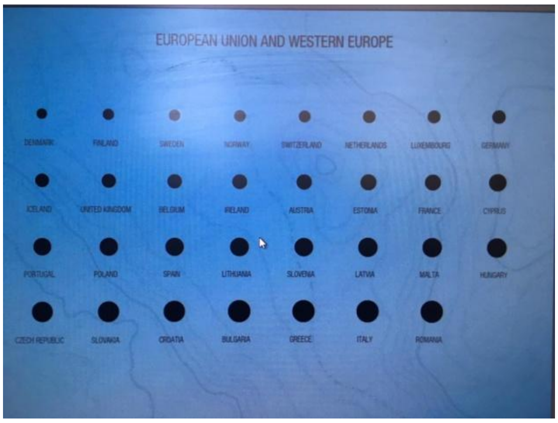
STRATEGII DE DEZVOLTARE A CAPACITĂȚILOR DE APLICARE A ALGORITMILOR ÎN REZOLVAREA PROBLEMELOR CU LA MODULUL „RAPOARTE ȘI PROPORȚII”

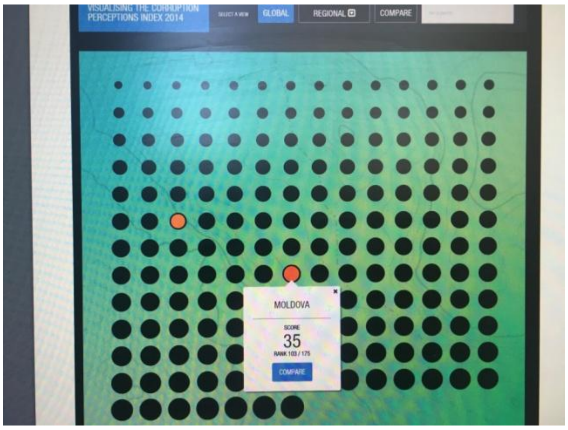
POPOVICI-BUJOR Violeta, doctorandă UST, profesor IPLT „Mircea Eliade”

Rezumat. În acest articol, s-a demonstrat posibilitatea reconcilierii dintre gândirea euristică și cea algoritmică. Din punct de vedere al eficienței sociale, tocmai în această reconciliere constă forma supremă a inteligenței umane, tocmai aici se află sursa principală a trecerii la o nouă calitate. Este vorba de folosirea gândirii euristice în scopul obținerii unor algoritmi noi, cu alte cuvinte capacitatea de a crea noi surse de gândire de mare productivitate. Un algoritm nou se referă la probleme pentru a căror rezolvare nu se cunoaște nici un algoritm, fie la probleme pentru care algoritmii cunoscuți erau prea complicați.

Idealul educaţional al şcolii din Republica Moldova constă în formarea personalităţii cu spirit de iniţiativă, capabile de autodezvoltare, care posedă nu numai un sistem de cunoştinţe şi competenţe necesare pentru angajare pe piaţa muncii, dar şi independenţă de opinie şi acţiune, fiind deschisă pentru dialog intercultural în contextul valorilor naţionale şi universale asumate.

Cu părere de rău, rezultatele PISA din ultimii ani din Republica Moldova, nu arată cea mai bună situație. În urma rezultatelor, putem afirma că aproximativ 50 % dintre copiii de 15 ani din Republică, sunt analfabeţi funcționali.





Analfabetismul funcțional se referă la capacitatea redusă a unei persoane de a transpune în viața de zi cu zi informațiile dobândite pe durata școlarizării. În principiu, analfabetismul funcțional implică un set de competențe limitate, care se traduc în capacitatea redusă a celui care învață să ia decizii, în mod autonom, bazate pe abilitățile dobândite în diferitele etape ale formării sale educaționale. Mai mult, analfabetismul funcțional este perceput și ca o oportunitate ratată de învățare și dobândire a competențelor necesare dezvoltării în societatea actuală.

