări de rotație a planului de faze xOy şi a unei omotetii putem face ca dreapta f să fie descrisă de ecuația $x - 1 = 0$. Atunci, în (5) avem $k = -a, m = -1 - c, p = -f, r = 0$, şi deci, sistemul (5) se scrie astfel:

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 - x)(y + ax^2 + (c + 1)xy + fy^2), \\ \dot{y} = -(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3). \end{cases} \tag{6}$$

Notăm

$\sigma(x,y) = E_1(\mathbb{X})/(x-1),\ H_2(y) = \sigma(x,y)|_{x=1}, H_3(y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}\Big|_{x=1}$ şi $H_4(y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}\Big|_{x=1}$,
unde $\mathbb{X}$ este câmpul vectorial asociat sistemului (6).

Lema 1. *Dreapta invariantă* $x-1=0$ *a sistemului (6) are multiplicitatea nu mai mică ca 2, dacă şi numai dacă are loc cel puţin una dintre următoarele patru serii de condiţii*

$$a=0,\ c=-2,\ f=0; \tag{7}$$

$$a=f=l=0,\ n=2-b+c,\ s=-g-1,\ c+2\neq 0; \tag{8}$$

$$a=0,\ l=f, q=(-4+2b-4c+bc-c^2-df+2n+cn)/f,\ s=-g-1; \tag{9}$$

$$l{=}f,\ n=(2a-ab+ac+f+fg+fs)/a,\quad q{=}(2+a^2+c-ad+2g+cg+2s+cs)/a. \tag{10}$$

Demonstraţie. Pentru ca dreapta invariantă $x-1=0$ a sistemului (6) să aibă multiplicitatea nu mai mică ca doi este necesar şi suficient ca $H_2(y)\equiv 0$. Avem $H_2(y) = H_{21}(y)H_{22}(y)$, unde $H_{21}(y) = 1+g+s+dy+qy+(b+n)y^2+ly^3$, şi $H_{22}(y) = 2+a^2+c-ad+2g+cg-aq+2s+cs+4ay-2aby+2acy+2fy+2fgy - 2any+2fsy+4y^2-2by^2 + 4cy^2-bcy^2+c^2y^2+2afy^2+dfy^2-3aly^2 - 2ny^2-cny^2+fqy^2+4fy^3+2cfy^3-4ly^3-2cly^3+f^2y^4-fly^4$. Dacă $H_{21}(y)\equiv 0$, i.e. $l=0,\ n=-b,\ q=-d,\ s=-1-g$, atunci (6) este degenerat, adică $\deg(\gcd(P,Q)) > 0$.

Uşor se verifică, că în cazul sistemului (6), identitatea $H_{22}(y)\equiv 0$, echivalentă cu sistemul de egalităţi

$$(c+2)(1+g+s)+a(a-d-q)=0,$$
$$a(c+2)-a(n+b)+f(1+g+s)=0,$$
$$(c+2)\big(c+2-b-n\big)+f(2a+d+q)-3al=0,$$
$$(c+2)(f-l)=0,$$
$$f(f-l)=0,$$

are loc dacă se verifică cel puţin una dintre seriile de condiţii (7)−(10).

Lema 2. *Dreapta invariantă* $x-1=0$ *a sistemului (6) are multiplicitatea nu mai mică ca 3, dacă şi numai dacă are loc cel puţin una dintre următoarele opt serii de condiţii*

$$a=f=l=0,\ c=-2,\ n=-b,\ s=-1-g; \tag{11}$$

$$a=f=l=0, b=1, d=-q(c+3), g=-2, n=c+1, s=1, q(c+2)\neq 0; \tag{12}$$

$$a=0,\ b=1,\ g=(2d+cd-2f)/f,\ l=f,\quad n=c+1,\ q=-d,\ s=(f-2d-cd)/f,\ c\neq -2; \tag{13}$$

$$b=1, c=-2, f=0, g=ad-2, l=0, n=-1, q=a-d, s=1; \tag{14}$$

$$b=1,\ d=(3+c)(2+g)/a,\ f=0,\ l=0,\quad n=1+c,\ q=(a^2-g-2)/a,\ s=1,\ c\neq -2; \tag{15}$$

$$b{=}1,\ d{=}a(3{+}c)/(2{+}c),\ f{=}0,\ l{=}0,\ n{=}1{+}c,\ q{=}a(1{+}c)/(2+c),\quad s{=}\big(a^2{-}(2{+}c)(1{+}g)\big)/(2+c),\ a^2-(2+c)(2+g)\neq 0; \tag{16}$$

$$d=(b-1)(c+3)/f,\ g=(ab-a-2f)/f,\quad l=f,\ n=c+1,\ q=(1-b+af)/f,\ s=1; \tag{17}$$

$$
\begin{gathered}
a = (b-1)(3-b+c)/f, \;\; q = \big((b-1)(5-b+2c)-df\big)/f, \\
g = ((3-b+c)\big(4-5b+b^2+c-bc+df\big)-2f^2)/f^2, \;\; l=f, \\
n = 1+c, \;\; s = (f^2+(3-b+c)(-3+3b-c+bc-df))/f^2.
\end{gathered} \tag{18}
$$

Demonstrație. În fiecare dintre cazurile (7)−(10) vom rezolva în raport cu y identitatea $H_3(y) \equiv 0$.

Cazul (7). În condițiile (7) $H_3(y)$ are forma $H_3(y) = -H_{21}(y)H_{31}(y)$, unde $H_{31}(y) = 1+g+s-by^2-ny^2-2ly^3$. Deoarece $H_{21}(y) \not\equiv 0$, vom cere ca să aibă loc identitatea $H_{31}(y) \equiv 0$ care ne conduce la seria de condiții (11).

Cazul (8). Polinomul $H_3(y)$ arată astfel: $H_3(y) = (c+2)yH_{32}(y)$, unde $H_{32}(y) =$
$-(g+2)(d+q)+(-2d+bd-4q+bq-cq)y^2+2(b-1)(2+c)y^3$. În acest caz identitatea $H_3(y) \equiv 0$ este echivalentă cu identitatea $H_{32}(y) \equiv 0$ care are loc în fiecare dintre următoarele două seturi de condiții:

a) $b = 1,\; d = -q(c+3),\; g = -2;$

b) $b = 1,\; d = 0,\; q = 0.$

Seria de condiții (8) împreună cu cele din a) ne dau condițiile (12), iar împreună cu b) ne conduce la seria de condiții

$$
a = d = f = l = q = 0,\; b = 1,\; n = 1+c,\; s = -1-g. \tag{19}
$$

Cazul (9). Avem $H_3(y) = \frac{1}{f}y(2+c+fy)\,H_{33}(y)$, unde

$$
\begin{aligned}
H_{33}(y) = &-(c+2)(g+2)(b-1+n-c-1)-2f(g+2)(b-1+n-c-1)y \\
&+[(b-c-3)\big((b-1)(3+c)-df\big)-f^2(g+2) \\
&+(n-c-1)(-10+4b-6c+bc-c^2-df+n-1-c)]y^2 \\
&-2(2+c)f(n-c-1)y^3 - f^2(n-c-1)y^4.
\end{aligned}
$$

Identitatea $H_{33}(y) \equiv 0$ are loc dacă se verifică cel puțin una dintre următoarele trei seturi de condiții:

$$
\begin{gathered}
a)\;\; b=1,\;\; g=\frac{2d+cd-2f}{f},\;\; n=c+1; \\
b)\;\; d=\frac{(b-1)(c+3)}{f},\;\; g=-2,\;\; n=c+1; \\
c)\;\; b=c+3,\;\; g=-2,\;\; n=c+1.
\end{gathered}
$$

Adăugând la ele (9), obținem respectiv (13) şi seriile de condiții:

$$
a=0,\;\; d=\frac{(b-1)(c+3)}{f},\;\; g=-2,\;\; l=f, n=c+1,\;\; q=\frac{1-b}{f},\;\; s=1; \tag{20}
$$

$$
a=0, b=c+3, g=-2, l=f, n=c+1, q=\frac{(c+2)^2-df}{f}, s=1. \tag{21}
$$

Cazul (10). În acest caz $H_3(y) = (a+2y+cy+fy^2)H_{34}(y)/a^2$, unde

$$
\begin{aligned}
H_{34}(y) = &-a\Big((2+g)\big((3+c)(2+g)-ad\big)+(s-1)\big((4+c)(2+g)+a^2-ad+ \\
&s-1\big)\Big)+a\big[2a\big(ad+(b-c-4)(1+g+s)\big)-2f(2+g)(1+g+s)\big]y+ \\
&\big[a(b-1)\big(3a^2+(2+c)(1+g+s)\big)+f\big((g+2)(g+2-3a^2-ad)+
\end{aligned}
$$

$(s-1)(s-1+2(g+2)-2a^2-ad)\big)+a(2+c)\big(ad-(c+3)(1+g+s)\big)\big]y^2+$
$2a(2+c)\big(a(b-1)-f(s+g+1)\big)y^3+af\big(a(b-1)-f(s+g+1)\big)y^4.$

Identitatea $H_{34}(y)\equiv 0$ are loc dacă:

$a)$ $b=1, c=-2, f=0, g=ad-2, s=1;$

$b)$ $b=1, d=(c+3)(g+2)/a, f=0, s=1;$

$c)$ $b=1, d=a(c+3)/(c+2), f=0, s=(a^2-(c+2)(g+1))/(c+2);$

$d)$ $d=(b-1)(c+3)/f, g=(a(b-1)-2f)/f, s=1;$

$e)$ $a=(b-1)(3-b+c)/f, s=\big((3-b+c)\big((-1+b)(3+c)-df\big)+f^2\big)/f^2,$

$g=(-2f^2+(3-b+c)\big((b-1)(-4+b-c)+df\big)/f^2.$

Egalitățile $a)-e)$, împreună cu cele din (10), ne conduc la condițiile (14)-(18), respectiv.

