# Utilizarea algoritmilor specifici în aplicarea criteriilor de congruenţă pentru determinarea caracteristicilor unei configuraţii geometrice

Violeta Popovici-Bujor

**Abstract**. Cazurile de congruenţă ale triunghiurilor sunt unele din temele importante din geometrie. În articolul prezent, analizăm unii din algoritmii specifici din demonstrațiile acestor cazuri redate de diferiți autori ale manualelor de matematică.

Metodica introducerii şi tratarea noţiunii de congruenţă variază de la un manual la altul. În general, despre două figuri geometrice plane, se spune că sunt congruente, dacă prin suprapunere acestea coincid. Acelaşi lucru se spune şi despre triunghiuri: dacă putem aşeza unul din cele două triunghiuri pe celălalt, astfel încât să coincidă, vom spune că cele două triunghiuri sunt congruente[1], [2], [6]. Noţiunile ,,suprapunere" şi ,,coincidenţă" se consideră intuitiv cunoscute de către elevi, de aceea, pentru a înţelege faptul că triunghiurile sunt congruente, trebuie să se observe cum se mişcă vârfurile triunghiurilor, şi unde ajung acestea. În aşa fel, elevii pot observa algoritmul, $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$, unde punctul $A$ ajunge la punctul $A_1$, punctul $B$ la $B_1$ şi $C$ la $C_1$, se obţin corespondenţele între unghiuri, respectiv între laturi.

Definiţia pe care o găsim în prezentul manual de matematică este următoarea: Triunghiurile care au elementele corespunzătoare, congruente două câte două, se numesc triunghiuri congruente.

Definiția corectă și completă a congruenței poate fi expusă cu ajutorul noțiunii de deplasare (mișcare): Figura $\Phi$ este congruentă cu figura $\Phi^{/}$, dacă există o deplasare $g$ a planului (spațiului) care aplică figura $\Phi$ pe figura $\Phi^{/}$, $\Phi^{/} = g(\Phi)$.

În manualul academicianului Pogorelov A. [2] este redat într-un mod original egalitatea (congruența) triunghiurilor şi aplicarea unei axiome speciale despre existenţa triunghiului egal cu triunghiul dat. Folosirea acestei axiome la demonstrarea egalităţii triunghiurilor substituie ideea suprapunerii intuitive a triunghiurilor [2].

Scopul criteriilor de congruență constă în determinarea unor metode mai simple de a determina congruența figurilor date. Conform Curriculumului școlar, elevii studiază trei criterii.

**Cazul I Congruenţa latură – unghi – latură (LUL)**

Dacă două laturi şi unghiul cuprins între ele dintr-un triunghi sunt congruente, respectiv, cu elementele corespunzătoare dintr-un alt triunghi, atunci cele două triunghiuri sunt congruente.

**Cazul II Congruenţa unghi - latură – unghi (ULU)**

Dacă o latură şi unghiurile alăturate acesteia dintr-un triunghi sunt congruente, respectiv, cu elementele corespunzătoare dintr-un alt triunghi, atunci cele două triunghiuri sunt congruente.

**Cazul III Congruenţa latură – latură – latură (LLL)**

Dacă toate cele trei laturi ale unui triunghi sunt congruente, respectiv, cu cele trei laturi dintr-un alt triunghi, atunci cele două triunghiuri sunt congruente.

În manual nu sunt redate demonstraţiile acestor teoreme. Pentru a dezvolta gândirea algoritmică la elevi, este bine ca elevii să cunoască demonstraţia acestor criterii. O aplicaţie poate fi propusă elevilor prin decuparea a două triunghiuri congruente din hârtie şi suprapunerea lor.

Una din metodele de demonstraţie a criteriilor de egalitate este cea prin suprapunere. Metoda suprapunerii presupune o abstractizare a comparărilor directe ale elementelor triunghiurilor intuitive. Ideea principală a demonstraţiei criteriului 1 şi 2 în manualul lui Pogorelov constă în efectuarea succesivă a suprapunerii unui triunghi dat asupra celuilalt şi demonstraţia coinciderii lor la această suprapunere.

Necunoaşterea nici a unui unghi, la criteriul al treilea, face imposibilă suprapunerea. Demonstraţie este făcută prin reducerea la criteriul întâi, aplicând proprietăţile unghiurilor de la baza triunghiului isoscel.

