PROBLEME CU CARACTER APLICATIV ÎN STUDIEREA MATEMATICII

APPLICATION PROBLEMS IN THE STUDY OF MATHEMATICS

Dorin AFANAS
Universitatea de Stat din Tiraspol
E-mail: dorinafanas@rambler.ru

Ana CURCOVSCHI
Universitatea de Stat din Tiraspol

Ludmila NIȚICA
Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. *Este cunoscut faptul, că matematica ca și orice altă știință studiază realitatea obiectivă. Ea s-a născut din practica umană și s-a dezvoltat treptat, răspunzând diferitelor probleme ale acesteia.*

Izvorul viabilității matematicii constă în faptul că noțiunile și concluziile ei, cu tot caracterul lor abstract, își au rădăcinile în realitate și-și găsesc aplicații largi în alte științe, în tehnică, în viața cotidiană. Una din trăsăturile caracteristice ale matematicii constă în faptul că sfera aplicațiilor ei este extrem de largă.

Este cu totul remarcabilă constatarea că până și cele mai abstracte construcții ale matematicii, apărute în cadrul ei propriu, fără impulsuri directe din partea științelor naturii sau a tehnicii, își găsesc aplicații fecunde în practică.

În lucrare sunt cercetate probleme cu conținut cotidian, exemple de aplicații deosebit de importante ale matematicii în științele exacte, sunt cercetate obiectivele care trebuie atinse în procesul legăturii dintre învățământul matematic teoretic și practica cotidiană, sunt stabilite cerințele față de problemele cu caracter aplicativ, etc.

Cuvinte cheie: *învățământ matematic, problemă, caracter aplicativ, obiective, cerințe.*

Abstract. *It is well known that mathematics, like any other science, studies objective reality. It was born out of human practice and gradually developed, responding to its various problems.*

The source of the viability of mathematics consists in the fact that its notions and conclusions, with all their abstract character, have their roots in reality and find wide applications in other sciences, in technique, in everyday life. One of the characteristic features of mathematics is that its scope is extremely wide.

It is quite remarkable to find that even the most abstract constructions of mathematics, which appeared within it, without direct impulses from the natural sciences or technology, find fruitful applications in practice.

The paper researches problems with everyday content, examples of particularly important applications of mathematics in the exact sciences, researches the objectives to be achieved in the process of linking theoretical mathematics education and daily practice, sets requirements for application problems, etc.

***Key words**: mathematics education, problem, applicability, objectives, requirements.*

Introducere

Deseori necesitățile practice au indicat omenirii direcțiile de dezvoltare ale științei. Referitor la această problemă F. Enghels afirma: *dacă în societate apare o necesitate tehnică, atunci ea va împinge știința înainte, mai mult decât zece universități*.

Este cunoscut faptul, că matematica ca și orice altă știință studiază realitatea obiectivă. Ea s-a născut din practica umană și s-a dezvoltat treptat, răspunzând diferitelor probleme ale acesteia.

Izvorul viabilității matematicii constă în faptul că noțiunile și concluziile ei, cu tot caracterul lor abstract, își au rădăcinile în realitate și-și găsesc aplicații largi în alte științe, în tehnică, viața cotidiană. Una din trăsăturile caracteristice ale matematicii constă în faptul că sfera aplicațiilor ei este extrem de largă.

Astfel, numărând zilele, socotind cheltuielile sau calculând suprafața unui apartament, aplicăm cele mai simple și cele mai răspândite formule și noțiuni matematice. Nici un aparat tehnic cât de performant n-ar fi el nu poate fi lipsit de calcule mai mult sau mai puțin complicate. De asemenea – astronomia, mecanica, fizica, chimia – utilizează pe scară largă aparatul matematic și din această cauză ele au exercitat întotdeauna o influență directă asupra dezvoltării acestei științe. Ca exemple de aplicații deosebit de importante ale matematicii în științele exacte pot servi:

Descoperirea planetei Neptun de către astronomul Leverrier [5] prin calculul care stă la baza mecanicii și a legii atracției universale. Exprimând legile electromagnetice sub formă de ecuații Maxwell a dedus pe cale pur matematică existența undelor electromagnetice și faptul că ele trebuie să se propage cu viteza luminii.

Este cu totul remarcabilă constatarea că până și cele mai abstracte construcții ale matematicii, apărute în cadrul ei propriu, fără impulsuri directe din partea științelor naturii sau a tehnicii, își găsesc aplicații fecunde în practică.

Astfel, teoria funcțiilor de variabilă complexă își găsește aplicație în demonstrația teoremei lui Jukowski cu privire la aripa avionului. De asemenea, Lobacewski, încercând să demonstreze axioma paralelelor, o problemă de interes pur matematic, a pus bazele unei noi dezvoltări a geometriei, și anume teoria spațiilor neeuclidiene, care mai târziu a servit la fundamentarea teoriei relativității.

Matematica are aplicații atît de vaste, deoarece utilizează numai unele proprietăți generale, făcând abstracție de ceea ce este particular și concret. Anume datorită acestui fapt, concluziile ei își găsesc aplicații în diverse domenii. Deci posibilitatea aplicațiilor largi ale matematicii este asigurată de caracterul abstract pe care îl posedă.

Cum s-a dezvoltat matematica ? Se cunoaște, că omenirea a însușit din practica numerală, astfel elaborând noțiunea de număr, după care s-a impus necesitatea introducerii unor notații pentru numere, etc. Exprimându-se pe scurt, matematica s-a dezvoltat datorită practicii sociale.