Menționăm, că seria de condiții (19) (respectiv (20); (21)) se conține în seria de condiții (16) (respectiv, (17); (18)).

Lema 3. *Dreapta invariantă $x-1=0$ a sistemului (6) are multiplicitatea nu mai mică decât 4, dacă şi numai dacă are loc cel puțin una dintre următoarele trei serii de condiții*

$$a=f=l=0, b=2, c=g=n=-2, s=1; \tag{22}$$

$$a=d=0, b=1, c=g=-2, l=f, n=-1, q=0, s=1; \tag{23}$$

$$\begin{gathered} a=\frac{(b-1)^2}{f},\ c=2b-4,\ d=\frac{2(b-1)^2}{f},\ g=\frac{(b-2)(b-1)^2-2f^2}{f^2}, \\ l=f,\ n=2b-3,\ q=\frac{(b-1)^2}{f},\ s=\frac{(b-1)^2+f^2}{f^2}. \end{gathered} \tag{24}$$

Demonstrație. Vom cere ca în fiecare dintre seriile de condiții (11)-(18) să aibă loc în raport cu y identitatea $H_4(y)\equiv 0$.

Condițiile (11). În aceste condiții $H_4(y)$ arată astfel: $H_4(y)=(d+q)yH_{41}(y)$, unde $H_{41}(y)=2+g+(2-b)y^2$. Dacă $d+q=0$, atunci sistemul {(6), (11)} este degenerat, iar dacă $H_{41}(y)\equiv 0$, obținem seria de condiții (22).

Condițiile (12). În cazul dat $H_4(y)=-(c+2)^2y(q+y+2qy^2)$. Evident, $H_4(y)\not\equiv 0$. Prin urmare, dreapta invariantă $x=1$ nu poate avea multiplicitatea algebrică mai mare ca trei.

Condițiile (13). Polinomul $H_4(y)$ are forma: $H_4(y)=(c+2+fy)\big((c+2)^2d^2+2(c+2)d^2fy+f\big((c+2)(3d+cd-f)+d^2f\big)y^2+2(c+2)df^2y^3+df^3y^4\big)/f^2.$ Uşor se observă, că $H_4(y)\not\equiv 0$.

Condițiile (14). Avem $H_4(y)=a^2(-2+d^2+3dy)\equiv 0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow \deg(\gcd(P,Q))>0.$

Condițiile (15). În aceste condiții $H_4(y)=-(a+2y+cy)(2a^2-(g+2)(4+c+g)+a\big(c+2-3(g+2)\big)y-2(c+2)(g+2)y^2/a\not\equiv 0.$

Condițiile (16). Avem

$$H_4(y) = (c+2)\big((g+2)^2 + \big((g+2)(c+3) - c - 2\big)y^2\big) +$$
$$\frac{a}{2+c}(-4a - 3ac - ag - acg + 16y - 2a^2y + 12cy - 2a^2cy + 2c^2y + 12gy$$
$$+ 10cgy + 2c^2gy + 4ay^2 - ac^2y^2) + 2a(c+2)y^3 \not\equiv 0.$$

Condițiile (17). Polinomul $H_4(y)$ arată astfel: $H_4(y) = \frac{1}{f^2}(a + 2y + cy + fy^2)H_{42}(y)$, unde $H_{42}(y) = (b-1)(-a + ab + 2f + cf) - 2af^2 + f\big((b-1)(3a+2f) - f(c+2)\big)y - (b-1)(-5 + b - 2c)fy^2 + (b-1)f^2y^3$. Deoarece $f \neq 0$, identitatea $H_{42}(y) \equiv 0$ are loc atunci şi numai atunci când au loc egalitățile $a = 0, b = 1, c = -2$, care, împreună cu (17), ne dau (23).

Condițiile (18). Polinomul $H_4(y)$ are forma: $H_4(y) = (3 - \mathrm{b} + \mathrm{c} + \mathrm{f}\,\mathrm{y})H_{43}(\mathrm{y})/f^4$, unde

$H_{43}(y) = f\alpha(b + \beta - 1)\Big(f\alpha\beta + (b-1)\big((b-1)(b-2) + f\alpha - 3\beta + b\beta\big)\Big) - (b-1)^2\beta(f^2 + (b-2)(b + \beta - 1)) + 2f[f\alpha(b + \beta - 1)\big(f\alpha + (b-1)(2b + \beta - 3)\big) - (b-1)\beta(f^2 + (b-1)(b + \beta - 1))]y + f^2[f\alpha\big((b-1)(6b-7) + f\alpha - 5\beta + 6b\beta + \beta^2\big) - \beta(f^2 + (b-1)(b + \beta))]y^2 + 2f^4\alpha[2(b-1) + \beta]y^3 + f^5\alpha y^4$,

unde $\alpha = d - (b-1)(c+2)f$, $\beta = c - 2b + 4$. În cazul dat identitatea $H_4(y) \equiv 0$ este echivalentă cu identitatea $H_{43}(y) \equiv 0$, care are loc dacă $\alpha = \beta = 0$, adică $c = 2b - 4, d = 2(b-1)^2/f$. Aceste egalități, împreună cu (18), ne dau seria de condiții (24). □

Lema 4. *În clasa sistemelor cubice cu focar slab multiplicitatea maximală a unei drepte invariante reale nu este mai mare ca 4. Cu exactitatea unei transformări centro-afine şi rescalarea timpului orice sistem cubic cu focar slab şi cu o dreaptă invariantă de multiplicitatea 4 poate fi scris sub una dintre urmpătoarele 3 forme*:

$$\dot{x} = (x-1)^2y,\ \ \dot{y} = -x + 2x^2 - dxy - 2y^2 - x^3 - qx^2y + 2xy^2,\quad d \neq 0; \tag{25}$$
$$\dot{x} = (x-1)y(x - fy - 1),\ \ \dot{y} = -x + 2x^2 - y^2 - x^3 + xy^2 - fy^3,\ \ f \neq 0; \tag{26}$$
$$\begin{aligned} &\dot{x}=-(x-1)\big((b-1)^2x^2+(2b-3)fxy+fy(1+fy)\big)/f,\\ &\dot{y}=-((b-1)^2x^2(b+2+x)+(b-1)^2fx(2+x)y+f^3y^3\\ &\qquad+f^2((x-1)^2x+(b-3x+2bx)y^2))/f^2,\quad f(b-1)\neq 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Demonstrație. În condițiile (22) (respectiv, (23); (24)) sistemul (6) capătă forma (25) (respectiv, (26); (27)). Pentru fiecare dintre aceste sisteme polinomul $E_1(\mathbb{X})$ arată astfel: $E_1(\mathbb{X}) = (x-1)^4\big(A_0(y) + A_1(y)(x-1)\big)$. În cazul (25) avem $A_0(y) = -y(d + q + (d + 2q)y^2 - 2y^3)$; în cazul (26): $A_0(y) = -f^2y^4$, iar în cazul (27):

$$\begin{aligned} A_0(y) = (1 - b - fy)(&(b-1)^2(8b - 5b^2 + b^3 - 3f^2 + bf^2 - 4)\\ &+(b-1)f(12b - 11b^2 + 3b^3 - 5f^2 + 3bf^2 - 4)y\\ &+3(b-1)f^2((b-1)^2 + f^2)y^2 + f^3((b-1)^2 + f^2)y^3)/f^4. \end{aligned}$$

În toate cazurile $A_0(y) \not\equiv 0$.

3. Integrabilitatea sistemelor (25), (26) şi (27)

Sistemul (25). Acest sistem are dreapta invariantă $f_1 \equiv x - 1 = 0$ şi factorii exponențiali $f_2 = \exp[1/(x-1)]$, $f_3 = \exp[(\mathrm{d} + \mathrm{q} + 2\mathrm{y} - 2\mathrm{xy})/(x-1)^2]$, $f_4 = \exp[(-d - 4q + 3dx + 6qx + 6y - 6xy)/(x-1)^3]$, care au respectiv cofactorii $K_{f_1}(x,y) = y(x-1), K_{f_2}(x,y) = -y, K_{f_3}(x,y) = 2(-x + dy + qy + x^2 + qxy - y^2)$, $K_{f_4}(x,y) = 6(x + qy)$. Pentru (25) prima mărime Lyapunov arată astfel: $L_1 = -2q$. Dacă $q \neq 0$, atunci $(0,0)$ este focar şi sistemul (25) nu este integrabil în $(0,0)$, adică nu există o aşa vecinătate a lui $(0,0)$ în care (25) ar avea integrală primă analitică (factor integrant analitic) ce nu depinde de t, i.e. de forma $F(x,y)(\mu(x,y))$. În cazul $q = 0$ din (4) aflăm $\alpha_1 = -6, \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \alpha_4 = d/6$, adică

$$\mu(x,y) = \frac{1}{(x-1)^6} \exp\left[\frac{\mathrm{d}\,(-\mathrm{d} + 3\,\mathrm{d}\,\mathrm{x} + 6\,\mathrm{y} - 6\,\mathrm{x}\,\mathrm{y})}{6\ (\mathrm{x}-1)^6}\right]$$

este factor integrant pentru $\{(25), q = 0\}$, şi, prin urmare, în cazul dat punctul singular $(0,0)$ este centru pentru (25).

