

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ, БИФУРКАЦИОННЫЙ И АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ КУБИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

PARAMETRIC REPRESENTATION, BIFURCATION AND ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE SOLUTIONS OF CUBIC EQUATION WITH REAL COEFFICIENTS

Александр БАРСУК, ORCID:
Флорентин ПАЛАДИ, ORCID:

CZU: 517.957

e-mail:

Solutions of a cubic equation with real coefficients are studied. We describe a procedure for reducing an arbitrary cubic equation to a canonical form containing only one parameter. For a cubic equation in canonical form, a bifurcation analysis of solutions to the equation, parametric representations of solutions and their asymptotic analysis are given.

Keywords: *bifurcation and asymptotic analysis, cubic equation, parametric representations of real and complex solutions.*

ВВЕДЕНИЕ

Многие важные задачи механики деформируемых сред приводят к необходимости построения и анализа решений кубических уравнений. В этой связи достаточно упомянуть о многочисленных задачах, связанных с определением главных осей тензоров напряжений и деформаций. Несмотря на существование классических формул Кардано для решений кубического уравнения, практическое использование этих формул (в особенности при исследовании зависимостей решений от параметров) наталкивается на заметные осложнения, связанные с выделением отдельных непрерывных ветвей решений.

Ниже излагаются регулярные процедуры построения решений кубического уравнения с вещественными коэффициентами, основанные на приведении уравнения к канонической форме, содержащей всего один параметр. Наряду с этим приводится бифуркационный анализ решений и асимптотический анализ зависимостей как вещественных, так и комплексных решений от параметра. Отметим, что построение параметрических представлений вещественных решений кубического уравнения и их бифуркационный анализ обсуждались в [1-4].

2. Формулировка задачи, качественный анализ решений и приведение кубического уравнения к канонической форме

Рассматривается кубическое уравнение общего вида

$$\varepsilon y^3 + ay^2 + by + c = 0 \quad (2.1)$$

в котором ε, a, b, c – произвольные вещественные коэффициенты (коэффициент ε при старшей степени в (2.1) оставлен с целью сохранения возможности анализа решений сингулярно возмущенного уравнения для которого $|\varepsilon| \ll 1$. Далее без ограничения общности принимается, что коэффициент $\varepsilon > 0$.

Прежде всего отметим что при $c = 0$ и произвольных значениях коэффициентов ε, a, b $y = 0$ является одним из решений уравнения (2.1), при этом два других решения определяются квадратным уравнением $\varepsilon y^2 + ay + b = 0$. В связи с этим в дальнейшем изложении будем принимать $c \neq 0$. Решения уравнения (2.1) представляют собой некоторые зависимости от коэффициентов уравнения ε, a, b, c т.е. $y = y(\varepsilon, a, b, c)$. Поскольку при $c \neq 0$ $y \neq 0$, то при произвольных изменениях коэффициентов ε, a, b и коэффициента c с сохранением его знака, т.е. значений $c > 0$ или $c < 0$, зависимости $y = y(\varepsilon, a, b, c)$ при указанных изменениях аргументов сохраняют определенный знак. Это общее свойство решений приобретает особо важное значение при исследовании устойчивости решений.

Целью последующего анализа является получение решений уравнения (2.1) в замкнутой аналитической форме и анализ зависимости этих решений от коэффициентов уравнения.

Покажем, что кубическое уравнение общего вида (2.1), зависящее от четырех произвольных параметров ε, a, b, c , всегда без потери общности может быть приведено к кубическому уравнению специальной формы, называемой далее канонической, и содержащему только один параметр.

С этой целью поделим обе части уравнения на $\varepsilon \neq 0$ и перейдем в (2.1) к новой переменной \tilde{x} :

$$y = \tilde{x} - \frac{a}{3\varepsilon} \quad (2.2)$$

Относительно \tilde{x} уравнение (2.1) преобразуется к классической приведенной форме, зависящей уже только от двух параметров p и q :

$$\tilde{x}^3 + p\tilde{x} + q = 0, \quad p = \frac{b}{\varepsilon} - \frac{a^2}{3\varepsilon^2}, \quad q = \frac{c}{\varepsilon} - \frac{ab}{3\varepsilon^2} + \frac{2}{27} \frac{a^3}{\varepsilon^3} \quad (2.3)$$

Наконец, вводим новую переменную x согласно правилу $\tilde{x} = q^{\frac{1}{3}}x$, относительно которой приведенное кубическое уравнение (2.3) принимает окончательный вид:

$$x^3 + \gamma x + 1 = 0, \quad \gamma = \frac{p}{q^{\frac{2}{3}}} \quad (2.4)$$

Кубическое уравнение (2.4), в отличие от этого же уравнения в форме (2.1), зависит уже только от одного параметра γ . Поскольку к виду (2.4) может быть приведено любое кубическое уравнение, то (2.4) можно рассматривать в качестве канонической формы кубического уравнения и, таким образом, все качественные особенности поведения решений любого кубического уравнения определяются всего одним параметром γ .