Totodată ea apare în constata interacțiune cu gîndirea abstractă, care sintetizează și generalizează experiența. Noțiunile abstracte, apărute din practică, devin un instrument important al acesteia și se perfecționează continuu. Astfel, gândirea depășește deseori cerințele imediate ale unei probleme impusă de necesitățile practice. De exemplu, numerele mari, cum ar fi milionul sau miliardul, au apărut pe baza numerației, dar înaintea necesității practice de a utiliza astfel de numere. În mod analog au apărut și numerele imaginare. Aceste exemple desigur sunt doar niște cazuri particulare ale interacțiunii necesităților practice cu gîndirea abstractă.

Practica socială joacă un rol decesiv în dezvoltarea matematicii indicând direcția de dezvoltare și tot odată practica îi oferă criterii pentru stabilirea adevărului concluziilor obținute [6].

Aceasta reiese deosebit de limpede din apariția și fondarea analizei matematicii ca știință. Dezvoltarea mecanicii și a tehnicii a fost cea care a pus problema studiului dependențelor dintre mărimi variabile, în forma lor generală. Matematicienii din antichitate care s-au apropiat mult de calculul diferențial și integral au rămas însă în cadrul problemelor staticii. Pe când în epoca modernă, tocmai cercetarea mișcării a generat noțiunile de variabilă și de funcție, care a și determinat apariția analizei matematicii.

Pe de altă parte, nevoile producției sociale au fost cele care au stimulat formularea și rezolvarea unor asemenea probleme. Este cât se poate de caracteristic că analiza matematică, în faza apariției ei, a găsit justificarea concluziilor tocmai în aplicații.

Numai în felul acesta ea a putut să se dezvolte, fără definițiile riguroase ale noțiunilor fundamentale de funcție, de limită, care au fost date mai tărziu. Aplicațiile în mecanică, fizică și tehnică stabileau adevărul analizei.

Cele de mai sus sânt valabile pentru toate perioadele de dezvoltare a matematicii. Începând cu secolul al XVII-lea, dezvoltarea matematicii a fost influențată în mod direct de mecanică, fizica teoretică și de necesitățile tehnicii noi. Mecanica mediilor continue, propagarea căldurii, electricitatea, magnetismul au dus la apariția și dezvoltarea teoriei ecuațiilor diferențiale în derivate parțiale. Elaborarea teoriei moleculare și a fizicii statice da la sfârșitul scoluli al XIX-lea a servit ca un important imbold pentru calculul probabilităților.

În prezent, teoriile matematice cum ar fi cea a analizei funcționale, sunt stimulate de problemele mecanicii și electrodinamicii cuantice, de problemele tehnicii de calcul.

Știința nu abordează numai rezolvarea unor probleme pur teoretice, ci răspunde nevoilor dezvoltării societății.

În ultimul timp apar în matematică multe teorii, dar se dezvoltă și se afirmă numai acelea care își găsesc aplicații în științele naturii și în tehnică.

În ansamblu, dezvoltarea matematicii trebuie înțeleasă, în primul rând, ca rezultat al interacțiunii logicii obiectului, a influenței producției și a relațiilor cu științele naturii. În conținut, dezvoltarea matematicii este determinată de obiectul ei, dar este stimulată, în ultima instanță, de nevoile producției.

Legătura matematicii cu producția este, în general, complexă. Din cele menționate mai sus nu trebuie însă să tragem concluzia că apariția fiecărei teorii matematice se datorează unei cerințe de producție. Matematica, la fel ca și orice altă știință, posedă o independență relativă.

Ea ocupă un loc deosebit de important în procesul de instruire și educație a elevilor. Cunoștințele matematice și deprinderile de a gândi logic fac din ea un instrument puternic pentru studierea fenomenelor naturii, a legilor ei, adică contribuie la formarea unei concepții științifice despre lume.

Însușirea și conștientizarea deplină a cunoștințelor teoretice matematice trebuie să fie însoțite mereu de explicații profunde a necesităților apariției lor, de legăturile diverse și complicate cu practica cotidiană.

Alături de fizică și chimie, de științele biologice, de geografie și desen, matematica este una dintre disciplinele de bază ale învățământului politehnic.

Așa se explică faptul că s-au luat o serie de măsuri importante privind îmbunătățirea studiului matematicii în învățământul general. Astfel s-au introdus în programe cunoștințe de matematică superioară, analiza matematică și geometrie analitică. Aceste cunoștințe au lărgit orizontul matematic al elevilor, oferindu-le posibilitatea de a lua cunoștință cu noi aplicații practice.

Spre deosebire de celelalte științe, matematica, studiind aspectele cantitative ale obiectelor și fenomenelor lumii reale, formele ei spațiale, nu este legată de producție în acelaș mod în care sunt legate, de exemplu, fizica, chimia sau biologia.

Matematica nu are posibilitatea de a-i familariza pe elevi nemilocit cu desfășurarea proceselor de producție sau cu mânuirea uneltelor, de a lucra cu diferite aparate, cu diferite mașini etc. Însă, în pofida acestui fapt, sudiul matematicii contribuie deosebit de mult la stabilirae legăturii dintre învățământ și munca productivă, deoarece face mai simplă înțelegerea bazelor producției moderne.

Oricare n-ar fi căile concrete prin care profesorul de matematică asigură legătura dintre cunoștințele matematice și activitatea practică, ea trebuie să se realizeze numai pe baza unui studiu sistematic, temeinic al disciplinilor matematice. Legătura învățământului de practică în cadrul matematicii presupune, în primul rând, ridicarea nivelulii științific al lecțiilor, perfecționarea metodelor pedagogice. Orice știrbire adusă nivelului științcific al cunoștințelor prdate și expunerii lor metodice nu poate decât să dăuneze pregătirii elevilor.