Sistemul (26). Avem dreapta invariantă $f_1 \equiv x - 1 = 0$, factorii exponențiali

$$f_2 = exp\left[\frac{y}{x-1}\right], f_3 = \exp\left[\frac{y^2}{(x-1)^2}\right], f_4 = \exp\left[\frac{2 - 3x + x^3 + fx^3}{(x-1)^3}\right]$$

şi cofactorii

$$K_{f_1}(x,y) = y(x - fy - 1), K_{f_2}(x,y) = -x(x-1),$$
$$K_{f_3}(x,y) = -2xy, K_{f_4}(x,y) = -3y(1 + fy).$$

Pentru aceşti cofactori identitatea (3) are loc dacă $\alpha_1 = 6, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 3, \alpha_4 = -2$. Aşa dar, sistemul are integrala primă

$$F(x,y) = (x-1)^6 \exp\left[\frac{4 - 6x + 2x^3 + 3y^2 - 3xy^2 + 2fy^3}{(1-x)^3}\right]$$

şi deci, în $(0,0)$ avem centru.

Sistemul (27). Sistemul dat are dreapta invariantă $f_1 \equiv x - 1 = 0$, factorii exponențiali

$$f_2 = \exp\left[\frac{-1 + b + fy}{f(-1+x)}\right], f_3 = \exp\left[\frac{1 - 2b + b^2 + 2bfy - 2fxy + f^2y^2}{(-1+x)^2}\right],$$

$$f_4 = \exp\left[\frac{1}{3(x-1)^3} \cdot (3\mathrm{x} - 3\mathrm{b}^2\mathrm{x} - 6\mathrm{f}^2\mathrm{x} - 12\mathrm{bx}^2 + 12\mathrm{b}^2\mathrm{x}^2 + 12\mathrm{f}^2\mathrm{x}^2 - \mathrm{x}^3 + 6\mathrm{bx}^3 - 3\mathrm{b}^2\mathrm{x}^3 - 2\mathrm{b}^3\mathrm{x}^3 - 6\mathrm{f}^2\mathrm{x}^3 - 3\mathrm{fy} + 3\mathrm{bfy} - 3\mathrm{fx}^2 + 9\mathrm{bfx}^2\mathrm{y} - 6\mathrm{b}^2\mathrm{fx}^2\mathrm{y} + 6\mathrm{f}^2\mathrm{xy}^2 - 6\mathrm{bf}^2\mathrm{xy}^2 - 2\mathrm{f}^3\mathrm{y}^3)\right],$$

cofactorii

$$K_{f_1}(x,y) = -\frac{fy+(b-1)^2x^2+(2b-3)fxy+f^2y^2}{f},$$

$$K_{f_2}(x,y) = \frac{f^2x+fy-(b-1)^2x^2-f^2x^2-bfy}{f^2},$$

$$K_{f_3}(x,y) = \frac{2(-bf^2x+(b-1)^2(fy+x^2)+f^2x^2-f((b-1)^2+f^2)xy)}{f},$$

$$K_{f_4}(x,y) = \frac{1}{f}((b-1)f^2x + f(b^2+2f^2-1)y$$
$$+((b-1)^2+f^2)((b-1)x(2bx-x+4fy)+2f^2y^2))$$

şi integrala primă $F(x,y) = f_1^{\alpha_1}f_2^{\alpha_2}f_3^{\alpha_3}f_4^{\alpha_4}$, unde $\alpha_1 = 2((b-1)^2+f^2)$, $\alpha_2 = f(b+1), \alpha_3 = \alpha_4 = 1$.

Din cele expuse mai sus rezultă următoarea teoremă.

Teorema 1. *Pentru ca punctul singular* $(0,0)$ *al sistemului diferențial cubic* (5) *ce are o dreaptă invariantă reală de multiplicitatea algebrică patru să fie de tip centru este necesar şi suficient ca să se anuleze prima mărime Lyapunov* ($L_1 = 0$).

Bibliografie

1. Amelkin V.V., Lukashevich N.A., Sadovskii A.P. Non-linear oscillations in the systems of second order. Belorusian University Press. Belarus. 1982 (în rusă).
2. Artes J., Grünbaum B., Llibre J. On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems. Pacific J. of Math. 184(1998), No. 2, pp. 207-230.
3. Bujac C. One subfamily of cubic systems with invariant lines of total multiplicity eight and with two distinct real infinite singularities. Bul. Acad. Ştiințe Repub. Mold., Mat., 2015, No. 1(77), pp. 48-86.
4. Bujac C., Vulpe N. Cubic systems with invariant straight lines of total multiplicity eight and with three distinct infinite singularities. Qual. Theory Dyn. Syst. 14(2015), No. 1, pp. 109-137.
5. Bujac C., Vulpe N. Cubic systems with invariant lines of total multiplicity eight and with four distinct infinite singularities, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 423(2015), No. 2, pp. 1025-1080.
6. Christopher C., Llibre J., Pereira J.V. Multiplicity of invariant algebraic curves in polynomial vector fields. Pacific J. of Math., 229(2007), No. 1, pp. 63-117.
7. Cozma D. Integrability of cubic systems with invariant straight lines and invariant conics. Ştiința, Chişinău, 2013, 240 p.
8. Cozma D., Şubă A. Conditions of center for some cubic systems with three linear particular integrals. Scripta Scientiarum Mathematicarum. Tomus 1, Fasciculus 1. Chişinău, 1997. pp. 82-94.

9. Cozma D., Şubă A. The solution of the problem of center for cubic differential systems with four invariant straight lines. An. Ştiinţ. Univ. „Al. I. Cuza” (Iaşi). 44(1998), suppl., pp. 517-530.
10. Cozma D., Şubă A. Solution of the problem of the centre for a cubic differential system with three invariant straight lines. Qualitative Theory of Dynamical Systems. Universitat de Lleida. Spaine. 2(2001), no. 1. pp. 129-143.
11. Cozma D., Şubă A. Solution of the problem of the centre for cubic differential system with three invariant straight lines in generic position. Qualitative Theory of Dynamical Systems. Universitat de Lleida. Spaine. 6(2005). pp. 45-58.
12. Darboux G. Memoiare sur les équations differentielles algébriques du premier ordre et du premier degré. Bull. Sci. Math. 1878, pp. 60-96, pp. 124-144, pp. 152-200.
13. Dulac H. Détermination et intégration d’une certaine classe d’équations différentielles ayant pour point singulier un centre. Bull. Sciences Math. 32(1908). pp. 230-252.
14. Guangjian Suo, Jifang Sun. The $n-$degree differential system with $(n-1)(n+1)/2$ straight line solutions has no limit cycles. Proc. of Ordinary Differential Equations and Control Theory, Wuhan. 1987. pp. 216-220 (în chineză).
15. Kooij R. Cubic systems with four line invariants, including complex conjugated lines. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 118(1995), no. 1. pp. 7-19.
16. Llibre J., Vulpe N. Planar cubic polynomial differential systems with the maximum number of invariant straight lines. Rocky Mountain J. Math., 36(2006), no. 4, pp. 1301-1373.
17. Lyapunov A.M. The general problem of the stability of motion. Gostekhizdat, Moscow, 1950 (în rusă).
18. Lyubimova R.A. About one differential equation with invariant straight lines. Differential and integral equations, Gorky Universitet. 8(1984), pp. 66-69; 1(1997), pp. 19-22 (în rusă).
19. Mironenko V. I. Linear dependence of functions along solutions of differential equations. Beloruss. Gos. Univ., Minsk, 1981 (în rusă).
20. Puţuntică V., Şubă A. The cubic differential system with six real invariant straight lines along two directions. Studia Universitatis. 2008, No. 8(13), pp. 5-16.
21. Puţuntică V., Şubă A. The cubic differential system with six real invariant straight lines along three directions. Bulletin of ASRM. Mathematics. 2009, No. 2(60), pp. 111-130.
22. Repeşco V. Cubic systems with degenerate infinity and straight lines of total parallel multiplicity six. ROMAI J., 9(2013), no. 1, pp. 133-146.
23. Romanovski V.G., Shafer D.S. The center and cyclicity problems: a computational algebra approach. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 2009.