Отметим также отдельно важный случай условий существования трехкратного корня уравнения (2.1). С этой целью обратимся к уравнению (2.3) и введем обозначение $f(x, p, q) = x^3 + px + q$. Для трехкратного корня уравнения (2.3) выполняются соотношения

$$f(x, p, q) = x^3 + px + q = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + p = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x = 0 \quad (2.5)$$

Из соотношений (2.5) следует, что трехкратным корнем уравнения (2.3) может быть только значение $x = 0$, при условии, что $p = 0$ $q = 0$, или, возвращаясь к исходному уравнению (2.1), приходим к заключению о существовании трехкратного корня уравнения (2.1) и об условиях для его существования:

$$y = -\frac{a}{3\varepsilon}, \quad p = \frac{b}{\varepsilon} - \frac{a^2}{3\varepsilon^2} = 0, \quad q = \frac{c}{\varepsilon} - \frac{ab}{3\varepsilon^2} + \frac{2}{27} \frac{a^3}{\varepsilon^3} = 0 \quad (2.6)$$

В связи с выполнением условий $p = 0$, $q = 0$ для трехкратного корня в канонической форме (2.4), трехкратные решения исключаются из рассмотрения.

3. Качественный анализ вещественных решений кубического уравнения в канонической форме

В этом разделе без непосредственного обращения к представлениям решений кубического уравнения в аналитической форме и опираясь только на каноническую форму (2.4) приведем детальный качественный анализ решений кубического уравнения. Полученные при этом результаты анализа будут существенно использоваться при непосредственном построении решений уравнения (2.4).

Обозначим через $x_1(\gamma)$, $x_2(\gamma)$ и $x_3(\gamma)$ – решения кубического уравнения (2.4) и отметим, что эти решения представляют собой различные ветви неявно заданной уравнением $F(x, \gamma) \equiv x^3 + \gamma x + 1 = 0$ функции $x(\gamma)$. В соответствии с теоремой о неявно заданной функции, точки бифуркации решений уравнения $F(x, \gamma) = 0$ определяются условиями

$$F(x, \gamma) \equiv x^3 + \gamma x + 1 = 0, \quad \frac{\partial F(x, \gamma)}{\partial x} = 3x^2 + \gamma = 0 \quad (3.1)$$

представляющими собой систему из двух нелинейных уравнений и имеющей единственное решение:

$$x_* = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad \gamma_* = -\frac{3}{\sqrt[3]{4}} \quad (3.2)$$

Таким образом, существует единственное значение параметра $\gamma = \gamma_*$ при котором происходит бифуркация решений кубического уравнения и, следовательно, в области значений $\gamma < \gamma_*$ существует одно (или три) вещественных решения, в то время как при $\gamma > \gamma_*$ – соответственно три (или одно) вещественных решения.

Отметим, что поскольку при $\gamma = 0 > \gamma_*$ кубическое уравнение (2.4) имеет единственное вещественное решение $x = -1$, то приходим к заключению, что при $\gamma > \gamma_*$ существует только одно вещественное решение, обозначаемое далее через $x_1(\gamma)$, а при $\gamma < \gamma_*$ – три вещественных решения, обозначаемых всюду ниже через $x_1(\gamma)$, $x_2(\gamma)$ и $x_3(\gamma)$.

Отметим также, что $x = 0$ при любом значении γ не является решением уравнения $F(x, \gamma) = 0$ в (3.1), откуда следует, что зависимости $x_i(\gamma)$ ($i = 1, 2, 3$) не пересекают ось γ , сохраняют знак и, таким образом, графики каждой из этих зависимостей целиком расположены в одной из полуплоскостей $x > 0$ или $x < 0$ плоскости (x, γ) . В частности, в силу сказанного $x_1(\gamma) < 0$ в интервале $-\infty < \gamma < \infty$, в то время как зависимости $x_2(\gamma)$ и $x_3(\gamma)$, имея при бифуркационном значении $\gamma = \gamma_*$ совпадающие положительные значения $x_2(\gamma_*) = x_3(\gamma_*) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} > 0$, являются положительными в интервале $-\infty < \gamma \leq \gamma_*$.

