STRATEGII DE DEZVOLTARE A CAPACITĂȚILOR DE APLICARE A ALGORITMILOR ÎN REZOLVAREA PROBLEMELOR CU AJUTORUL ECUAȚIILOR FORMA $ax + by = c$

Popovici-Bujor Violeta, doctorand[1], profesor de matematică[2]
[1]Universitatea de Stat din Tiraspol, [2]IPLT „Mircea Eliade"

În acest articol, sunt abordate unele strategii euristice de predare – învățare, utilizate în organizarea şi desfăşurarea lecțiilor și a activităţilor extracurriculare la matematică pentru dezvoltarea gândirii algoritmice la elevii din învățământul obligatoriu și cel de performanță (Instituția Publică Liceul Teoretic „Mircea Eliade" și Centrul de Excelență ICAR „Copii dotați sau cu aptitudini la matematică").

Strategiile de care vorbim în articol sunt strategiile de instruire proiectate astfel încât să lase elevilor posibilitatea elaborării propriilor lor strategii euristice de identificarea algoritmilor în rezolvarea problemelor; intervenția profesorului numai atât și numai acolo unde este necesar, în spiritul celor afirmate de Polya.

Îndrumările verbale din condițiile externe ale învățării sunt date orientativ, ele pot fi îmbogățite și valorificate mai mult sau mai puțin în funcție de măiestria pedagogică a fiecărui dascăl.

Performanță: să recunoască într-o situație dată (ecuație de tipul $ax + by = c$) modelul unei reguli (definiție, proprietate etc) învățate.

Ex.1 Determină numerele prime a și b pentru care 3 · a + 8 · b = 46

<u>*Condiții interne:*</u>

Să recunoască numerele pare și numerele impare. Să reactualizeze următoarele teoreme: **„**Dacă fiecare termen al unei sume/diferenţe este divizibil prin acelaşi număr, atunci şi suma/diferenţa se divide prin acel număr" şi „Într-o sumă/diferenţă de doi termeni, dacă suma/diferenţa şi unul din termeni se divid prin acelaşi număr, atunci şi celălalt termen se divide prin numărul dat"

<u>*Condiții externe:*</u> De care teoremă ne amintește ecuația dată? Putem identifica paritatea fiecărui termen și a sume? Să punem în evidență modelul unei teoreme cunoscute.

Prin dirijare, eventual, elevii construiesc algoritmul de rezolvare a ecuației:

1. *Identificarea parității fiecărui membru:*

$b - par, c - par => ax - par, a - impar => x - par.$

Deoarece 8 · b și 46 sunt numere pare, rezultă că 3 · a este număr par.

2. *Analiza posibilităților.*

Dar 3 nu este număr par. Atunci a este număr par. Dar a este număr prim. Cum singurul număr par și prim este 2, rezultă a = 2. Atunci 6 + 8 · b = 46, de unde obținem 8 · b = 40, deci b = 5.

Ex. 2 Rezolvă în mulțimea numerelor naturale ecuația: $(x + 1)(y + 2) = 15$ (clasa a V-a)

Ex. 3 Rezolvă în mulțimea numerelor întregi ecuația: $(x+1)(y+2)=15$ **(clasa a VI-a)**

Condiții interne: Să reactualizeze toate criteriile și regulile relevante care vor fi necesare pe parcursul rezolvării ecuației.

Condiții externe: Elevii pot forma algoritmul de rezolvarea a cestei ecuații pe seama unor îndrumări verbale care s-au constituit într-o strategie aplicabilă și în alte situații.

Ex.2 *Prin dirijare, eventual, elevii construiesc algoritmul de rezolvare a ecuației:*

1. *Identificarea divizorilor ai numărului 15.*

Din relația $(x+1)(y+2)=15$ deducem că $x+1$ și $y+2$ sunt divizori ai lui 15.

2. *Stabilirea condițiilor de existență pentru fiecare factor.*

Cum $x, y \in \mathbb{N}$, avem $x+1 \geq 1$ și $y+2 \geq 2$

3. *Scrierea tuturor posibilităților.* Ca urmare, sunt trei posibilități:

$x+1=1$ și $y+2=15$, de unde se obține $x=0$ și $y=13$;

$x+1=3$ și $y+2=5$, de unde se obține $x=2$ și $y=3$

$x+1=5$ și $y+2=3$, de unde se obține $x=4$ și $y=1$.