24. Rychkov G.S. The limit cycles of the equation $u(x+1)du = (-x + ax^2 + bxu + cu + du^2)dx$. Differentsial'nye Uravneniya. 8(1972), no. 12. pp. 2257-2259.
25. Schlomiuk D. Elementary first integrals and algebraic invariant curves of differential equations. Expositiones Mathematicae, 11(1993). pp. 433-454.
26. Sibirski C. The number of limit cycles in the neighborhood of a singular point. Diff. Uravneniya 1(1965), no. 1. pp. 51-66 (în rusă).
27. Şubă A. Solution of the problem of the center for cubic systems with a bundle of three invariant straight lines. Buletinul Academiei de Ştiințe a Rep. Moldova, Matematica, 2003, no. 1(41). pp. 91-101.
28. Şubă A., Cozma D. Solution of the problem of the center for cubic systems with two homogeneous and one non-homogeneous invariant straight lines. Buletinul Academiei de Ştiințe a Rep. Moldova, Matematica, 1999, no.1(29). pp. 37-44.
29. Şubă A., Cozma D. Solution of the problem of the centre for cubic differential system with three invariant straight lines two of which are parallel. Buletinul Academiei de Ştiințe a Rep. Moldova, Matematica, 2001, no. 2(36). pp. 75-86.
30. Şubă A., Cozma D. Solution of the problem of the center for cubic differential system with three invariant straight lines in generic position. Qual. Th. of Dyn. Systems. 6(2005). pp. 45-58.
31. Şubă A., Repeşco V. Configurations of invariant straight lines of cubic differential systems with degenerate infinity. Scientific Bulletin of Chernivtsi University, Series „Mathematics”. 2(2012), no. 2-3. pp. 177-182.
32. Şubă A., Repeşco V. Cubic systems with degenerate infinity and invariant straight lines of total parallel multiplicity five. Buletinul Academiei de Ştiințe a Rep. Moldova, Matematica, 2016, no. 3(82). pp. 38-56.
33. Şubă A., Repeşco V., Puțuntică V. Cubic systems with seven invariant straight lines of configuration (3,3,1). Buletinul Academiei de Ştiințe a Rep. Moldova, Matematica, 2012, no. 2(69). pp. 81-98.
34. Şubă A., Repeşco V., Puțuntică V. Cubic systems with invariant affine straight lines of total parallel multiplicity seven. Electron. J. Diff. Equ., vol. 2013 (2013), no. 274. pp. 1-22. http://ejde.math.txstate.edu/
35. Şubă A., Vacaraş O. Cubic differential systems with an invariant straight line of maximal multiplicity. Annals of the University of Craiova. Mathematics and Computer Science Series, 42(2015), no. 2. pp. 427-449.
36. Vacaraş O. Cubic differential systems with two affine real non-parallel invariant straight lines of maximal multiplicity. Bul. Acad. Ştiințe a Repub. Mold., Mat., 2015, no. 3(79). pp. 79–101.

ABORDĂRI PRIVIND ATENUAREA DEZASTRELOR PRIN UTILIZAREA REȚELELOR PETRI IERARHICE

Inga ȚIȚCHIEV, conf. univ., dr.
Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. Scopul principal al articolului este axat pe efectuarea cercetărilor teoretice cu aplicabilitate practică care vor contribui la creşterea nivelului de influenţă a ştiinţei informatice în societatea modernă, la consolidarea rolului și importanței cetățeanului ca participant activ și beneficiar principal al transformărilor legate de realizările de ultimă oră în domeniul tehnologiei informației și comunicațiilor, la edificarea societății bazate pe cunoaștere și la sporirea securității societății.
Cuvinte cheie: dezastru, atenuarea dezastrelor, modelare, rețele Petri ierarhice.

DISASTER MITIGATION APPROACHES USING HIERARCHICAL PETRI NETS

Abstract. The main goal of the article is to perform theoretical research with practical applicability that will contribute to increasing the influence of the computer science in the modern society, to strengthen the role and importance of the citizen as an active participant and the main beneficiary of the transformations related to the latest achievements in the field of information and communication technology, building a knowledge-based society and enhancing society's security.
Keywords: disaster, disaster mitigation, modeling, hierarchical Petri nets.

Introducere

Această cercetare este orientată spre adaptarea instrumentelor utilizate în modelarea consecințelor situațiilor extreme (calamități naturale, catastrofe tehnogene etc.) și orientate spre asigurarea securității cetățeanului.

Dezvoltarea tehnologiilor informaționale, a rețelelor de calculatoare și mijloacelor de comunicare a contribuit la generarea cu un tempou foarte rapid a instrumentelor ce pot fi aplicate la prelucrări complexe și dificil de realizat.

Proprietățile și caracteristicile dezastrelor [7] determină necesitatea practică de a studia varietatea de proprietăți, relații, interacțiuni, interdependențele diverșilor factori și cauzele acestor procese periculoase pentru a obține o abordare de sistem unitară. Astfel se definesc obiectivele de gestionare și control al situației prin prevenirea în timp util și/sau reducerea la minimum a consecințelor nedorite ale acestora.

După cum a fost menționat și mai sus în ultimul timp omenirea se confruntă din ce în ce mai mult cu dezastre [9] de diferită natură, ceea ce poate duce în cele din urmă la noi accidente și catastrofe. Pentru a analiza și a atenua consecințele acestora, a fost propus formalismul rețelelor Petri de nivel înalt (rețele Petri ierarhice).

Formalismul rețelelor Petri [6] permite de a reprezenta grafic intuitiv sistemele modelate și, de asemenea, oferă posibilitatea analizei proprietăților dinamice ale acestora. Unul dintre cele mai importante lucruri este faptul că un model al unui sistem să funcționeze corect, trebuie determinate în principal proprietățile *calitative* (sau comportamentale). Un alt aspect important este îndeplinirea anumitor caracteristici de performanță (sau proprietăți *cantitative*) asociate.

Materiale și metode aplicate

Dezastrele naturale, catastrofele tehnogene sau dezastrele provocate de oameni pot apărea zilnic. În timpul acestora oamenii își expun viața la impactul periculos al mediului și al factorilor economici. Astfel, problema evacuării cu succes a persoanelor din clădiri este una reală și actuală.

Rețelele Petri [1] permit verificarea corectitudinii sistemului modelat la faza de proiectare. Se va examina problema evacuării persoanelor în timp util din clădirile cu mai multe etaje.

În [8] au fost analizate și modelate scenariile de evacuare a persoanelor din încăperi cu un etaj, iar în Figura 1 este ilustrată trecerea de la planul de evacuare la reprezentarea prin rețele Petri a acestuia. Dar în cele mai multe cazuri persoanele lucrează în clădiri cu mai multe etaje.

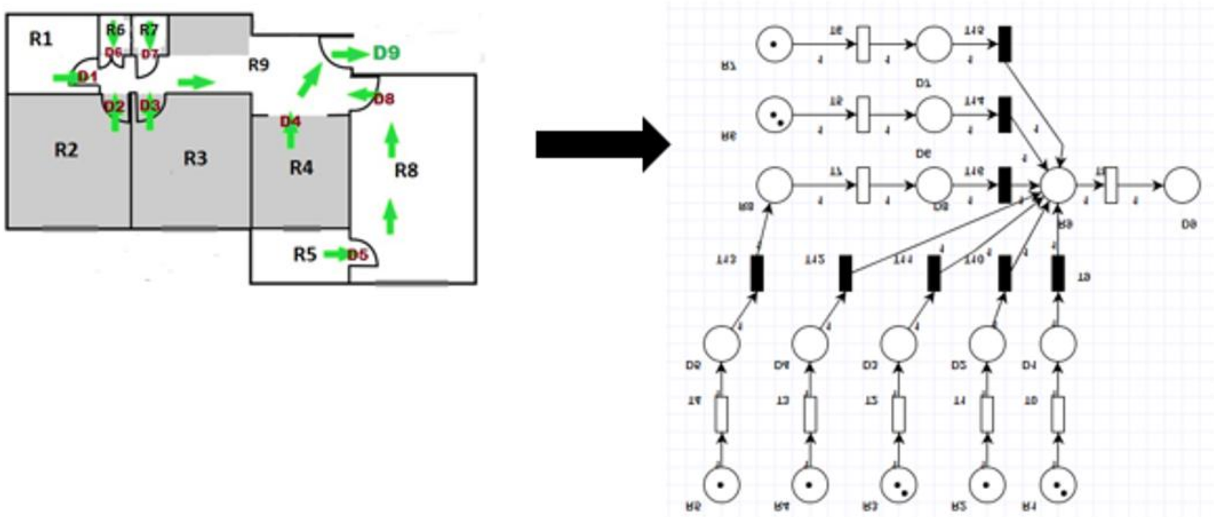


Figura 1. Trecerea de la planul de evacuare la reprezentarea prin rețele Petri

Problema evacuării din acestea este o problemă foarte complicată și complexă. Pentru a rezolva această problemă, propunem utilizarea rețelelor Petri de nivel înalt (HLPN). Rețelele Petri de nivel înalt [2, 3] oferă un cadru potrivit pentru proiectarea, specificarea, validarea și verificarea sistemelor complexe cu evenimente discrete. Acestea suportă definirea datelor și a funcționalităților, astfel pot fi utilizate structuri de date complexe pentru a reprezenta punctele (în cazul dat persoanele) și expresii algebrice ca formule de gardă pentru tranziții (acțiunile care au loc în sistem).