Приведем далее качественный и асимптотический анализ поведения зависимостей решений $x_i(\gamma)$ при изменении параметра γ . С этой целью, с использованием формулы для производной от неявно заданной функции, приведем выражения для производных

$$\frac{dx_i(\gamma)}{d\gamma} = -\frac{\partial F / \partial \gamma}{\partial F / \partial x} = -\frac{x_i}{3x_i^2 + \gamma}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.3)$$

Отметим, что, в соответствии с (3.1), (3.2), весь интервал изменения параметра $\gamma \in (-\infty, \infty)$ значением $\gamma = \gamma_*$ разбивается на два интервала $(-\infty, \gamma_*)$ и (γ_*, ∞) в каждом из которых производная $\partial F / \partial x$ сохраняет знак. При этом, поскольку для вещественных значений x $\partial F / \partial x = 3x^2 > 0$ при $\gamma = 0 > \gamma_*$, то в интервале (γ_*, ∞) $\partial F / \partial x > 0$, в то время как в интервале $(-\infty, \gamma_*)$ – знак $\partial F / \partial x$ зависит от исследуемой зависимости $x_i(\gamma)$. В частности, для зависимости $x_1(\gamma)$ $\partial F / \partial x$ в ноль не обращается, при этом $\partial F / \partial x > 0$, поскольку при $\gamma = 0 > \gamma_*$ $\partial F / \partial x = 3x^2 > 0$ и с учетом $x_1(\gamma) < 0$ приходим к заключению о монотонном возрастании $x_1(\gamma)$ с ростом параметра γ при $-\infty < \gamma < \infty$. Подобными рассуждениями приходим к выводу о монотонном убывании зависимости $x_2(\gamma)$ и о монотонном возрастании зависимости $x_3(\gamma)$ при изменении параметра γ в интервале $-\infty < \gamma \leq \gamma_*$.

Графическое представление решений кубического уравнения в канонической форме, полученное в результате построения графика неявно заданной функции $F(x, \gamma) = 0$ (см. (3.1)), приведено на Рис. 3.1.

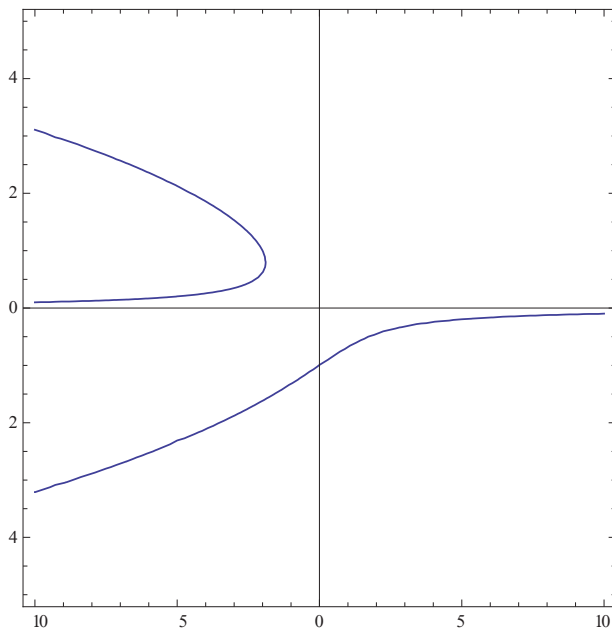


Рис. 3.1. Графическое представление решений кубического уравнения.

Приведем также используемые далее асимптотические представления зависимостей $x_i(\gamma)$ при $|\gamma| \gg 1$, вытекающие непосредственно из анализа уравнения (2.4). Имеем

$$\gamma \gg 1: \quad x_1(\gamma) \approx -\frac{1}{\gamma}, \quad (3.4)$$

$$\gamma \rightarrow -\infty: \quad x_1(\gamma) \approx -\sqrt{-\gamma}, \quad x_2(\gamma) \approx \sqrt{-\gamma}, \quad x_3(\gamma) \approx -\frac{1}{\gamma}$$

В справедливости асимптотических выражений (3.4) легко убедиться прямой подстановкой их в кубическое уравнение (2.4).

4. Параметрическое представление вещественных решений кубического уравнения

Для получения параметрических представлений решений кубического уравнения в канонической форме (2.4) разрешим это уравнение относительно параметра γ и представим (2.4) в эквивалентной форме $\gamma = -\frac{1+x^3}{x}$. Вводя в рассмотрение вещественный параметр τ согласно условию $x = \tau$, приходим в результате к параметрическим представлениям для решений уравнения (2.4) в виде

$$x(\tau) = \tau, \gamma(\tau) = -\frac{1 + \tau^3}{\tau} \quad (4.1)$$

Отметим, что соотношениями (4.1) описываются все вещественные решения уравнения (2.4), при этом каждое из решений определяется соответствующим интервалом изменения параметра τ . В частности, положительные решения $x_2(\gamma)$ и $x_3(\gamma)$ описываются значениями параметра $\tau > 0$, в то время как отрицательного $x_1(\gamma)$ – значениями $\tau < 0$.