Pentru a reduce rata analfabetismului, este obligatoriu ca profesorul să dezvolte gândirea logică, pentru ca elevul să fie capabil: să realizeze conexiuni logice, să extragă idei principale, să exprime un punct de vedere (competența de a citi și înțelege un text scris); să transpună informația abstractă în activități zilnice (alfabetizare matematică); să înțeleagă fenomenele din natură și de a lua decizii pe date factuale (alfabetizare științifică).

Principiul corelației dintre teorie si practică subliniază faptul că tot ceea ce se însușește în activitatea didactică trebuie valorificat in activitățile ulterioare, fie că acestea sunt activități de învățare sau activități materiale. În cazul matematicii școlare, latura practică este considerată a fi alcătuită din **algoritmi** ce se obțin în urma unei **teorii prezentate**, **din seturi de exerciții si probleme, etc.** Elevul la alcătuirea algoritmului matematic, va recurge la un algoritm pe care îl cunoaște și știe cum poate fi rezolvat.

Este indicat să se sublinieze aplicații ale matematicii în viața curentă (calcule, măsuri, dobânzi, ecuații, etc.).

De exemplu, **în clasa a VI-a**, elevii încep să studieze despre „rapoarte si proporții”. Această temă presupune multe aplicații practice. Mărimile direct si invers proporționale sunt întâlnite și ele în situații variate. Astfel, se pot rezolva multe exerciții și probleme care modelează situații cotidiene. Elevii au folosit deja hărți la istorie, geografie, au văzut în manualul și atlasul de biologie, imagini realizate cu ajutorul microscopului electronic. Putem defini scara de realizare a unei hărți ca fiind raportul dintre unitatea de distanță de pe hartă si distanța corespunzătoare în realitate. Ca aplicații practice, putem propune: calcularea distanței minime dintre două orașe având la dispoziție o hartă rutieră, citirea și realizarea planului unui apartament (sunt activități pe care, în mod sigur, le vor efectua la un moment dat).

În **clasa a VII-a – VIII-a**, rapoartele si proporțiile sunt formate cu lungimi de segmente. Trebuie subliniate aici aplicații ale teoremei lui Thales și ale reciprocei sale: determinarea înălțimii unui copac, turn (se poate aminti modul în care Thales calcula înălțimea unei piramide folosind un băț); împărțirea unui segment intr-un raport număr rațional dat; găsirea lungimii unui segment; demonstrarea paralelismului unor drepte. Reprezentarea datelor prin grafice (cu bare) și elementele de organizarea datelor predate în clasa a VI-a, se continuă in clasa următoare folosind tabele, diagrame si grafice pentru reprezentarea anumitor dependențe funcționale. Elevii au întâlnit deja astfel de reprezentări la alte materii (istorie, geografie, biologie, fizică).

Pentru a rezolva problemele din cotidian, elevii trebuie să fie familiarizați cu următoarele definiții și proprietăți:

Definiție: egalitatea a două rapoarte se numește ***proporție***. Termenii celor două rapoarte se numesc termenii proporției. Orice proporție are patru termeni. Forma generală a unei proporții este $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $a,b,c,d\in\mathbb{Q}, b\neq 0, d\neq 0$. Termenii a și d se numesc extremii proporției. Termenii b și c se numesc mezii proporției.

Proprietatea fundamentală a proporțiilor: Într-o proporție, produsul extremilor este egal cu produsul mezilor.

Fiind date patru numere raționale pozitive a,b,c,d care sunt termeni ai unei proporții $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, putem forma noi proporții folosind următoarele **algoritmi**:

1. **Proporții derivate cu aceiași termeni:**

1.1 *Algoritm*: schimbarea extremilor între ei.

Din proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, aplicând algoritmul de mai sus obținem proporția $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$.

1.2 *Algoritm:* schimbarea miezilor între ei.

Din proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, aplicând algoritmul de mai sus obținem proporția $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

1.3 *Algoritm:* inversarea fiecărui raport.

Din proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, aplicând algoritmul de mai sus obținem proporția $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$.