Crearea rețelelor mari, complexe poate fi o sarcină grea. Dar, similar cu programarea modulară, construcția rețelelor complexe poate fi divizată în componente mai mici și se pot utiliza facilitățile oferite de diferite instrumente pentru crearea așa numitor tranziții de substituție.

În rețelele Petri ierarhice [4] o tranziție poate reprezenta o întreagă rețea, astfel încât rețeaua care conține tranziția se execută ca și cum logica pe care o reprezintă tranziția fizic reprezentă o structură unitară independentă. O astfel de tranziție se numește *o tranziție de substituție.*

Conceptual, rețelele cu tranziții de substituție sunt rețele cu mai multe nivele de detaliu – la prima etapă o rețea simplificată, care oferă o imagine de ansamblu asupra sistemelor modelate prin înlocuirea tranzițiilor acestei rețele de nivel superior cu pagini mai detaliate, pot fi aduse tot mai multe detalii modelului.

Relațiile dintre rețelele ordinare și HLPN:

- Dintr-o rețea ierarhică, este ușor de construit o rețea ordinară (clasică) echivalentă și vice versa.
- rețea ierarhică și o rețea non - ierarhică echivalentă au exact aceeași mulțime de marcări, pași și secvențe de apariție ale tranzițiilor.
- rețea ierarhică și o rețea echivalentă non-ierarhică sunt comportamental echivalente.
- Analiza computerizată cu mai multe instrumente software a demonstrat aproape același timp de execuție atât pentru o rețea ierarhică, cât și pentru o rețea non-ierarhică echivalentă.

Atuurile rețelelor Petri ierarhice:

1. Rețele Petri de nivel înalt au o reprezentare grafică intuitivă și o semantică bine definită care fără ambiguități definește comportamentul fiecărei HLPN rețele.
2. Rețele Petri de nivel înalt sunt foarte generale și pot fi folosite pentru a descrie o mare varietate de sisteme diferite.
3. HLPN-urile au primitive foarte puține, dar puternice, o descriere explicită atât a scărilor cât și a acțiunilor.
4. Rețele Petri de nivel înalt sunt stabile față de modificări minore aduse sistemului modelat.
5. Rețele Petri de nivel înalt posedă metode formale de analiză ale proprietăților rețelelor.
6. Cele mai importante două metode de analiză cunoscute sunt arborii de acoperire și tehnica invarianților. Există instrumente care suportă construirea, simularea și analiza formală a acestora.

Definiție 1.*O rețea Petri de nivel înalt* este o structură $HLPN = (P; T; D; Type; Pre; Post; M_0)$ unde

• P este o mulțime finită de elemente numite *locații*.

• T este o mulțime finită de elemente numite *tranziții* ($P \cap T = \varnothing$;).

• D este o mulțime finită nevidă de domenii nevide, unde fiecare element al lui D este un *tip*.

• *Type*: $P \cup T \rightarrow D$ este o funcție folosită pentru a atribui tipuri locațiilor și pentru a determina modurile tranzițiilor.

• *Pre; Post*: TRANS $\rightarrow$ µPLACE sunt pre și post mulțimile date de

$$TRANS = \{(t; m) \mid t \in T; m \in Type\ (t)\}$$

$$PLACE = \{(p; g) \mid p \in P; g \in Type\ (g)\}$$

• $M_0 \in \mu PLACE$ este un multiset numit *marcarea inițială a rețelei*.

O *marcare* a HLPN este un multiset, $M \in \mu PLACE$.

O tranziție este posibilă relativ la o marcare oarecare sau în mod tranziție (ca tranziție de substituție). În mod tranziție de substituție se alocă valori variabilelor tranziției, care satisfac condiția asociată acesteia (adică, condiția de tranziție este adevărată). Variabilele tranziției sunt toate acele variabile care apar în expresiile asociate tranziției. Acestea sunt condițiile și adnotările arcurilor care implică producerea tranziției.

Un multiset finit de moduri de tranziție, $T \in \mu TRANS$, este posibil la marcarea M ddaca $Pre\ (T\mu) \leq M$.

O secvență de tranziții se poate produce ducând la o nouă marcare M' dată de $M' = M - Pre\ (T\mu) + Post\ (T\mu)$.

În orice clădire, pe fiecare etaj se poate găsi planul de evacuare al acesteia, în aceste planuri vom nota odăile, ușile ca în [1], clădirile cu mai multe etaje modelate prin rețele Petri pot fi organizate în ierarhii de rețele ca în Figura 2. Aceasta dă naștere unor rețele ierarhice. Deși acestea sunt echivalente cu rețele ordinare, pot facilita gestionarea unor astfel de modele la scară largă.

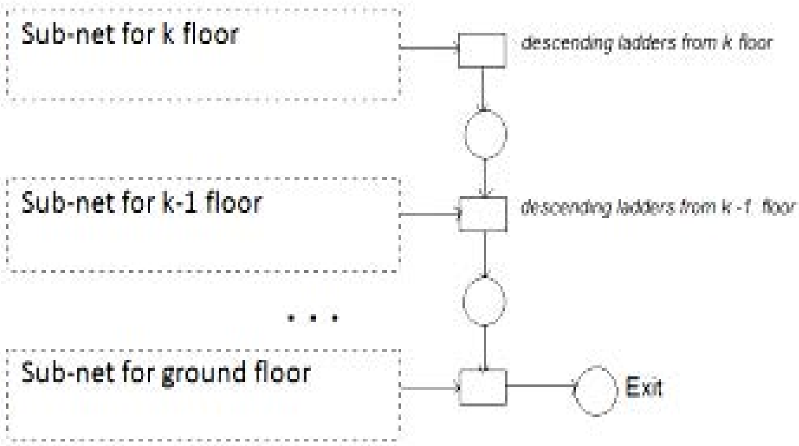


Figura 2. HLPN-ua pentru sistemul de evacuare cu mai multe etaje.

Însă pentru a modela și pentru a obține rezultate cât mai exacte trebuie de specificat în rețelele care reprezintă etajele *restricțiile adiționale*, care vor permite calcularea timpului de evacuare. De asemenea pentru a putea modela cât mai natural procesul de evacuare a persoanelor pe scări, care se diferențiază prin faptul că odată ajunși la acestea se formează un flux de persoane care staționează și pentru evacuarea cu succes trebuie de luat în calcul *regulile de evacuare* prezentate mai jos, care vor asigura deplasarea liberă fără restricții a persoanelor.

Restricții adiționale

- Densitatea populației în odăi, $Nmax = l * w * 6.5$, l este lungimea odăii, w este lățimea odăii. Densitatea maximală = 6.5 persoane/$m2$
- Funcția de transfer, $D_i = \frac{N_i}{(l_i+w_i)}$ din odaia *i*, N_i – numărul de persoane din odaia i.
- Rata de flux $r_i = \frac{\sum r_{i-1}*w_{i-1}}{w_i}$, din odaia i este dependentă de rata de flux din odăile anterioare (prin care s-a trecut r_{i-1}).

Reguli de evacuare

Pentru evacuarea cu succes a persoanelor din încăperi trebuie luate în considerație următoarele reguli:

- $(t_{j(r+1)} - t_{jr})c_{jr}$ numărul de persoane sosite la ieșire spre scara de la etajul j, $j = 1,..,N$, N numărul de etaje, t_{jr} timpul de evacuare de la etajul j, c_{jr} capacitatea de evacuare de pe etajul j.
- Densitatea maximală a fluxului de persoane care se evacuează nu trebuie să întreacă numărul maximal de persoane care se pot evacua fără restricții D_{max}.
- Contribuția fiecărui etaj j la densitatea fluxului staționar la momentul inițial (zero de timp):

$$H_{jr} = h_j + t_{jr} * v \text{ înălțimea etajului, } D_{jr} = \frac{c_{jr}}{w*v},$$

unde H_{jr} înălțimea etajului, v este viteza de evacuare, w este lățimea scărilor de evacuare.

$$w_{max} = \frac{\max\{D_j\}}{D_{max}}, \text{ lățimea maximală a scărilor,}$$

unde D_j este densitatea fluxului de pe etajul j.