Un rol important la realizarea scopurilor învățământului matematuc formativ le revine problemelor cu caracter aplicativ. Pe parcursul rezolvării problemelor cu caracter aplicativ elevii însușesc noțiuni și proprietăți noi, demonstrează teoreme și formule noi etc., deci în general însușesc teorii matematice. Elevii învață matematica nu numai pentru a poseda un anumit volum bine determinat de cunoștințe, dar și pentru a aplica efectiv aceste cunoștințe în viața cotidiană la rezolvarea diferitor probleme ce vor apărea în activitatea practică.

Curriculum-ul la matematică [4] este elaborat în baza principiilor ce vizează componenetele fundamentale ale procesului de învățământ. Vom enumăra principiile ce au atribuție la cele spuse mai sus:

– învățarea trebiue să pornească de la aspecte relevante pentru dezvoltarea personală a elevului și pentru încadrarea sa în viața socială;

– predarea trebuie să asigure transferul de informații de la matematică la alte discipline;

– predarea trebuie să se desfășoare în contexte care leagă matemarica studiată la școală de viața cotidiană;

– evaluarea se fundamentează pe standarte curriculare de preformanță, obiective de evaluare orientate spre ceea ce va fi elevul la finalizarea școlarizării sale, la intrarea în viața socială.

Rezolvînd probleme, elevii învață să aplice matematica în practică. Cercetarea și descrieare multor procese și fenomene sunt imposibile fără aplicarea ei. Elevii vor însuși cu succes cursul de matematică numai atunci, când se vor convinge la fiecare pas de folosul ei în viață, tehnică etc. Întrebările învățământului politehnic și legăturile interdesciplinare se pot rezolva prin alegerea unui sistem de probleme, ce dezvoltă priceperile de aplicare în practică a cunoștințelor matematice teoretice. Rezolvarea problemelor cu caracter aplicativ le lecțiile de matematică contribiue la însușirea conștientă, dar nu formală a matematicii. În afară de aceasta, rezolvarea problemelor cu conținut practiv este susținută de elevi cu un interes deosebit, trezește inițiativa lor și spiritul creator.

Prin rezolvarea problemelor cu conținut practic vom arăta că matematica reflectă fenomenele realității, este un mijloc puternic de cunoaștere a ei. Cercetând o metodă interesantă și rațională de rezolvare a problemei contribuim la educația estetică a elevului. Un rol însemnat în realizarea scopurilor educative îl ocupă problemele, conținutul cărora este legat de planurile economiei naționale, de realizările științei, tehnicii, culturii, problemelor cu conținut istoric.

Pe baza problemelor rezolvate elevii ajung la o concluzie importantă: evedențiind în problemele cu caracter practic din viața cotidiana doar relațiile cantitative, matematica în general studiază legile proceselor de producție. Inportant este că, în procesul studierii elementelor de analiză matematică în fața elevilor să se dezvăluie rolul metodelor analizei matematice în descrierea și cercetarea diferitor fenomene, să fie clar rolul aparatului analizei matematice în tehnologia modernă.

Luând atitudinea împotriva tendinței formale în învățământ încă la începutul veacului 20, F. Klein scria ”Întotdeauna se găsesc oameni, care pe exemplul scalaștilor evului mediu, încep predarea sa de la cele mai generale idei și apără această metodă, ca fiind unica științifică. Dar printre altele aceasta nu aste corect. Științific a învăța aceasta înseamnă a învăța omul să judice științific, dar nu de uluit pe el direct de la început cu o sistematizare științifică intensă.”

Anume prin probleme cu caracter aplicativ se poate de arătat utilizarea cunoștințelor matematice pentru conoașterea lumii reale, se poate de format primele interese profesionale la elevi, deoarece la rezolvarea lor noi le facem cunoștință cu aplicațiile cunoștințelor matematice în procesele de producție, cu unele unelte(obiecte) moderne de lucru, cu legile lumii ce ne înconjoară.

Exemple de probleme

Problemele cu caracter aplicativ în procesul studierii matematicii deschid mari posibilități pentru îndeplinirea obiectivelor învățării: dezvoltarea și educarea elevilor, pregătirea lor pentru continuarea studiilor în instituțiile de învățământ superior și către muncă [2, 3].

Ca exemplu vom cerceta cum pe baza unor probleme cu caracter aplicativ se poate de introdus noțiunea de limită a funcției.

Cu toții cunoaștem cât de abstractă și dificilă este definiția limitei [1]. Putem să începem introducerea noțiunii de limită cu ilustrarea fizică care facilitează înțelegerea ei.

Savanții deseori cercetează diferite moduri în ce cantitate variază ceva și dacă ele fiind influențate de anumite condiții cum se apropie de valorile specifice.

De exemplu, vom presupune că uzina industrială elimină deșeurile de apă într-un râu alăturat (fig. 1). La eliminarea deșeurilor se conțin chimicate care în concentrație mare sunt toxice pentru populație. Câțiva km în josul apei de la uzină, râul se scurge printr-un oraș mic. Întrucât orășenii folosesc apa din râu pentru a o bea, a se

Fig. 1

scălda, a pregăti bucate, ei sunt îngrijorați despre posibilele primejdii.

Operatorii de la uzină sunt obligați să păstreze concentrația chimică la punctul de eliminare a deșeurilor destul de mică pentru ca apa ajunsă în oraș să conțină câte mai puține chimicate pentru ca să nu cauzeze careva prejudicii.