Voi reda algoritmul de demonstraţie a primului criteriu, conform manualului lui Pogorelov [2]: demonstraţia dată a teoremei se bazează numai pe axiome.

La primul criteriul de congruenţă, se admite că $\Delta ABC$ şi $\Delta A_1B_1C_1$ au $\measuredangle A \equiv \measuredangle A_1$, $AB = A_1B_1$ şi $AC = A_1C_1$. Trebuie de demonstrat că triunghiurile sunt congruente. Se va parcurge următorul algoritm:

a. **Se afirmă existenţa** $\boldsymbol{\Delta A_1B_2C_2 \equiv \Delta ABC}$: *fie* $\Delta A_1B_1C_1$ *un triunghi congruent cu* $\Delta ABC$*, cu vârful* $B_2$ *pe semidreapta* $A_1B_1$*şi vârful* $C_2$ *în acelaşi semiplan în raport cu dreapta cu dreapta* $A_1B_1$*, unde se află vârful* $C_1$ (fig.1). Un astfel de triunghi, după cum se ştie, există conform axiomei: ,,Oricare ar fi triunghiul, există un triunghi egal cu el în poziţia dată faţă de semidreapta dată”.

b. **Se motivează coincidenţa punctelor $\boldsymbol{B_2}$ şi $\boldsymbol{B_1}$**: *deoarece* $A_1B_1 = A_1B_2$, *vârful* $B_2$ *coincide cu vârful* $B_1$ (fig.2). Aici se explică axioma depunerii segmentelor: ,,Pe orice semidreaptă de la originea ei se poate depune un segment de lungime dată şi numai unul singur”.

c. **Se motivează coincidenţa semidreptelor $\boldsymbol{A_1C_2}$ şi $\boldsymbol{A_1C_1}$**: *întrucât* $\measuredangle B_1A_1C_1 = \measuredangle B_2A_1C_2$, *rezultă că semidreapta* $A_1C_2$ *coincide cu semidreapta* $A_1C_1$ (fig.3).Aici se aplică axioma depunerii unghiurilor ,,De la orice semidreaptă în semiplanul dat se poate depune un unghi de o anumită măsură dată în grade, mai mică decât 180°, şi numai unul singur.

d. **Se motivează coincidenţa punctelor $\boldsymbol{C_2}$ şi $\boldsymbol{C_1}$**: *întrucât* $A_1C_1 = A_1C_2$, *vârful* $C_2$ *coincide cu vârful* $C_1$ (fig.4). Aici se explică axioma depunerii segmentelor: ,,Pe orice semidreaptă de la originea ei se poate depune un segment de lungime dată şi numai unul singur”.

e. **Se face concluzia despre egalitatea triunghiurilor**:*triunghiul* $A_1B_1C_1$ *coincide cu triunghiul* $A_1B_2C_2$*, deci este egal cu triunghiul* $ABC$.