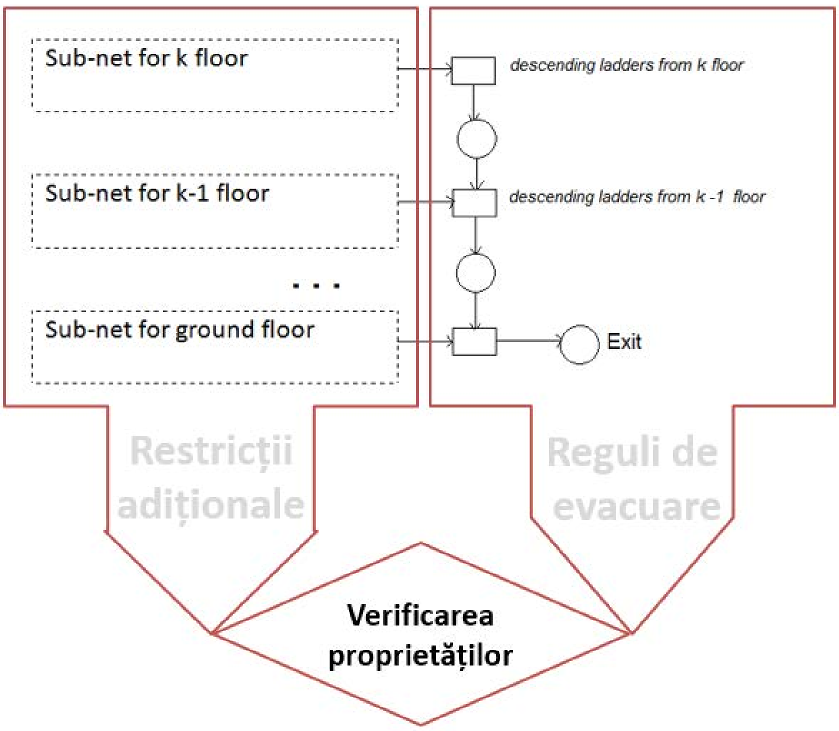


Figura 3. Aplicarea restricțiilor adiționale și a regulilor de evacuare.

În modul tranziție pentru sistemul de evacuare din clădirile cu mai multe etaje se atribuie valori variabilelor tranziției, astfel încât asupra rețelelor modulare care reprezintă etajele se aplică restricțiile adiționale, iar asupra căilor de evacuare (scărilor) se aplică regulile de evacuare. Prin aplicarea acestor specificații se pot determina proprietățile sistemului respectiv astfel încât să putem determina atât timpul de evacuare al acestora, cât și lățimea optimală a căilor de evacuare care va asigura evacuarea fără impedimente a persoanelor din clădirile cu mai multe etaje.

Concluzii

Pentru problema diminuării consecințelor dezastrelor, a fost propusă metodă rețelelor Petri de nivel înalt. Acestea permit modelarea și simularea sistemului care reprezintă evacuarea de urgență a persoanelor în caz de dezastru din clădiri cu mai multe etaje. Prin această metodă este posibilă atât modelarea unor astfel de sisteme mari într-un mod ușor cât și gestionarea modulară a acestora.

Prin HLPNs este posibilă modelarea sistemelor mari într-un mod ușor de gestionat și modular. În special, se poate rezolva problema determinării structurii și mărimii căilor de evacuare a fluxurilor umane, asigurând evacuarea fără impediment a persoanelor.

Bibliografie

1. Cojocaru S., Petic M., Titchiev I. Adapting Tools for Text Monitoring and for Scenario Analysis Related to the Field of Social Disasters. In: the proceedings of The 18th International Conference on Computer Science and Electrical Engineering (ICCSEE 2016), October 6-7, Prague, Czech Republic, 2016. pp. 886-892.
2. He X., Murata T. High-Level Petri Nets Extensions. Analysis, and Applications. Electrical Engineering Handbook (ed. Wai-Kai Chen). Elsevier Academic Press, 2005. pp. 459-476. http://nuczu.edu.ua/sciencearchive/ProblemsOfFireSafety/vol35
3. Jensen K. An Introduction to High-level Petri Nets. Proceedings of the 1985 International Symposium on Circuits and Systems: Kyoto 85. Kyoto, Japan, 1985. pp. 723-726.
4. Jensen K., Rozenberg G. High-level Petri Nets: Theory and Applications. Springer-Verlag Eds. London, UK, 1991. pp. 724.
5. Komyak V., Danilin A. Approaches to the simulation of the motion of human flows in the building and their comparison. In: Proceedings of the Problems of fire safety. Edition 35, 2014. pp. 110-115.
6. Peterson J. L. Petri Net Theory and The Modeling of Systems. Prentice Hall, 1981.
7. Takashi M., Yoshifumi N., Yasuhiro F. and Atsushi M. Development of Tsunami refuge PETRI-NET simulation system utilizable in independence disaster prevention organization. The 14th World Conference on Earthquake Engineering, October 12-17, Beijing, China, 2008.

8. Titchiev I. Modelling and verification of evacuation system using Time Petri nets in case of disaster. In: Proceedings of the 18-th International Conference System Analysis and Information Technology (SAIT 2016), May 30 June 2, Kyiv, Ukraine, 2016. pp. 46-47.
9. Tsujihara O., Terada K., and Sawada T. Development of simulation system of spreading reoccurring simultaneously in many places in an earthquake using Petri-net. In: Journal of Applied Computing in Civil Engineering 14:11, 2005. pp. 129-136.

APLICAREA METODEI CELOR MAI MICI PĂTRATE LA STUDIEREA CORELAȚIEI DINTRE FACTORII CLIMATERICI ÎN REPUBLICA MOLDOVA

Alina ȚURCANU, dr.
Universitatea Tehnică a Moldovei

Rezumat. Lucrarea prezintă modele matematice liniare și neliniare ce estimează evoluția proceselor sau fenomenelor pe baza unor parametri care definesc procesele şi fenomenele în vederea realizării de calcule şi aproximări ale datelor experimentale. Dispunând de o serie de date privind factorii climaterici, se prezintă analiza rezultatelor dintr-o perioadă de 126 ani, abordând metoda celor mai mici pătrate.
Cuvinte cheie: metoda celor mai mici pătrate, ecuația de regresie.

APPLYING THE METHOD OF LEAST SQUARES TO THE STUDY OF CORRELATION BETWEEN CLIMATE FACTORS IN THE REPUBLIC OF MOLDOVA

Abstract. The paper presents linear and nonlinear mathematical models that estimate the evolution of processes or phenomena based on parameters that define processes and phenomena in order to achieve calculations and approximations of experimental data. Featuring a series of climatic factors data, it is presented a 126-year analysis of the results, approaching the method of least squares.
Keywors: the method of least squares, the regression equation.

1. Introducere

Metoda celor mai mici pătrate (MCMMP) este folosita pentru a rezolva cu aproximare sisteme liniare și neliniare în care numărul de ecuații este mai mare decât numărul de necunoscute. MCMMP este folosită des în calcule statistice, în special in analiza de regresie.

MCMMP poate fi interpretată ca metodă de potrivire a datelor. Cea mai bună potrivire în sensul celor mai mici pătrate este acel model pentru care suma pătratelor valorilor reziduale este minimă, o valoare reziduala fiind diferența dintre o valoare bazată pe observație si o valoare dată de un model. MCMMP corespunde criteriului de risc maxim dacă erorile experimentale au o repartiție normală şi, totodată, poate fi interpretată ca metodă de estimare a momentelor.

Metoda celor mai mici pătrate îşi are originile pe tărâmul astronomiei şi geodeziei, în încercarea oamenilor de ştiinţă şi a matematicienilor de a oferi soluții de navigație pe oceane în timpul erei marilor descoperiri geografice. Descrierea precisă a comportamentului corpurilor cereşti a fost cheia ce a deschis calea navigației pe oceane, unde marinarii nu mai aveau posibilitatea de a se ghida după poziția uscatului. MCMMP reprezintă punctul culminant al unor cercetări ce au avut loc în secolul XVIII.

Metoda a fost descrisă pentru prima data de Carl Friedrich Gauss în jurul anului 1794. Matematicianul a pus bazele metodei celor mai mici pătrate în 1795, la vârsta de 18 ani. O primă demonstrație a puterii metodei lui Gauss a apărut când a fost folosită la prezicerea poziției viitoare a nou-descoperitului asteroid Ceres. Pe 1 ianuarie 1801, astronomul Giuseppe Piazzi a descoperit asteroidul Ceres și a reuşit sa-i urmărească traiectoria timp de 40 de zile, înainte de a-l pierde în strălucirea soarelui. Bazându-se pe aceste date, s-a dorit aflarea poziției lui Ceres după ce va apărea din spatele soarelui, fără a rezolva complicatele ecuații neliniare ale lui Kepler privind mişcarea planetelor. Singurele predicții care i-au permis astronomului maghiar Franz Xaver von Zach să determine cu succes poziția lui Ceres au fost cele realizate de Gauss, folosind analiza MCMMP.

Gauss a publicat metoda abia în 1809, în volumul doi al operei sale pe tema mecanicii cereşti, *„Theoria Motus Corporum Coelestium in sectionibus conicis solem ambientium”*. In 1829, Gauss a putut să afirme că apropierea dintre metoda celor mai mici pătrate şi analiza de regresie este optimă în sensul că, într-un model liniar în care erorile sunt necorelate, au media zero şi dispersii egale, cele mai bune estimări liniare nedeplasate ale coeficienților sunt estimările bazate pe MCMMP. Rezultatul este cunoscut drept Teorema Gauss-Markov.

În continuare, ne vom referi la situația regresiei liniare (relația dintre cele două variabile poate fi descrisă printr-o dreaptă în cadrul norului de puncte), parabolice și cubice. Regresia se leagă foarte mult de conceptul de corelație. Dacă am avea o corelație perfectă, estimarea ar fi extrem de precisă.