2. **Proporții derivate cu aceiași termeni:**

2.1 *Algoritm*: dacă amplificăm unul din rapoartele unei proporţii cu un număr, diferit de zero, obţinem o proporţie cu alţi termeni.

Avem $a\cdot d=b\cdot c$. Înmulțim ambii membri ai egalității cu numărul n, obținem $adn=bcn$, de unde rezultă $\frac{a}{b}=\frac{cn}{dn}$ sau $\frac{an}{bn}=\frac{c}{d}$. Aplicând acest algoritm, se poate ovține o infinitatea de proporții cu alți termeni decât cei ai proporției inițiale.

2.2 *Algoritm*: dacă simplificăm unul din rapoartele unei proporţii cu un număr, diferit de zero, obţinem o proporţie cu alţi termeni.

2.3 *Algoritm*: dacă înmulţim ambii numărători (sau ambii numitori) ai unei proporţii cu un număr, diferit de zero, obţinem tot o proporţie, dar cu alţi termeni.

2.4 *Algoritm*: dacă împărţim ambii numărători (sau ambii numitori) ai unei proporţii cu un număr, diferit de zero, obţinem tot o proporţie, dar cu alţi termeni.

Cu ajutorul regulilor de mai sus, se pot obține o infinitate de proporții derivate cu alți termeni decât ai proporției inițiale.

Proprietate. Fiind dată proporţia $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, din ea se pot deduce următoarele proporţii derivate cu alţi termeni:

P_1: $\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$. Fie proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, avem $a\cdot d=b\cdot c$, conform proprietății fundamentale a proporțiilor. Adunând la ambii membri produsul ac, rezultă $ad+$

$ac = bc + ac$, de unde scoțând factor comun, $a(d + c) = c(b + a)$. Împărțind ambii membri cu $(b + a)(d + c)$ avem $\frac{a(d+c)}{(b+a)(d+c)} = \frac{c(b+a)}{(b+a)(d+c)}$, adică $\frac{a}{b+a} = \frac{c}{d+c}$.

P_2: $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$. Se demonstrează asemănător, adunând produsul bd în ambii membri ai egalității $ad = bc$. Avem $ad + bd = bc + bd$, scoatem factor comun $d(a + b) = b(c + d)$, iar după înmulțirea ambilor membri cu $\frac{1}{bd}$, obținem $\frac{d(a+b)}{bd} = \frac{b(c+d)}{bd}$, adică $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

P_3: $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ $(a - b \neq 0,\ c - d \neq 0)$. Se demonstrează asemănător celorlalte. Se scad din ac ambii membri ai egalității $ad = bc$, rezultă $ac - ad = ac - bc$, scoțând factor comun obținem $a(c - d) = c(a - b)$. Împărțind ambii membri cu $(c - d)(a - b)$, avem $\frac{a(c-d)}{(c-d)(a-b)} = \frac{c(a-b)}{(c-d)(a-b)}$, adică $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$.

P_4 : $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$. Se demonstrează scăzând produsul bd din ambii membri ai egalității $ad = bc$, rezultă $ad - bd = bc - bd$, scoțând factor comun avem $d(a - b) = b(c - d)$, iar după împărțirea ambilor membri cu bd, avem $\frac{d(a-b)}{bd} = \frac{b(c-d)}{bd}$, adică $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.

P_5 : $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ $(a - b \neq 0,\ c - d \neq 0)$. Se demonstrează împărțind membru cu membru egalitățile de la P_2 și P_4, adică: $\frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b}} = \frac{\frac{c+d}{d}}{\frac{c-d}{d}}$, care se poate scrie $\frac{a+b}{b} \cdot \frac{b}{a-b} = \frac{c+d}{d} \cdot \frac{d}{c-d}$, adică $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$.

P_6 : $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c-d}$ $(a + b \neq 0, c + d \neq 0)$. Se demonstrează inversând rapoartele în proporția de la P_5.

P_7 :$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$ $(c + d \neq 0, c - d \neq 0)$. Se demonstrează schimbând mezii între ei în proporția de la P_5.