В результате приходим к параметрическому представлению для решения $x_1(\gamma)$

$$x_1(\tau) = -\tau, \gamma(\tau) = \frac{1 - \tau^3}{\tau}, \tau > 0 \quad (4.2)$$

(При получении соотношений (4.2) для удобства последующего анализа произведена замена $\tau \rightarrow -\tau$). Из соотношений (4.2) следует, что при $\tau = 1$ имеем $\gamma(1) = 0$, $x_1(1) = -1$ и таким образом получаем $x_1(\gamma = 0) = -1$. Для значений $\tau \ll 1$ имеем $\gamma(\tau) \approx \frac{1}{\tau} \gg 1$ и в соответствии с (4.2) приходим к асимптотическому поведению $x_1(\gamma)$ при $\gamma \gg 1$ - $x_1(\gamma) \approx -\frac{1}{\gamma}$. С другой стороны, для значений $\tau \gg 1$ справедливо асимптотическое поведение $\gamma(\tau) \approx -\tau^2 < 0$ и в результате приходим к асимптотическому представлению для решения $x_1(\gamma)$ - $x_1(\gamma) \approx -\sqrt{-\gamma}$ ($-\gamma \gg 1$).

Наконец, с использованием соотношений (4.2) имеем $\dot{x}_1 = -1$, $\dot{\gamma} = -\frac{1}{\tau^2} - 2\tau^2$, с учетом которых получаем $\frac{dx_1(\gamma)}{d\gamma} = \frac{x_1}{\dot{\gamma}} = \frac{\tau^2}{1 + 2\tau^4} > 0$ и таким образом $x_1(\gamma)$ – монотонно возрастающая функция в интервале $-\infty < \gamma < \infty$.

Приступим теперь к построению и анализу решений $x_2(\gamma)$ и $x_3(\gamma)$. Будем исходить из параметрического представления (4.1) этих решений:

$$x(\tau) = \tau, \gamma(\tau) = -\frac{1 + \tau^3}{\tau}, \tau > 0 \quad (4.3)$$

В соответствии с (3.2), при бифуркационном значении параметра $\gamma_* = -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ имеем $x_2(\gamma_*) = x_3(\gamma_*) = x_* = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ и этим значениям соответствует значение па-

раметра $\tau = \tau_* = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Отметим, что в точке бифуркации $\frac{\partial x_1(\gamma)}{\partial \gamma} = \frac{\partial x_2(\gamma)}{\partial \gamma} = \infty$.

Таким образом, интервал изменения параметра τ $0 < \tau < \infty$ значением $\tau = \tau_* = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ разбивается на два интервала $0 < \tau \leq \tau_*$ и $\tau_* \leq \tau < \infty$ в каждом из которых определяется одна из зависимостей $x_2(\gamma)$ или $x_3(\gamma)$. Для определенности примем что в первом из указанных интервалов определена зависимость $x_2(\gamma)$ и во втором – $x_3(\gamma)$ и таким образом приходим к параметрическим представлениям решений $x_2(\gamma)$ и $x_3(\gamma)$:

$$x_2(\tau) = \tau, \quad \gamma(\tau) = -\frac{1 + \tau^3}{\tau}, \quad 0 < \tau \leq \tau_* \quad (4.3)$$

$$x_3(\tau) = \tau, \quad \gamma(\tau) = -\frac{1 + \tau^3}{\tau}, \quad \tau_* \leq \tau < \infty \quad (4.4)$$

В полной аналогии с вычислениями выполненными при анализе решения $x_1(\gamma)$ после соответствующих вычислений с использованием соотношений (4.3) и (4.4) приходим к асимптотическим представлениям для решений $x_2(\gamma)$, $x_3(\gamma)$:

$$-\gamma \gg 1: \quad x_2(\gamma) \approx -\frac{1}{\gamma}, \quad x_3(\gamma) \approx \sqrt{-\gamma} \quad (4.5)$$

Отметим также, что зависимость $x_2(\gamma)$ монотонно возрастающая, в то время как $x_3(\gamma)$ – монотонно убывающая