Republica Moldova este vulnerabilă la un şir de riscuri naturale cu impact mare asupra economiei şi societății. Acestea includ: eroziunile şi alunecările de teren, vânturile şi ploile puternice, secetele îndelungate, inundațiile devastatoare şi multe altele. Fiind o țară agrară, Moldova este afectată pe tot parcursul anului de diferite fenomene climatice de risc, care diminuează adesea puternic producția agricolă. De exemplu, uraganele puternice, seceta excesivă şi inundațiile vaste din vara anului 1994 au provocat numeroase jertfe omeneşti (47 de persoane) şi pagube materiale economiei naționale, estimate oficial la peste două miliarde lei moldoveneşti.

Scopul lucrării a fost de a prezenta cantitatea anuală a precipitațiilor în funcție de temperatura medie anuală a aerului. Pentru realizarea lui s-au folosit date statistice de la Serviciul Hidrometeorologic de Stat din Moldova.

2. Aproximarea prin metoda celor mai mici pătrate

Considerăm funcția reală $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, pentru care sunt cunoscute valorile $y_i = f(x_i)$ în $(n+1)$ puncte distincte x_i, $i = \overline{o,n}$, din intervalul $[a,b]$, adică perechile de valori

$$(x_o, y_o);\ (x_1\ y_1);\ (x_2\ y_2);\ \ldots;\ (x_n\ y_n). \qquad (1)$$

În cazul general, punctele pot fi oarecare, dar ele sunt, de regulă, echidistante, cu pasul de discretizare h:

$$x_o = a,\ x_n = b,\ x_{i+1} - x_i = h = \frac{b-a}{n}\ ,\ \ i = \overline{o, n-1}. \qquad (2)$$

Se cere să se determine polinomul P_m, $\ grad\ P_m = m < n,$ de forma

$$P_m(x) = \ c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_m x^m,\ \ \forall x \in [a,b], \qquad (3)$$

care să aproximeze funcția f, astfel încît să fie minimizată suma pătratelor diferențelor dintre valorile aproximate și cele exacte în cele $(n+1)$ puncte. Altfel spus, trebuie rezolvată următoarea problemă de optimizare:

$$\hat{P}_m \ = \left\{P_m \mid \min_{c_0 \cdots c_n} J,\ \ J = \sum_{i=0}^{n} [P_m\ (x_i)\ \text{-} y_i]^2\right\}. \qquad (4)$$

Metoda de calcul rezultată se numește **metoda celor mai mici pătrate (MCMMP)** și se utilizează atunci când fie perechile (1) nu sunt cunoscute cu exactitate, fie n este foarte mare.

Aproximarea funcției f cunoscute sub forma setului de valori (1) printr-un polinom de forma (3) prin MCMMP este numită în general și **regresie polinomială,** cu particularizările larg utilizate **regresie liniară** ($m = 1$), **regresie parabolică** ($m = 2$) și **regresie cubică** ($m = 3$). Aproximarea prin MCMMP poate fi aplicată însă și altor funcții de aproximare g, diferite de cele polinomiale.

2.1. ***Aproximarea polinomială liniară (m=1) prin MCMMP***

Algoritmul MCMMP ([1,2]) se bazează pe condiția că suma pătratelor diferențelor Δy_i sa fie minima, unde

$$\Delta y_i = y_i - f(c_0,\ c_1,\ x_i), \qquad (5)$$

$$S = \sum_i (\Delta y_i)^2 = min. \qquad (6)$$

Indicele fiecărei sume ia valori întregi în intervalul [1, n], n = numărul de valori x_i, respectiv y_i. Această metodă va fi aplicată după testarea nivelului erorilor și eliminarea erorilor grosolane.

Dependența funcțională se caută sub forma $y = c_0 + c_1 x$.

Pentru calculul lui c_0 și c_1 avem următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} nc_0 + c_1 \sum X = \sum Y \\ c_0 \sum X + c_1 \sum X^2 = \sum XY, \end{cases} \qquad (7)$$

unde: n este numărul de cazuri cercetate; y este rezultatul estimat; c_0 este interceptul (locul pe ordonata unde dreapta de regresie se intersectează cu OY, valoarea lui y pentru $x = 0$); c_1 este panta de regresie (ne arată cu cât se modifică y atunci când x crește (scade) cu o unitate; x este variabilă criteriu (cunoscută).

Calcularea coeficienților de regresie c_0, respectiv c_1, conduce la realizarea primului pas din procesul regresiei.

Prin intermediul regresiei se pot face predicții ale unei variabile, în funcție de valoarea alteia. Predicția este procesul de estimare a valorii unei variabile cunoscând valoarea unei alte variabile.

2.2. ***Aproximarea polinomială parabolică (m=2) prin MCMMP***

Funcția polinomială de aproximare parabolică, numită și regresie parabolică, se caută sub forma $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$.

Funcția J care trebuie minimizată, privită ca *funcție de variabilele*c_0, c_1, *și* c_2:

$$J = \sum_{i=0}^{n} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 - y_i)^2. \qquad (8)$$

Pentru minimizarea funcției convexe J este suficient să fie anulate derivatele sale parțiale, astfel obținând următorul sistem liniar de ecuații:

$$\begin{cases} (n+1)c_0 + c_1 \sum X + c_2 \sum X^2 = \sum Y \\ c_0 \sum X + c_1 \sum X^2 + c_3 \sum X^3 = \sum XY \\ c_0 \sum X^2 + c_1 \sum X^3 + c_3 \sum X^4 = \sum X^2 Y\,. \end{cases} \qquad (9)$$

2.3. ***Aproximarea polinomială cubică (m=3) prin MCMMP***

Funcția polinomială de aproximare cubică, numită și regresie cubică, se caută sub forma $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$. Funcția J care trebuie minimizată, privită ca *funcție de variabilele*c_0, c_1, c_2 *și* c_3:

$$J = \sum_{i=0}^{n} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 - y_i)^2. \qquad (10)$$

Ca și în cazul aproximării polinomiale parabolice, pentru determinarea coeficienților c_0, c_1, c_2 și c_3 este necesar de următorul sistem liniar de ecuații:

$$\begin{cases} (n+1)c_0 + c_1 \sum X + c_2 \sum X^2 + c_3 \sum X^3 = = \sum Y \\ c_0 \sum X + c_1 \sum X^2 + c_2 \sum X^3 + c_3 \sum X^4 = \sum XY \\ c_0 \sum X^2 + c_1 \sum X^3 + c_2 \sum X^4 + c_3 \sum X^5 = \sum X^2 Y \\ c_0 \sum X^3 + c_1 \sum X^4 + c_2 \sum X^5 + c_3 \sum X^6 = \sum X^3 Y\,. \end{cases} \qquad (12)$$

3. Metoda celor mai mici pătrate la studierea corelației dintre temperatura medie anuală a aerului şi cantitatea anuală de precipitații

În acest paragraf, vom studia corelația dintre cantitatea anuală de precipitații şi anul calendaristic. Includem în tabelul de mai jos datele luate de la Serviciul Hidrometeorologic de Stat, precum şi variabilele ajutătoare necesare studiului ([3,4]):
X = Temperatura medie anuală a aerului; Y = cantitatea anuală de precipitații, mm.

n	Anul	X	Y		n	Anul	X	Y		n	Anul	X	Y
1	1891	9	430		43	1933	7,2	460		85	1975	9,8	500
2	1892	9,1	400		44	1934	9,9	520		86	1976	8,3	600
3	1893	10	440		45	1935	9,2	520		87	1977	9,5	470
4	1894	8,5	460		46	1936	10,3	520		88	1978	8,7	550
5	1895	9,8	450		47	1937	10	430		89	1979	9,7	680
6	1896	9,4	300		48	1938	10,2	330		90	1980	8,3	710
7	1897	9,8	560		49	1939	10,1	435		91	1981	9,7	560
8	1898	9,8	380		50	1940	9,5	520		92	1982	9,8	400
9	1899	9,7	520		51	1941	9,5	520		93	1983	10,5	565
10	1900	10,2	510		52	1942	9,5	520		94	1984	9,2	660
11	1901	9,7	500		53	1943	9,5	520		95	1985	8	600
12	1902	8,6	380		54	1944	9,2	350		96	1986	9,5	410
13	1903	9,9	510		55	1945	8,6	440		97	1987	8,2	600
14	1904	9	515		56	1946	10	530		98	1988	9	650
15	1905	9,7	520		57	1947	9,2	720		99	1989	10,9	500
16	1906	9,9	610		58	1948	9,3	620		100	1990	11,3	380
17	1907	8,4	520		59	1949	9,8	530		101	1991	9,5	680
18	1908	8,9	420		60	1950	10,2	400		102	1992	10,1	430
19	1909	9,2	525		61	1951	10,8	350		103	1993	9,5	520
20	1910	10,2	600		62	1952	10	600		104	1994	11,3	430
21	1911	9,4	530		63	1953	9,1	400		105	1995	10	700
22	1912	8,2	910		64	1954	8,8	560		106	1996	9,2	710
23	1913	9,5	440		65	1955	9,4	710		107	1997	9,5	610
24	1914	8,3	900		66	1956	8,4	500		108	1998	10,2	660
25	1915	9,5	520		67	1957	10,1	420		109	1999	11	500
26	1916	9,9	500		68	1958	10	590		110	2000	11,2	450
27	1917	10	515		69	1959	9,5	510		111	2001	10,4	610
28	1918	9,5	520		70	1960	10,6	520		112	2002	10,8	600
29	1919	8,9	520		71	1961	10,5	470		113	2003	9,8	470
30	1920	9,5	523		72	1962	10,1	560		114	2004	10,3	600
31	1921	9,3	430		73	1963	9,2	550		115	2005	10,5	638
32	1922	8,8	720		74	1964	9,3	510		116	2006	10,2	564
33	1923	10,2	530		75	1965	9	550		117	2007	12,1	480
34	1924	9	370		76	1966	10,9	770		118	2008	11,3	466
35	1925	10,5	440		77	1967	10	500		119	2009	11,4	446
36	1926	9,5	620		78	1968	10	520		120	2010	10,6	734
37	1927	9,7	520		79	1969	8,7	515		121	2011	10,5	428
38	1928	9	490		80	1970	10,1	680		122	2012	11,2	522
39	1929	8	400		81	1971	10	600		123	2013	11,1	531
40	1930	10,7	520		82	1972	9,8	610		124	2014	10,9	604
41	1931	8,8	520		83	1973	9,5	400		125	2015	12	431
42	1932	9	780		84	1974	10,9	550		126	2016	11,2	644
										Suma		**1226,1**	**66891**