În condiția când se rezolvă ecuația în mulțimea numerelor întregi, sunt 6 posibilități.

Ex. 4 Rezolvă în mulțimea numerelor naturale ecuația: $xy+2x+y=19$

Condiții interne: Să reactualizeze toate criteriile și regulile relevante care vor fi necesare pe parcursul rezolvării ecuației, inclusiv proprietate distributivă a înmulțirii față de adunare, recunoașterea factorul comun.

Elevii vor aduce relația la o formă mai simplă pentru ca mai apoi să aplice algoritm

1. *Aducerea relației la o formă mai simplă.*

$$xy+2x+y=19 <=> x(y+2)+y=21 <=>$$
$$<=> x(y+2)+y+2=21 <=> (x+1)(y+2)=21.$$

2. *Identificarea divizorilor naturali ai numărului 21.*
3. *Stabilirea condițiilor de existență pentru fiecare factor.*
4. *Scrierea tuturor posibilităților.*

Ex. 5 a fost propus elevilor cu aptitudini la matematică, elevilor participanți la olimpiadă, ce își fac studiile la IPLT „Mircea Eliade" și grupei de elevi participanți la activitățile Centrului ICAR.

Ex. 5 Determină numerele naturale x și y, știind că $2^x+3\cdot(y+1101)=y^2$

Pentru rezolvarea acestei ecuații, s-a aplicat o strategie euristică-deductivă, semiderijată frontal combinată cu activitatea în grup, în scopul elaborării algoritmului. În final, s-a construit următorul algoritm de rezolvare a ecuației:

1. *Aducerea relației la o formă mai simplă.*

Avem: $2^x+3y+3303=y^2 \Leftrightarrow y^2-3y=3303+2^x$; $y\cdot(y-3)=3303+2^x$

2. *Analiza fiecărui membru din ecuație:* Pentru orice $x \in \mathbb{N}$, dacă $2^x + 3303 > 0$, atunci $y > 0$ și produsul $y \cdot (y-3)$ este număr par, pentru orice $y \in \mathbb{N}$. 3303 este un număr impar, deci și 2^x este un număr impar, rezultă că $x = 0$.

3. *Înlocuirea valorii lui x și analiza ecuației cu o singură necunoscută.*

Înlocuim $x=0$ şi obţinem $y \cdot (y-3) = 3304$, deci $y | 3304$ şi $(y-3) | 3304$. Descompunem 3304 în produs de factori primi, obţinem $3304 = 59 \cdot 2^3 \cdot 7$ deci $y \cdot (y-3) = 59 \cdot 56 \Rightarrow y = 59$ Numerele sunt: $x=0$ şi $y=59$.

În continuare, voi da câteva exemple de probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor. Algoritmul care se parcurge în rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor sunt: **1.** Stabilirea necunoscutei și notarea acesteia. **2.** Scrierea datelor și relațiilor din problemă până la obținerea unei ecuații. **3.** Rezolvarea ecuației. **4.** Interpretarea soluțiilor și formularea răspunsului la problemă. **5.** Proba.

Problema nr.1 „O bucată de sârmă cu lungimea de 102 cm trebuie tăiată în bucăţi mai mici de 12 cm şi 15 cm, astfel încât să nu rămână resturi. Câte bucăţi de fiecare fel se obţin?"

<u>*Algoritmul de rezolvare a problemei:*</u>

1) Stabilirea necunoscutei și notarea acesteia.

Fie că se obţin x bucăţi de 15 cm şi y bucăţi de 12 cm.

2) Scrierea datelor și relațiilor din problemă până la obținerea unei ecuații.

Obţinem ecuaţia: 15x+12y=102 $\Leftrightarrow$ 5x+4y=34.

3) Rezolvarea ecuației.

La rezolvarea acestei ecuații, vom parcurge algoritmul de rezolvare a ex. 1. Dacă 4y se divide cu 2 şi 34 se divide cu 2, atunci şi 5x se divide cu 2, respectiv x se divide cu 2, rezultă că x este număr par. Dacă x=2, atunci y=6 . Daca x=6, atunci y=1

4) Interpretarea soluțiilor și formularea răspunsului la problemă.

Prima soluţie : erau 2 bucăţi de 15 cm şi 6 bucăţi de 12cm. Soluţia a doua: se obţin 6 bucăţi de 15 cm şi 1 bucată de 12cm.