Contoarele instalate la uzină și la stația de apă din oraș măsoară concentrația chimicatelor în apă la ambele puncte. Vom nota cu x concentrația chimicatelor indicată de către contorul de la uzină (fig. 2), iar cu y – concentrația chimicatelor indicată de contorul din oraș (fig. 3). Operatorul de la uzină reglează descărcările, astfel încât concentrația y de la contorul din oraș să fie aproape de nivelul L, destul de mică astfel încât concentrația chimicatelor să nu prezinte pericol pentru locuitorii orașului.

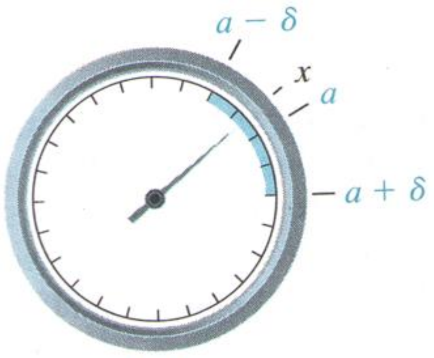

Fig. 2

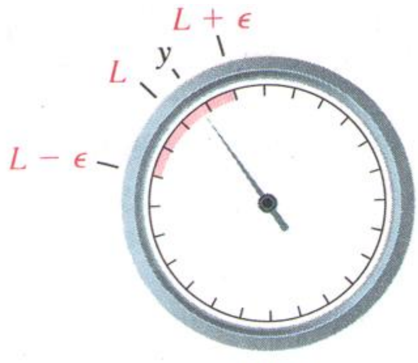

Fig. 3

Personalul de la uzină și funcționarii orașului au observat că atunci când concentrația x a chimicatelor este aproape de nivelul a la contorul de la uzină, măsura y de pe contorul din oraș este aproape de L. Ei de asemenea au observat că operațiile de la uzină nu permit menținerea concentrației la descărcare exact a pentru o perioadă mare, vor fi întotdeauna fluctuații în concentrație. Vom utiliza aceste contoare pentru a da sensul precis al afirmației: $y \to L$ *când* $x \to a$, *sau simbolic* $\lim_{x\to a} y = L$.

Când testăm aceste contoare, observăm că concentrația y din oraș nu va rămânea exact L pe o perioadă îndelungată de timp. Scopul nostru constă în faptul cum am putea forța că y să rămână aprope de L limitând x cu valori aproape de a. În paticular, dacă notăm prin ε un număr real pozitiv mic, presupunem că el este suficient pentru ca $L - \varepsilon < y < L + \varepsilon$ așa cum este indicat pe contorul din oraș (fig. 3). O afirmație echivalentă vom utiliza și pentru valorile absolute care sunt $|\, y - L \,| < \varepsilon$. Dacă această inegalitate este adevărată, atunci noi vom spune că y are o ε–vecinătate a lui L. Astfel afirmația y are 0,01–vecinătate a lui L și vom nota $|\, y - L \,| < 0{,}01$, ceea ce înseamnă că y se află cu 0,01 unități de la L. Această vecinătate poate fi destul de exactă conform presupunerii noastre.

Similar, vom considera un număr pozitiv mic δ și definim δ–vecinătate a lui a a contorului uzinei din figura .Utilizând funcțiile, este important ca $x \neq a$. Anticipând aceste restricții, noi vom spune că x are δ–vecinătate a lui a dacă $0 < |\, x - a \,| < \delta$ sau echivalent cu $a - \delta < x < a + \delta$ și $x \neq a$.

Considerăm următoarea întrebare: *pentru ce* $\varepsilon > 0$ *există un* $\delta > 0$ *astfel încât, dacă x este o* δ*–vecinătate pentru a, atunci y este o* ε*–vecinătate pentru L*?

Dacă această întrebare are sens, atunci scriem: $\lim_{x\to a} y = L$.

Este important să observăm ca dacă $\lim_{x\to a} y = L$, atunci nu contează cât de mic este numărul ε. Noi putem întotdeauna găsi un $\delta > 0$ încât dacă x este cuprins în intervalul $(a - \delta;\, a + \delta)$ de pe contorul uzinei (și $x \neq a$), atunci y se va afla în intervalul $(L - \varepsilon;\, L + \varepsilon)$ pe contorul orașului.

Acest exemplu ne ilustrează foarte exact interpretarea noțiunii de limită. Dacă reformulăm întrebarea precedentă și răspunsul ei, atunci vom obține următoarea afirmație: $\lim_{x\to a} y = L$, ceea ce înseamnă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta > 0$ astfel încât, dacă $0 < |\, x - a \,| < \delta$, atunci $|\, y - L \,| < \varepsilon$.

În așa mod am realizat un pas mic în formarea noțiunii de limită a funcției.

În continuare vom prezenta exemple concrete care facilitează însușirea noțiunilor de limită și continuitate a funcției.

Exemplul 1. Fiziologii măsurând oxigenul consumat $C(x)$ de către un sportiv în timpul mersului la pas și alergării în dependență de viteza sa x au obținut următoarele expresii analitice:

$$y = C(x) = \begin{cases} \frac{5}{81}x^2+1, & 0 \le x \le 9, \\ x-3, & 9 < x < 20. \end{cases}$$

Rezultatele măsurării sunt redate geometric în figura 4.