5. Параметрическое представление комплексных решений кубического уравнения

Приступая к анализу комплексных решений кубического уравнения в канонической форме (2.4), отметим, что с учетом результатов проведенного анализа решений в предыдущих пунктах комплексные решения существуют для значений $\gamma \geq \gamma_* = -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. Введем обозначение для комплексного решения $z(\gamma) = r(\gamma) + i s(\gamma)$, где $r(\gamma)$ и $s(\gamma)$ – вещественные функции и отметим, что $z^*(\gamma) = r(\gamma) - i s(\gamma)$ также является решением уравнения (2.4). Подстановка приведенного выше представления для комплексного решения $z(\gamma)$

в уравнение (2.4) с последующим выделением вещественной и мнимой частей полученного выражения приводит к системе уравнений относительно зависимостей $r(\gamma)$ и $s(\gamma)$:

$$r^3 - 3r s^2 + \gamma r + 1 = 0, \quad (3r^2 - s^2 + \gamma)s = 0 \quad (5.1)$$

Отметим, что второе из уравнений (5.1) удовлетворяется при $s = 0$ при этом первое уравнение принимает вид $r^3 + \gamma r + 1 = 0$ (при этом $r > 0$) и соответствует обсуждавшимся выше вещественным решениям уравнения (2.4). В связи с этим, в дальнейшем анализе будем принимать $s \neq 0$ и соответственно этому перепишем систему (5.1) в виде:

$$r^3 - 3r s^2 + \gamma r + 1 = 0, \quad 3r^2 - s^2 + \gamma = 0 \quad (5.2)$$

Разрешая второе уравнение в (5.2) относительно s^2

$$s^2 = 3r^2 + \gamma \quad (5.3)$$

и последующей подстановки этого выражения в первое уравнение (5.2), приходим к уравнению относительно зависимости $r(\gamma)$:

$$-8r^3 - 2\gamma r + 1 = 0, \quad \gamma \geq \gamma_* \quad (5.4)$$

Введем в рассмотрение положительный вещественный параметр $\tau > 0$ и представим с учетом этого уравнение (5.4) в разрешенной относительно параметра γ форме

$$r = \tau, \quad \gamma = \frac{1 - 8\tau^3}{2\tau}, \quad \gamma \geq \gamma_* \quad (5.5)$$

Соотношения (5.5) представляют собой задание зависимости $r(\gamma)$ в параметрической форме. Отметим при этом, что значению $\gamma = \gamma_* = -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ соответствует значение $\tau = \tau_* = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, для которых согласно (5.3) $s = 0$. Приведем также интервал изменения параметра $\tau > 0$ $0 < \tau \leq \tau_*$.

Таким образом, приходим к окончательным выражениям для параметрического представления зависимости $r(\gamma)$

$$r = \tau, \quad \gamma = \frac{1 - 8\tau^3}{2\tau}, \quad \gamma \geq \gamma_*, \quad 0 < \tau \leq \tau_* \quad (5.5)$$

Для асимптотических значений $\tau \ll 1$ соотношения (5.5) приобретают вид

$r = \tau$, $\gamma \approx \frac{1}{2\tau}$ и в результате приходим к асимптотическому поведению зависимостей $r(\gamma)$ и с использованием (5.3) $s(\gamma)$ при $\gamma \gg 1$

$$r(\gamma) \approx \frac{1}{2\gamma}, \quad s(\gamma) \approx \pm\sqrt{\gamma}, \quad \gamma \gg 1 \quad (5.6)$$

Непосредственными вычислениями аналогичным выполненным выше можно убедиться, что зависимость $r(\gamma)$ в интервале $\gamma \geq \gamma_*$ монотонно убывающая.

Ссылки:

1. BANICHUK, N., BARSUK, A., JERONEN, J., NEITTAANMAKI, P., TUOVINEN, T. On some bifurcation analysis techniques for continuous systems. In: *Rakenteiden Mekaniikka (Journal of Structural Mechanics)*, 2016, vol. 49, no. 2, pp. 52-68.
2. BANICHUK, N., BARSUK, A., JERONEN, J., TUOVINEN, T., NEITTANMAKI, P. *Stability of Axially Moving Materials*. Springer, 2019, 481 p.
3. BARSUK, A.A., PALADI, F. Generalized parametric model for phase transitions in the presence of an intermediate metastable state and its application. In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, 2017, vol. 487, p. 74-92.
4. BARSUK, A.A., PALADI, F. Parametric representation and bifurcation analysis of the cubic equation solutions with application to the phase transitions. In: *Studia Universitatis Moldaviae. Seria „Științe Fizice”*, 2019, nr. 2 (122), p. 3-6.

Примечание: Стаття разработана в рамках государственной программы (2020-2023) „Tehnologii fizice avansate cu aplicarea UVS în monitorizarea și modelarea factorilor de mediu”. Шуфр 20.80009.7007.05.