Problema nr.2. „Pentru 4 rochii şi 5 fuste un atelier a folosit 26 metri de stofă, dacă atelierul are de cusut 7 rochii şi 10 fuste, de câţi metri de stofă are nevoie? Se ştie că pentru o rochie şi o fustă se întrebuinţează un număr întreg de metri"

<u>*Algoritmul de rezolvare a problemei:*</u>

1) Stabilirea necunoscutei și notarea acesteia.

Fie x - numărul de metri folosiţi pentru a coase o rochie şi y - numărul de metri folosiţi pentru a coase o fustă.

2) Scrierea datelor și relațiilor din problemă până la obținerea unei ecuații.

Obţinem ecuaţia cu 2 necunoscute: $4x + 5y = 26$.

3) ***Rezolvarea ecuației (aplicând algoritmul ecuațiilor de mai sus)***

$4x \vdots 2$, $26 \vdots 2 \Rightarrow 5y \vdots 2$, $5 \not\vdots 2 \Rightarrow y \vdots 2$ deci $y = 2k$, $k \in N^*$.

Pentru $k=1$, $y=2$ şi $x=4$.

Pentru $k=2$, $y=4$ şi $x=1{,}5$, ceea ce nu corespunde condiţiei.

Pentru $k=3$, $y=6$ şi $x \in \varnothing$, pentru $x \in N$

4) Interpretarea soluțiilor și formularea răspunsului la problemă.

Prin urmare pentru o rochie se folosesc 4 metri de stofă şi pentru o fustă 2 metri de stofă. Deci pentru 7 rochii şi 10 fuste se folosesc 48 metri de stofă.

Problema nr.3. „Într-o cameră erau scaune cu 4 picioare şi taburete cu 3 picioare. După ce în cameră au întrat un grup de elevi şi s-au aşezat pe toate scaunele şi toate taburetele numărul total de picioare a scaunelor, taburetelor şi elevilor este 39. De aflat cîte scaune şi cîte taburete erau în cameră.”

<u>*Algoritmul de rezolvare a problemei:*</u>

1) Stabilirea necunoscutei și notarea acesteia.

Fie x numărul scaunelor şi y numărul taburetelor.

2) Scrierea datelor și relațiilor din problemă până la obținerea unei ecuații.

Obţinem ecuaţia: $4x+3y+(x+y)\cdot 2=39 \Leftrightarrow 6x+5y=39$, $x, y \in N$

3) Rezolvarea ecuației (aplicând algoritmul ecuațiilor de mai sus)

$6x \vdots 3, 39 \vdots 3 \Rightarrow 5y \vdots 3$, deci $y=3k, k \in N^*$. Pentru $k=1, y=3$, $x=4$. Pentru $k=2, y=6, x=1{,}5$, $x \notin N$. Pentru $k=3, y=9, x \notin N$.

4) Interpretarea soluțiilor și formularea răspunsului la problemă.

Unica soluţie a problemei este: 4 scaune şi 3 taburete

Ecuațiile de tipul $ax+by=c$ se rezolvă în baza cunoștințelor acumulate de elevi în clasele a V-a – VI-a la conținuturile ,,Numere naturale. Divizibilitate”. Ecuații în care mărimile necunoscute se exprimă prin numere întregi se numesc ecuații diofantice, după numele matematicianului Diofant, care a trăit în sec III, d.Hr. În opera sa ,,Aritmetica”, din care au ajuns până în zilele noastre, doar șase cărți (numărul lor total nu este cunoscut), Diofant consideră diferite ecuații cu valori întregi și raționale ale necunoscutelor și indică metode de aflare a acestor necunoscute.

Bibliografie

1. Matematica, clasa a VI-a. Autori: I.Achiri, A.Braicov, O.Șputenco, Prut Internațional, Chișinău, 2011.
2. Matematica, clasa a V-a. Autori: I.Chicu, Ș.Smarandache, I.Iacob, Editura Intuitext, București, 2017.
3. Matematica pentru clasa a VI-a. Autori: Ș. Smărăndoiu, M. Perianu, D.Săvulescu, I.Gheorghe, Editura ART, București, 2016.
4. Didactica matematicii. Autor: Florin Cîrjan, Editura Corint, București 2007.
5. Curs facultativ de matematică, clasa a VII-a – IX-a. Autor: I.L.Nikolskaia, Editura ,,Lumina”, Chișinău, 1994.