$n = 126$
$\sum X =$ **1226,1**
$\sum Y =$ **66891**
$\sum X^2 =$ **12024,57**
$\sum X^3 =$ **118837,13**
$\sum X^4 =$ **1183397,67**
$\sum X^5 =$ **11873169,96**
$\sum X^6 =$ **120011837,19**
$\sum XY =$ **649270**
$\sum X^2 Y =$ **6351479,99**
$\sum X^3 Y =$ **62612444,32**

3.1 Metoda celor mai mici pătrate polinomială liniară (m=1)

Dependența funcțională se caută sub forma $y = c_0 + c_1 x$. Sistemul (7) se va scrie:

$$\begin{cases} 126\,c_0 + 1226{,}1 c_1 = 66891 \\ 1226{,}1 c_0 + 12024{,}6 c_1 = 649270.3, \end{cases}$$

$c_0 = 701{,}95$, iar $c_1 = -17{,}58$.

Ecuația de regresie obținută este:

$$y = 701{,}95 - 7{,}58\,x. \qquad (13)$$

Avem următoarele predicții: pentru temperatura medie anuală a aerului de 11 grade, vom avea cantitatea anuală de precipitații de 508,57 mm.

3. 2 Metoda celor mai mici pătrate polinomială parabolică (m=2)

Funcția polinomială de aproximare parabolică, numită și regresie parabolică, se caută sub forma $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$. Sistemul (9) se va scrie:

$$\begin{cases} 126 c_0 + 1226{,}10\, c_1 + 12024{,}57\, c_2 = 66891{,}00 \\ 1226{,}10 c_0 + 12024{,}57\, c_1 + 118837{,}13\, c_2 = 649270{,}30 \\ 12024{,}57 c_0 + 118837{,}13\, c_1 + 1183397{,}67\, c_2 = 6351479{,}99. \end{cases}$$

Soluția sistemului: $c_0 = 687{,}35$, $c_1 = -14{,}57$, iar $c_2 = -0{,}15$. Regresia parabolică:

$$y = 687{,}35 - 14{,}57x - 0{,}15x^2. \qquad (14)$$

Respectiv, putem face următoarele predicții: pentru temperatura medie anuală a aerului de 11 grade, vom avea cantitatea anuală de precipitații de 483,38 mm.

3.3. *Metoda celor mai mici pătrate polinomială cubică (m=3)*

Funcția polinomială de aproximare cubică (regresie cubică) are forma:

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3.$$

Sistemul (12) se va scrie:

$$\begin{cases} 126 c_0 + 1226{,}10\, c_1 + 12024{,}57\, c_2 + 118837{,}13 c_3 = 66891{,}00 \\ 1226{,}10 c_0 + 12024{,}57\, c_1 + 118837{,}13\, c_2 + 1183397{,}67 c_3 = 649270{,}30 \\ 12024{,}57 c_0 + 118837{,}13\, c_1 + 1183397{,}67\, c_2 + 11873169{,}96 c_3 = 6351479{,}99 \\ 118837{,}13 c_0 + 1183397{,}67\, c_1 + 11873169{,}96\, c_2 + 120011837{,}2 c_3 = 62612444{,}32. \end{cases}$$

Soluția sistemului este $c_0 = 2450{,}21$, $c_1 = -566{,}86$, iar $c_2 = 57{,}03$, iar $c_3 = -1{,}96$.

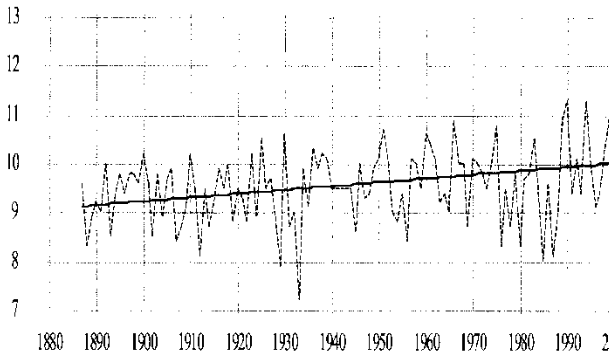
Regresia cubică este:

$$y = 2450{,}21 - 566{,}86x + 57{,}03x^2 - 1{,}96x^3. \qquad (15)$$

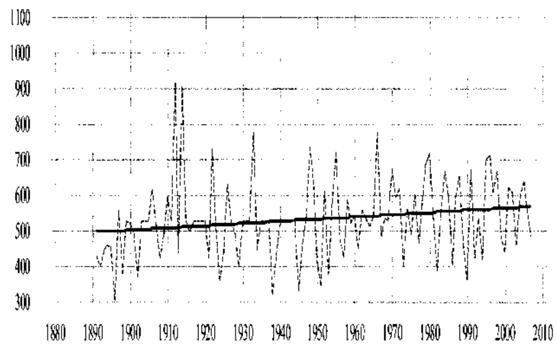
Respectiv, putem face următoarele predicții: pentru temperatura medie anuală a aerului de 11 grade, vom avea cantitatea anuală de precipitații de 510,5 mm.

Ca și în cazul aproximării polinomiale parabolice, pentru determinarea coeficienților c_0, c_1, c_2 și c_3 este necesar de următorul sistem liniar de ecuații:

Anexa 1. Temperatura medie anuală a aerului în oraşul Chişinău.



Anexa 2. Cantitatea anuală a precipitaţiilor în oraşul Chişinău.



6. Concluzii

Unul din principalele capitole ale statisticii are în vedere posibilitatea de a face predicţii. Deşi nu se găsesc relaţii perfecte în lumea reală, prin intermediul regresiei se pot face prognoze ale unei variabile, în funcţie de valoarea alteia.

Evident, rezultatele din lucrarea de faţă nu au un caracter determinist, deoarece temperatura medie anuală a aerului şi cantitatea anuală a precipitaţiilor mai depind şi de mulţi alţi factori, care nu pot fi luaţi în consideraţie, de exemplu, de poluarea accelerată a atmosferei, de managementul apelor, tehnologiile de utilizare a terenurilor etc.

Încălzirea globală a climei este considerată nu numai cel mai mare risc meteo-climatic, dar şi cel mai mare risc de mediu, ale cărei consecinţe negative se răsfrâng asupra tuturor geosferelor Terrei.

Numărul mare al investigaţiilor din ultimele decenii, atât în sfera fizică cât şi în cea biologică, şi interacţiunea lor cu schimbările climaterice la nivel regional şi naţional au dat posibilitate de a efectua o evaluare mai largă şi mai fermă a interacţiunilor dintre încălzirea observată şi consecinţele ei.

Principala concluzie este că asupra multor ecosisteme naturale şi artificiale influenţează schimbarea regională a climei, îndeosebi creşterea temperaturii şi intensificarea fenomenelor naturale de risc.

Schimbarea temperaturii şi cantităţii de precipitaţii va duce la modificarea perioadelor de vegetaţie, regimului higrologic al râurilor, la eroziunea solului, inundaţii, secete şi ploi torenţiale extrem de puternice.

Anume făcând anumite predicţii, putem să ne dăm seama de gravitatea situaţiei în care ne putem afla într-un moment, pentru a avea posibilitate de a preveni unele fapte şi întâmplări, care sunt catastrofale uneori, dacă nu sunt luate măsurile necesare la momentul potrivit.

Bibliografie

1. Piscunov N. S. Calculul diferenţial şi integral. Vol. 1. Chişinău: Ed. Lumina, 1992.
2. Ciumac P. ş.a. Teoria probabilităţilor şi elemente de statistică matematică. Chişinău: Editura „Tehnica” UTM, 2003.
3. Научно прикладной справочник по климату СССР (Молдавская СССР), серия 3. Многолетние данные. Часть 1-6. Выпуск II. Ленинград: Гидрометеоздат, 1990.
4. http://www.meteo.md.