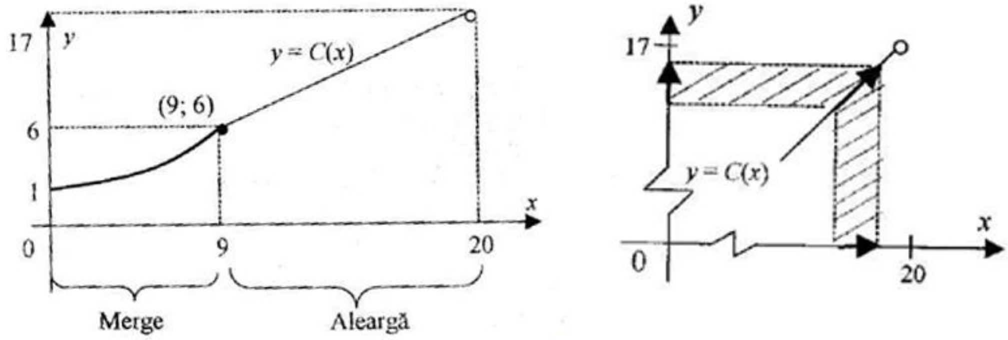

Fig. 4

Studiind graficul funcției $y = C(x)$, vom face următoarele concluzii:

a) Separăm atenția noastră la partea graficului care ne indică viteza sportivului în timpul alergării (fig.). Observăm că viteza crește și se apropie de 20 km/oră (vezi săgeata accentuată pe axa (Ox)). Presupunem că în acest timp oxigenul consumat se aproprie de 17 unități (vezi săgeata accentuată pe axa (Oy)). Sportivul nu este capabil să atingă exact viteza de 20km/oră, însă el poate foarte aproape să atingă viteza $x = 20$ „din stânga”. Matematic acest fapt poate fi redat în modul următor: $\lim\limits_{x \to 20^-} C(x) = 17$ sau $C(x) \to 17$ când $x \to 20^-$.

Vom citi „limita oxigenului consumat $C(x)$ este 17 unități, când viteza x a sportivului tinde către 20 din stânga”, sau „$C(x)$ tinde către 17, când x tinde către 20 din stânga”.

Vom accentua următoarele: în formula $x \to 20^-$, semnul minus ne indică că x tinde la 20 din stânga.

b) În continuare vom utiliza același raționament pentru viteza sportivului $x = 9$ km/oră în timpul mersului. Deoarece mergând viteza sportivului crește, ea se apropie foarte încet de $x = 9$ din stânga (fig. 5). Este natural să presupunem că oxigenul consumat $C(x)$ va fi foarte aproape de valoarea 6. În acest caz vom obține notația: $\lim\limits_{x \to 9^-} C(x) = 6$.

c) În cazul când sportivul începe a alerga viteza lui este foarte aproape de 9 km/oră. Graficul din figura ne indică că oxigenul consumat la viteza de $x \approx 9$ se apropie de valoarea 6. În acest caz, observăm că viteza

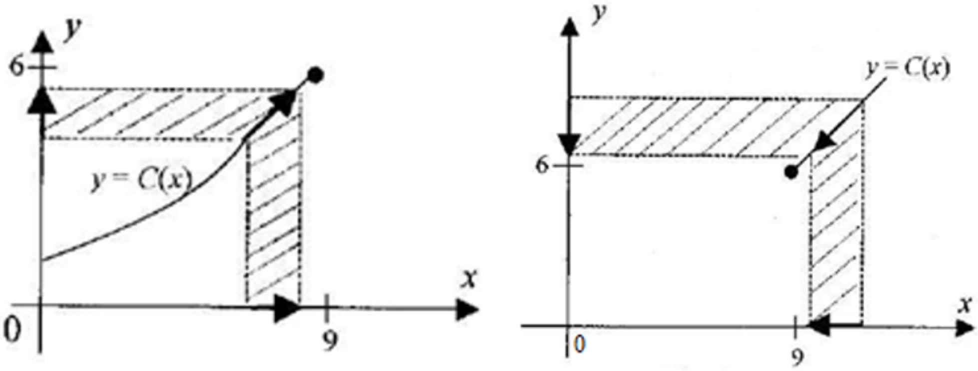

Fig. 5

sportivului este foarte aproape de 9 din dreapta. Matematic vom nota în modul următor: $\lim\limits_{x \to 9^-} C(x) = 6$ sau $C(x) \to 6$ când $x \to 9^+$ și vom spune ”limita lui $C(x)$ este 6 când x tinde la 9 din dreapta”.

Deoarece limita din stânga este egală cu limita din dreapta, vom spune pur și simplu că $\lim\limits_{x\to 9} C(x) = 6$ sau $C(x) \to 6$ când $x \to 9$.

Această metodă ne permite să definim noțiunea de limită în cazul când x primește valoarea 9 din orice parte, valoarea lui $C(x)$ este aproape de 6.

Procedeul descris în acest exemplu ne permite să observăm că consumul oxigenului este același de 6 unități dacă sportivul atinge viteza de 9 km/oră descrescând la alergare sau crescând în timpul mersului la pas.

În baza acestui exemplu putem da următoarea definiție: *fie* $f(x)$ *o funcție definită pentru orice* x *din stânga lui* x_0 (*adică din intervalul* $\{x\colon a < x < x_0\}$). *Numărul M se numește limită la stânga a funcției* $f(x)$ *când* x *tinde către* x_0 *din stânga dacă valoarea funcției* $f(x)$ *se apropie de M când valoarea lui x se apropie de* x_0 *din stânga. Vom nota*: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = M$ *sau* $f(x) \to M$ *când* $x \to x_0^-$.

În mod analog se definește noțiunea de limită la dreapta.

În scopul conștientizării mai profunde de către elevi a teoremei: *fie* $f(x)$ *o funcție definită de ambele părți a lui* x_0. *Atunci* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ *dacă și numai dacă* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$ *și* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$, se recomandă de cercetat următorul exemplu.