În continuare, problema nr. 1 poate fi rezolvată prin 3 metode, alcătuindu-se algoritmi ce se vor aplica mai târziu în rezolvarea problemelor din cotidian.

Problema nr. 1. Se dă $\frac{a}{b} = 0{,}6$. Să se calculeze $\frac{2a+3b}{3b}$.

Soluția 1. Algoritmul de rezolvare a problemei:

1. Înmulțim numărătorii cu 2.
2. Înmulțim numitorii cu 3.
3. Adunăm numitorii la numitor și obțin $\frac{2a+3b}{3b} = \frac{7}{5}$.

Soluția 2. Algoritmul de rezolvare a problemei:

1. Schimbăm miezii între ei.

2. Notăm prin k valoarea rapoartelor $\frac{a}{3}$ și $\frac{b}{5}$.
3. Exprimăm a și b prin k. ($a = 3k, b = 5k$).
4. Înlocuim valoarea lui $a = 3k$ și $b = 5k$ în raportul $\frac{2a+3b}{3b}$ și obținem $\frac{2\cdot 3k+3\cdot 5k}{3\cdot 5k} = \frac{21k}{15k} = \frac{7}{5}$.

Soluția 3. Algoritmul de rezolvare a problemei:

1. Din raportul $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ exprimăm pe a în dependență de b.
2. Înlocuim valuarea lui $a = \frac{3b}{5}$ în raportul $\frac{2a+3b}{3b}$ și obținem $\frac{2\cdot\frac{3b}{5}+3b}{3b} = \frac{b(\frac{6}{5}+3)}{3b} = \frac{7}{5}$.

Următoarea problemă, elevii vor aplica algoritmii de mai sus, unde în clasa a VIII-a vor deduce singuri algoritmul de rezolvare a unui sistem de două ecuații cu două necunoscute.

Problema nr. 2. Să se afle numerele naturale x și y, diferite de 0, astfel ca $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ și $\frac{4x+y+5(x+y)}{24} = 3$.

Soluția 1. Algoritmul de rezolvare a problemei:

1. Se aplică proprietatea fundamentală a proporției și se exprimă o necunoscută în dependență de alta.
2. Se înlocuiește necunoscuta exprimată din prima proporție în a doua.
3. Se rezolvă ecuație, calculându-se mai apoi și cealaltă necunoscută.

Din $\frac{4x+y+5(x+y)}{24} = 3$, obținem prin efectuarea calculelor de la numărător $\frac{9x+6y}{24} = 3$ sau $\frac{3(3x+2y)}{24} = 3$, adică $\frac{3x+2y}{8} = 3$, de unde rezultă că $3x + 2y = 24$.

Dar $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ și conform proprietății fundamentale a proporțiilor $3x = 2y$, care se înlocuiește în relația precedentă obținându-se $2y + 2y = 24$ sau $y = 6$. Dar $x = \frac{2y}{3}$, deci $x = 4$.

Soluția 2. Algoritmul de rezolvare a problemei:

1. Se exprimă ambele necunoscute din prima proporție în dependență de coeficientul de proporționalitate.
2. Se înlocuiesc necunoscutele în a doua proporție și se rezolvă ecuația, calculându-se coeficientul de proporționalitate..
3. Se revine la notațiile inițiale și se calculează necunoscutele.

Notăm $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = k$ deci obținem $x = 2k$ și $y = 3k$. Atunci $\frac{4x+y+5(x+y)}{24} = 3$ devine $\frac{4\cdot 2k+3k+5(2k+3k)}{24} = 3$, iar după efectuarea calculelor obținem $\frac{36k}{24} = 3$, de unde $k = 2$. Din $x = 2k$ și $y = 3k$ vom obține $x = 4, y = 6$.

Pot fi expuse și alte metode...

Problema numărul 3 pregătește elevii pentru a trece la următoarele conținuturi „proporționalitate directă și inversă”, la fel, în clasa a VIII-a va aplica singur algoritmul la rezolvarea sistemelor cu trei ecuații și trei necunoscute. Această problemă este bine oferită spre rezolvare elevilor cu capacități înalte la matematică.