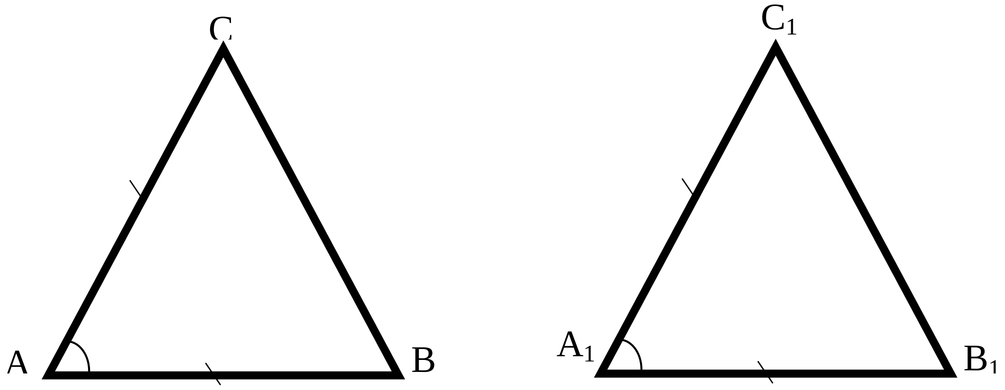


Fig. 1

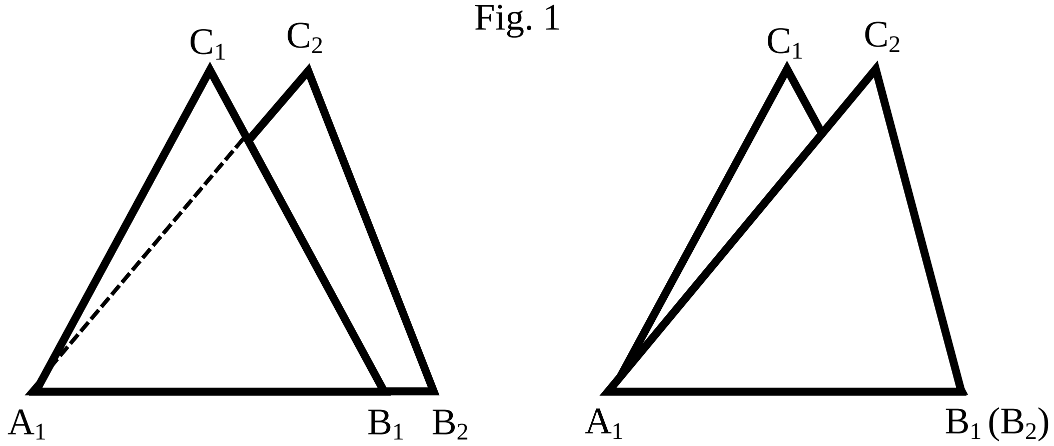


Fig. 2

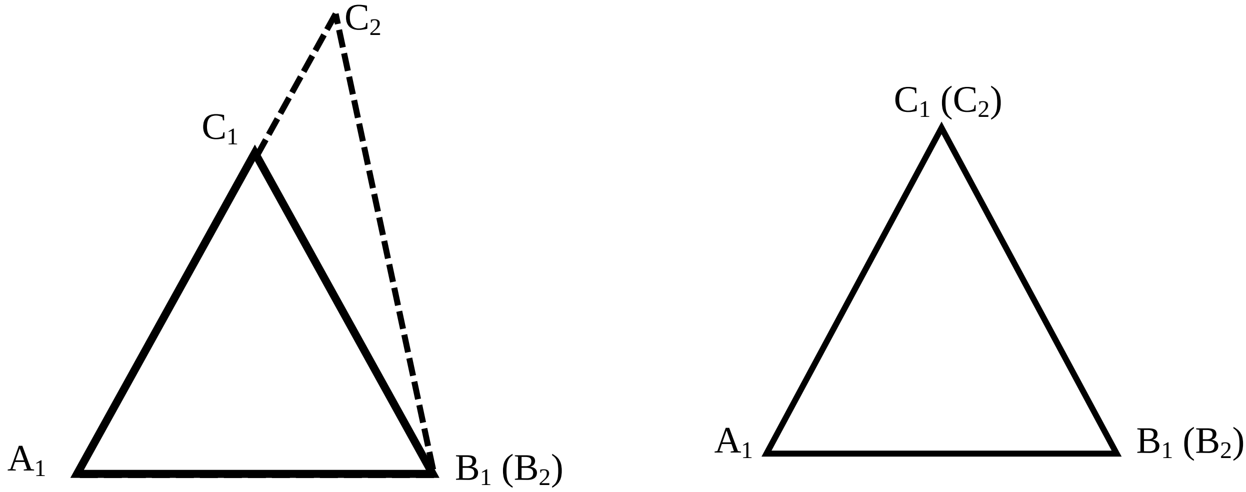


Fig. 3

Metoda de demonstraţie a criteriului al doilea de egalitate a triunghiurilor puţin se deosebeşte de cea a primului criteriu. Aici e posibilă aplicarea metodei analogiei.

Demonstraţia criteriului al treilea se bazează pe axioma existenţei triunghiului egal cu triunghiul dat şi pe teorema despre proprietăţile medianei în triunghiul isoscel. În demonstraţie se aplică metoda reducerii la absurd. Toate aceste aspecte teoretice se vor repeta înainte de demonstraţie. Algoritmul demonstrării, constă în trei paşi [4]:

a. Se formulează teorema, se evidenţiază desenul, ipoteza şi concluzia.
b. Se demonstrează că există $\Delta A_1B_1C_2$ congruent cu $\Delta ABC$, vârful $C_2$ al căruia este situat în acelaşi semiplan faţă de dreapta $A_1B_1$ ca şi punctul $C_1$. Dacă apare necesitatea, se explică coincidenţa punctelor $B_1$şi $B_2$.
c. Prin metoda reducerii la absurd, se demonstrează coincidenţa punctului $C_2$cu punctul $C_1$.