Exemplul 2. Producția $p(t)$ (se măsoară în unități pe oră) la o linie de asamblare este modelată de graficul reprezentat în figura . Linia de asamblare este divizată de la orele 12^{00} până la orele 13^{00}, iar după orele 13^{00} producerea se reia de la nivelul de dimineață. Parametrul t ne reprezintă timpul (măsurat în ore) după ce fabrica a început producerea zilnică (de la orele 8^{00}). Calculați limita lui $p(t)$ când $t \to 2$, $t \to 4$ și $t \to 5$.

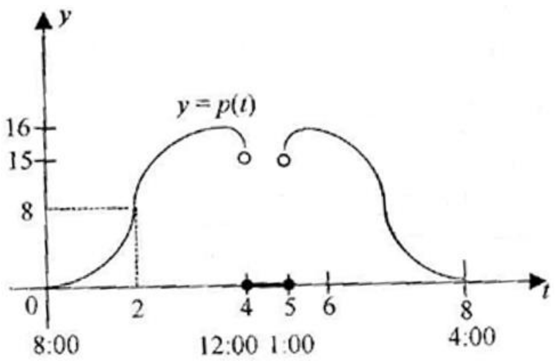

Fig. 6

Când $t \to 2$, funcția este lină și previzibilă. Astfel obținem $\lim\limits_{t\to 2} p(t) = 8$.

Pentru $t = 4$, graficul funcției are un salt. De aceea este necesar de calculat limitele laterale. Din figura 6, observăm că $\lim\limits_{t\to 4^-} p(t) = 15$, ceea ce înseamnă că atunci când $t \to 4$ din stânga (orele 12^{00}), producția fabricii tinde către 15 unități pe oră, iar când $t \to 4$ din dreapta, obținem $\lim\limits_{t\to 4^+} p(t) = 0$, deoarece când tindem către orele 12^{00} din dreapta (timpului prânzului) producția fabricii este egală cu zero unități pe oră. Din cele menționate observăm că aceste limite laterale sunt diferite și deci $\lim\limits_{t\to 4} p(t)$ nu există. Analog vom obține și în cazul când $t \to 5$ (orele 13^{00}): $\lim\limits_{t\to 5^-} p(t) = 0$, însă $\lim\limits_{t\to 5^+} p(t) = 15$ și deci $\lim\limits_{t\to 5} p(t)$ nu există.

Cuvântul ”continuu” este utilizat deseori în descrierea comportării unei funcții. De exemplu, funcția $y = p(t)$, care a fost cercetată mai sus, are o comportare previzibilă pentru $t = 2$ și imprevizibilă pentru $t = 4$ și $t = 5$.

În baza exemplelor 1 și 2 putem defini noțiunea de funcție continuă și discontinuă într-un punct și pe o mulțime.

În exemplul 1 funcția $y = C(x)$ este continuă pe tot intervalul (0; 20). Graficul acestei funcții ne reprezintă o linie neîntreruptă.

În exemplul 2 funcția $y = p(t)$ este continuă pentru toate valorile variabilei t cu excepția valorilor $t = 4$ și $t = 5$. Graficul acestei funcții ne reprezintă o linie întreruptă pentru $t = 4$ și $t = 5$.

În așa mod ajungem la justețea următoarelor două teoreme:

1. *Funcția liniară este continuă pe tot domeniul.*
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (mx + b) = mx_0 + b$.

Pentru consolidarea materiei studiate se vor propune elevilor exemple de tipul:

1. O stație de alimentare cu combustibil a stabilit următoarele prețuri la petrol:

Cantitatea (litri)	Prețul unui litru (lei)	Prețul deservirii (lei)

Până la 100	11,13	15
Între 100 și 200	11,10	18
După 200	11,07	21

Determinați punctele de discontinuitate ale funcției de cost $C(x)$, unde x este volumul (măsurat în litri) a petrolului livrat.

2. În figura 7 este reprezentată plata impozitului pe venit a unei persoane fizice într-un an, a cărui salariu constituie mai mult de 20000 lei și mai puțin de 20200 lei. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 50^+} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to 50^-} f(x)$; c) $\lim\limits_{x\to 50} f(x)$; d) $\lim\limits_{x\to 75} f(x)$; e) $\lim\limits_{x\to 149} f(x)$.

3. Calculați plata impozitului pe venit a unei persoane fizice salariul căreia este mai mic de 20150 lei. Scrieți condițiile exemplului utilizând notațiile matematice respective.

4. Graficul din figura 8 ne reprezintă cantitatea $p(t)$ de extragere a petrolului de către o sondă în intervalul de timp t (care se măsoară în zile).

a) Calculați $\lim\limits_{t\to 2} p(t)$. b) Calculați $\lim\limits_{t\to 3^-} p(t)$, $\lim\limits_{t\to 3^+} p(t)$ și $\lim\limits_{t\to 3} p(t)$.

c) Determinați toate punctele de discontinuitate ale funcției $p(t)$ pentru $0 < t < 6$.

d) În procesul extragerii petrolului au avut loc opriri. Determinați din figura când sonda a fost oprită și când extragerea petrolului a început din nou.

5. Graficul reprezentat în figura 9 ne indică cheltuielile $f(t)$ necesare pentru educația și instruirea unui copil până la atingerea vârstei de maturitate. Variabila t ne reprezintă câți ani are copilul. Determinați punctele de discontinuitate ale funcției $y = f(t)$.