Problema nr. 3. Să se afle trei numere, știind că raportul dintre primul și al doilea este 0,(6), raportul dintre al doilea și al treilea este 0,8(3), iar produsul dintre primul și al treilea număr este 9331,2.

Soluție. Notăm în ordine cele trei numere cu x, y, z. Din datele problemei, obținem $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, $\frac{y}{z} = \frac{5}{6}$ și $xz = 9331{,}2$. Din $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ și $\frac{z}{y} = \frac{6}{5}$, prin înmulțire membru cu membru se obține $\frac{xz}{y^2} = \frac{4}{5}$, de unde rezultă $\frac{9331{,}2}{y^2} = \frac{4}{5}$, deci $y^2 = 11664$, sau $y^2 = (2^2 \cdot 3^3)^2$. Obținem $y = 108$ sau $y = -108$. Din $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, rezultă $x = \frac{2y}{3}$, deci $x = 72$ sau $x = -72$. Din $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, rezultă $x = \frac{2y}{3}$, deci $x = 72$ sau $x = -72$. Din $\frac{y}{z} = \frac{5}{6}$, rezultă $z = \frac{6y}{5}$, deci $z = 129{,}6$ sau $z = -129{,}6$.

O abordare euristică poate recurge la numeroși algoritmi cunoscuți, fără însă a se reduce la aceștia; cel puțin modul în care ei se articulează este inedit.

Următoarele probleme sunt cu conținut creativ, rezolvând aceste probleme, aplicând metoda euristică, dezvoltăm gândirea algoritmică la elevi:

Problema nr. 4. La finisarea unui bloc lucrează 70 muncitori repartizați în 4 echipe. Fiecare echipă i s-a repartizat câte o scară a acestui bloc. Prima echipă termină lucrarea în 30 zile, cea de a doua în 15 zile, a treia în 20 zile, iar cea de a patra în 12 zile. Știind că muncitorii au lucrat în mod egal, determină numărul muncitorilor din fiecare echipă.

Prin metoda euristică, elevii descoperă algoritmul de rezolvare a problemei.

<u>Rezolvare: Algoritmul de rezolvare a problemei:</u>

- Identificarea mulțimilor: mulțimea formată din muncitori și mulțimea formată de zile. Notăm cu x, y, z, t numărul muncitorilor din fiecare echipă.
- Recunoașterea mărimilor, direct sau invers proporționale: numărul de muncitori este invers proporțional cu numărul zilelor în care s-a efectuat lucrarea.
- Dacă sunt invers proporționale, formăm șir de produse egale, sau:

$$\frac{x}{\frac{1}{30}} = \frac{y}{\frac{1}{15}} = \frac{z}{\frac{1}{20}} = \frac{t}{\frac{1}{12}} \text{ și } x + y + z + t = 70 \Longrightarrow \frac{x}{\frac{1}{30}} = \frac{y}{\frac{1}{15}} = \frac{z}{\frac{1}{20}} = \frac{t}{\frac{1}{12}} = 300$$

- Aplicând regulile de mai sus, obținem: $x = 10, y = 20, z = 15, t = 25$.

Problema nr. 5. Au fost aprinse două lumânări de lungimi și grosimi diferite. Lumânarea scurtă se topește în întregime în 5 ore, iar cea lungă în $3\frac{1}{2}$ ore. După ce au ars timp de două ore, lumânările au lungimi egale. De câte ori a fost mai scurtă o lumânare față de alta? (Ș.S.)

<u>Rezolvare: Algoritmul de rezolvare a problemei:</u>

- ***Stabilirea necunoscutei și notarea acesteia.***

Notăm lungimea primei lumânări cu x iar a celei de a doua cu y.