Curriculum şcolar la matematică prevede doar trei criterii de egalitate a triunghiurilor, dar mai există şi al patrulea criteriu, neprevăzut de Curriculum. Acest criteriu poate fi discutat cu elevii din cadrului Centrelor de excelenţă, elevi cu aptitudini la matematică.

**Criteriul de congruenţă LUU:** Dacă două triunghiuri oarecare au o latură, unghiul opus şi un unghi alăturat ei respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.

Putem utiliza acţiuni-cheie ce le vine în ajutor elevilor la rezolvarea unor probleme:

1. Scrierea ipotezei şi a concluziei.

2. Identificarea a două segmente congruente.
3. Identificarea a două unghiuri congruente.
4. Aplicarea cazurilor de congruenţă.
5. Identificarea triunghiurilor congruente.

   Următoarele două algoritmi specifici se pot utiliza la aplicarea criteriilor de congruenţă pentru determinarea caracteristicilor unei configuraţii geometrice,

1. Dacă în problemă se cere de a demonstra congruenţa a două triunghiuri, atunci:
   1.1 reducem problema la aplicarea unui caz de congruenţă a triunghiurilor;
   1.2 căutăm trei perechi de elemente respective congruente.
2. Dacă în problemă se cere de a demonstra congruenţa a două unghiuri sau a două segmente (metoda triunghiurilor congruente):
   2.1 cele două segmente (sau unghiuri) se încadrează în două triunghiuri a căror congruenţă poate fi demonstrată cu ajutorul criteriilor LUL, ULU, LLL;
   2.2 se consideră că segmentele (sau unghiurile) sunt congruente dacă ele sunt elemente omoloage ale triunghiurilor în care au fost încadrate. deducem că laturilor congruente li se opun unghiuri congruente şi reciproc.

Folosirea materialului didactic, modul de prezentare, trebuie să fie de aşa natură încât elevii să nu ajungă numai la aspectul experimental. De la observarea că figurile coincid, ei trebuie să ajungă la convingerea, pe cale deductivă, că figurile trebuie să coincidă, adică la metoda de demonstraţie [4].

Este important să atragem atenţia elevilor la faptul că în viitor, datorită criteriilor de congruență, stabilirea egalității a două triunghiuri, nu necesită demonstraţia egalităţii a trei perechi de laturi corespunzătoare şi a trei perechi de unghiuri corespunzătoare. Este suficient să se demonstreze egalitatea a câte două laturi şi unghiului cuprins între ele.

În concluzie, o spun cu certitudine, că demonstrația acestor criterii este necesară, pentru ca elevii să formeze obiceiuri de învățare activă, unde implicarea lor în demonstrarea teoremelor î-i vor ajuta să dea un sens mai profund materialului învățat.

## Bibliografie

1. Achiri I., Braicov A., Şputenco O. Matematica, manual pentru clasa a VII-a. Chişinău: Cartdidact, 2012.
2. Pogorelov A. Geometria, manual pentru clasele a VII - XI-a ale şcolii medii. Chişinău:Lumina, 1991.
3. Cuculescu I. Ottescu G., Gaiu L. Matematica. Geometrie. Manual pentru clasa a VI-a. Bucureşti: Editura Didactică şi Pedagogică, 1992.
4. Achiri I., Anastasiei M., Cibotarenco E., Solomon N., Turlacov Z. Metodica predării matematicii, volumul III: Metodica predării geometriei în învăţământrul preuniversitar. Chişinău: Lumina, 1997.
5. Romanov A., Romanov C., Tocoian D., Milaş F., Batki L., Both M., Tocoian S. Lecţia de matematică, culegere clasa a VI-a. Bucureşti: Litera, 2018.
6. Perianu M., Smărăndoi Ş., Stănică C. Matematica. Semestrul I, culegere, clasa a VI-a. Bucureşti: Art Educaţional, 2018.

Violeta Popovici-Bujor
Universitatea de Stat din Tiraspol
e-mail: violetapopovicibujor@gmail.com