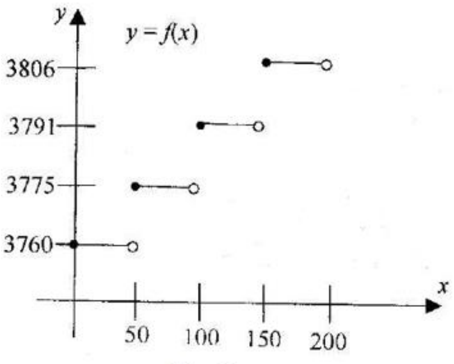

Fig. 7

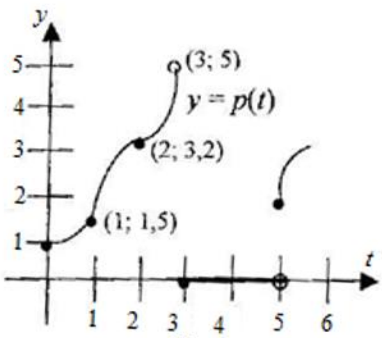

Fig. 8

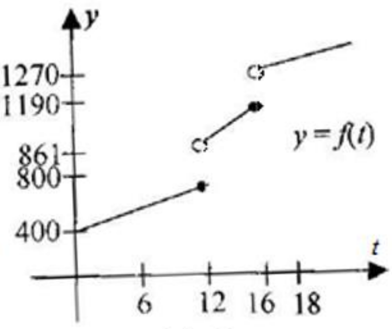

Fig. 9

6. În timpul intervenției chirurgicale inima unui pacient se răcește treptat. Graficul din figura 10 ne indică pierderile de sânge în timpul micșorării temperaturii. Punctul $t = 3$ reprezintă momentul când informația despre pierderea de sânge nu a fost înregistrată.

a) Calculați $\lim\limits_{t\to 3} f(t)$, unde $f(t)$ ne reprezintă scurgerea de sânge când t descrește odată cu creșterea temperaturii normale a corpului pacientului.

b) Utilizând definiția despre continuitatea funcției explicați când $f(t)$ va fi discontinuă pentru $t = 3$.

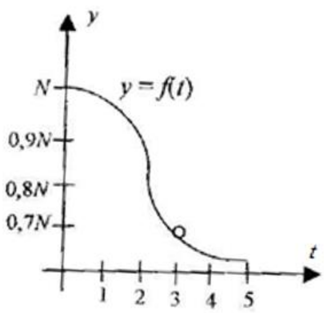

Fig. 10

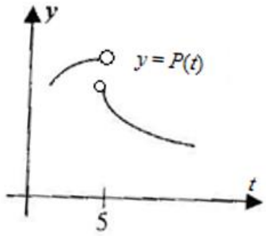

Fig. 11

La studiul proprietăților limitei unei funcții pot fi propuse elevilor următoarele exemple cu caracter aplicativ.

1. Cantitatea de pește dintr-un lac brusc s-a micșorat când s-a mărit poluarea chimică a lui. Notăm prin $P(t)$ cantitatea de pește (în mii), iar prin t timpul (măsurat în zile). Atât cantitatea de pește cât și timpul sunt indicate pe graficul reprezentat în figura 11 înainte și după poluare. Cantitatea de pește se exprimă în funcție de variabila t în modul următor:

$$P(t) = \begin{cases} 6\left(\dfrac{t^2+5}{19t+25}\right)^{\frac{1}{2}}, & 0 < t < 5, \\ 6\left(\dfrac{t}{t^2+25}\right)^{\frac{1}{3}}, & t > 5. \end{cases}$$

Determinați cantitatea de pește în lac până și după poluarea lui.

2. După curățarea unui râu, poluarea sa $P(t)$ este dată în funcție de t și N în modul următor: $P(t) = \left(\dfrac{\sqrt{t}+10}{t^2+10}\right)N,$ unde t este timpul (măsurat în ani) după începerea companiei de curățare, iar N ne reprezintă nivelul inițial de poluare. Calculați $\lim\limits_{t\to 4} P(t)$ și interpretați grafic.

3. O companie de înregistrare a discurilor CD a apreciat că vânzarea (în mii) a unui nou rock album este modelată de funcția $S(t) = \dfrac{5}{3t+1},$ unde t este timpul (măsurat în săptămâni) după ce albumul este scos în vânzare. Calculați $\lim\limits_{t\to 5} S(t).$

4. Un bussinesman a presupus că costul (în dolari) a unui automobil este $V(t) = 9000 - 1000t^{\frac{2}{3}},$ unde t este vârsta (în ani) a automobilului ($0 \le t \le 27$). Calculați $\lim\limits_{t\to 8} V(t)$ și interpretați grafic.

5. În decursul unui experiment, nivelul zgomotului în funcție de timpul t se determină de următoarele expresii analitice:

$$N(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t < 5, \\ 200, & t = 5, \\ 100 - t^2, & 5 < t \le 10. \end{cases}$$

Calculați $\lim\limits_{t\to 5^-} N(t),\ \lim\limits_{t\to 5^+} N(t)$ și interpretați grafic.

6. Fiziologii au calculat că timpul (măsurat în ore) de solicitare pentru a îndeplini o anumită temă este $P(t) = 1 + \dfrac{3}{t^2},$ unde t este timpul cheltuit, $t > 0$. Calculați $\lim\limits_{t\to 5} P(t).$

La studiul temei limita la infinit se recomandă de propus elevilor exemple de tipul:

1. Cererea consumatorului față de o oarecare producție ne reprezintă numărul de articole consumate ce sunt dispuse pentru a fi procurate la un preț particular. Presupunem că $d(x) = \dfrac{4}{x}$ este cererea consumatorului (în sute) pentru producția textilă cu prețul x (măsurat în lei). Această dependență dintre prețul x și cererea $d(x)$ pune în corespondență: prețurilor mari – cereri mici, iar prețurilor mici – cereri mari.