- ***Scrierea datelor și relațiilor din problemă până la obținerea unei relații.***

$x \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 5\ ore$

$a \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 2\ ore$

$$a = \frac{2x}{5}$$

$y \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 3\frac{1}{2}\ ore$

$b \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 2\ ore$

$$b = \frac{2y}{3\frac{1}{2}} => b = \frac{4y}{7}$$

În două ore lungimea primei lumânări scade cu $\frac{2x}{5}$, deci devine egală cu $\frac{3x}{5}$, iar lungimea celei de a doua scade cu $\frac{4y}{7}$ devenind $\frac{3y}{7}$. Atunci $\frac{3x}{5} = \frac{3y}{7} => \frac{x}{y} = \frac{5}{7}$.

- ***Calcularea necunoscutelor.***

Atunci $\frac{3x}{5} = \frac{3y}{7} => \frac{x}{y} = \frac{5}{7}$.

- ***Interpretarea soluțiilor și formularea răspunsului la problemă.***

Problema nr. 6. O lucrare a finalizată de 20 muncitori în 15 zile. După ce lucrează 8 zile, șase dintre eu sunt transferați rămânând ca lucrarea să fie finalizată de către restul echipei. În câte zile va fi terminată lucrarea?

La rezolvarea acestei probleme, elevii își realizează un algoritm de rezolvare, un plan:

- Determinarea numărului de zile unui singur muncitor pentru a realiza lucrarea: $15 \cdot 20 = 30$ zile.
- Determinarea a câta parte din lucrare pe zi realizează un muncitor: $\frac{1}{300}$ din lucrare.
- Determinarea părții din lucrare realizată în primele 8 zile de 20 muncitori: $20 \cdot 8 \cdot \frac{1}{300} = \frac{8}{15}$ din lucrare.
- Calcularea părții din lucrare ce a rămas de efectuat: $\frac{7}{15}$ din lucrare.
- Identificarea părții din lucrare realizată de cei 14 muncitori și timpului până la finisare: $14 \cdot \frac{1}{300} = \frac{7}{150}$ din lucrare pe zi, deci va fi finisată după $\frac{7}{15} : \frac{7}{150} = 10$ zile.

Problema nr. 7. Unei echipe de 25 muncitori i-ar fi necesar 40 zile pentru a realiza o lucrare dar în primele 10 zile lucrează doar 20 muncitori, iar în următoarele 5 zile doar 15. Câți muncitori ar fi necesari pentru a finaliza lucrarea la termenul stabilit?

Rezolvare:

$$x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5\ ore$$

$$a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2\ ore$$

$$x = \frac{25\cdot 40}{20} => x = 50 \text{ zile}$$

Celor 20 muncitori le-ar fi necesari 50 zile pentru a realiza în întregime lucrarea. Au trecut doar 10 zile; deci pentru a finaliza le-ar mai fi necesare 40 zile.

Prin rezolvarea sistematică a problemelor, se dezvoltă gândirea algoritmică la elevi, unde:

- se oferă libertatea de a căuta soluții;
- se caută de a simplifica lucrurile mai complexe;
- se elaborează un plan și se lucrează la el.

În momentul când profesorul practică astfel de metode în timpul lecției, atunci copiii vor aborda o astfel de sarcină într-un mod sistematic.

Bibliografie:

1. Smărăndoiu Ș., Perianu M., Săvulescu D., Gheorghe I. Matematica pentru clasa a VI-a. Editura ART, București 2016.
2. Cîrjan F. Didactica matematicii. Editura Corint, București 2007.
3. Nikolskaia I.L. Curs facultativ de matematică, clasa a VII-a – IX-a. Editura „Lumina”, Chișinău 1994.
4. Lint D., Lint M., Marinescu R., Marinescu Ș.D., Monea M., Monea S., Stroe M. Matematică de excelență pentru concursuri, olimpiade și centre de excelență, clasa a VI-a. Editura „Paralela 45”, București, 2016.
5. PISA 2009 Plus, Rezultate Performanțele elevilor de 15 ani în alfabetizare la citire, matematică și științe, pentru 10 participanți suplimentari, 2011. ACER Project Publishing Departament, 2011.
6. Codul educației al Republicii Moldova, publicat: 24.10.2014 în Monitorul Oficial Nr. 319-32, art Nr: 634, data intrării in vigoare: 23.11.2014.