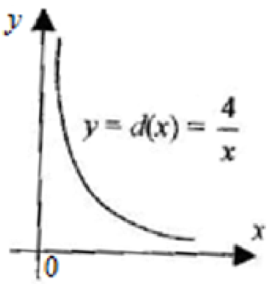

Fig. 12

Din figura 12 observăm că $\lim\limits_{x\to 0^+} d(x)$ nu există. Cu toate acestea, cererea consumatorului $d(x)$ când $x \to 0^+$ este în special un caz interesant pentru noi, deoarece prețul de vânzare x este mic, puterea de cumpărare a consumatorului devine mai mare. Pentru descrierea acestui fapt vom utiliza simbolul ∞ (infinit). Simbolul ∞ nu reprezintă un număr real, dar mai degrabă este o notație scurtă ce ne reprezintă conceptul de creștere fără hotar.

2. Notăm prin $D(t)$ numărul pieselor defectate produse la o uzină, iar prin t timpul mediu (măsurat în minute) necesar pentru confecționarea pieselor. Corespondența dintre numărul de piese defectate $D(t)$ în funcție de timpul t se reprezintă prin următoarea expresie: $D(t) = \frac{3t+7}{t}$. Calculați $\lim_{t \to 0^+} D(t)$.

Concluzii

Astfel, în baza celor relatate, putem afirma că:

1. Studiul matematicii în instituțiile preuniversitare de învățământ își atinge scopul dacă sunt respectate următoarele condiții:

– este strâns legat de activitatea practică;

– cel care învață trebuie să aibă are posibilitatea să facă cunoștință cu aplicațiile ei multiple în cele mai variate ramuri;

– cel care învață însuși le poate aplica în viață.

2. Legătura învățământului matematic teoretic cu practica cotidiană presupune atingerea următoarelor obiective:

– înarmarea elevilor cu cunoștințe care vor sta la baza diferitor științe ca: astronomia, fizica, chimia, biologia, etc.;

– formarea deprinderilor de calcul necesare atât însușirii și aprofundării cunoștințelor teoretice, cât și aplicarea acestor cunoștințe în practică;

– înarmarea cu cunoștințe necesare, care vor contribui la formarea deprinderilor de a mânui și utiliza diferite instrumente și aparate simple.

3. În cadrul lecțiilor de transmitere și însușire a noilor cunoștințe este necesar ca profesorul să respecte următoarele cerințe:

– conștientizarea necesității însușirii noilor cunoștițe;

– aprofundarea noilor cunoștințe teoretice;

– aplicarea cunoștințelor transmise în practică.

4. Problemele cu caracter aplicativ trebuie să satisfacă următoarele cerințe:

– să fie alcătuite în corespundere cu programa de bază la matematică;

– conținutul trebuie să reflecte nivelul modern al științei, tehnicii și producției, legile lumii ce ne înconjoară;

– să fie alcătuite pe baza materialului concret și cunoscut, de preferință, care vor ilustra lucrul întreprinderilor orașului, raionului, primăriilor sătești, tehnicii, științei, arătând aplicațiile cunoștințelor matematice în profesiile concrete ale oamenilor, ajutând elevii să cunoască și să-și aleagă profesia pe plac;

– condițiile problemelor cu caracter aplicativ nu trebuie să conțină multe noțiuni necunoscute, trebuie să fie scurte și pe înțelesul elevilor;

– problemele cu caracter aplicativ, alcătuite pe baza materialului concret, nu trebuie să fie mai complicate decât exemplele corespunzătoare din manuale;

– rezolvarea nu trebuie să încalce sistemul de expunere a matematicii, să supraîncarce lecția cu calcule greoaie. Nu trebuie de uitat, că prin intermediul caracterului aplicativ facilitează însușirea materialului teoretic;

– printre problemele cu caracter aplicativ trebuie să fie și probleme enunțul cărora majorează cunoștințele elevilor despre diferite profesii, ce au o răspândire pentru regiunea economică dată, astfel ajutând la orientarea profesională a elevilor;

– sistemul de probleme cu caracter aplicativ trebuie să conțină diferite probleme cu conținut geometric, fizic, tehnic, economic, etc., să rezolve problema legăturii interdisciplinare;

– datele numerice în probleme trebuie să corespundă la cele ce există în regiunea dată. În procesul rezolvării problemelor este necesar de utilizat regulile de calcul aproximativ, de folosit tabele și calculatoarele pentru ușurarea lucrului;

– problemele cu caracter aplicativ împreună cu problemele larg aplicate în predarea matematicii, trebuie să constituie un tot întreg.

Referințe bibliografice:

1. Aramă, L., Morozan, T., Probleme de calcul diferențial şi integral, Editura Tehnică, Bucureşti, 1978.
2. Catană, A., Săcuiu, M., Stănăşilă, O., Metodica predării analizei matematice, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1983.
3. Georgescu-Buzău, E., Onofraş, E., Metode de rezolvare a problemelor de matematică în liceu, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1983.
4. Matematică. Curriculum pentru clasele a X-a – a XII-a. Ministerul Educației al Republicii Moldova, Chișinău: Știința, 2010, 52p.
5. https://ro.wikipedia.org/wiki/Neptun.
6. https://www.didactic.ro/materiale-didactice/cercul-probleme-cu-caracter-aplicativ.